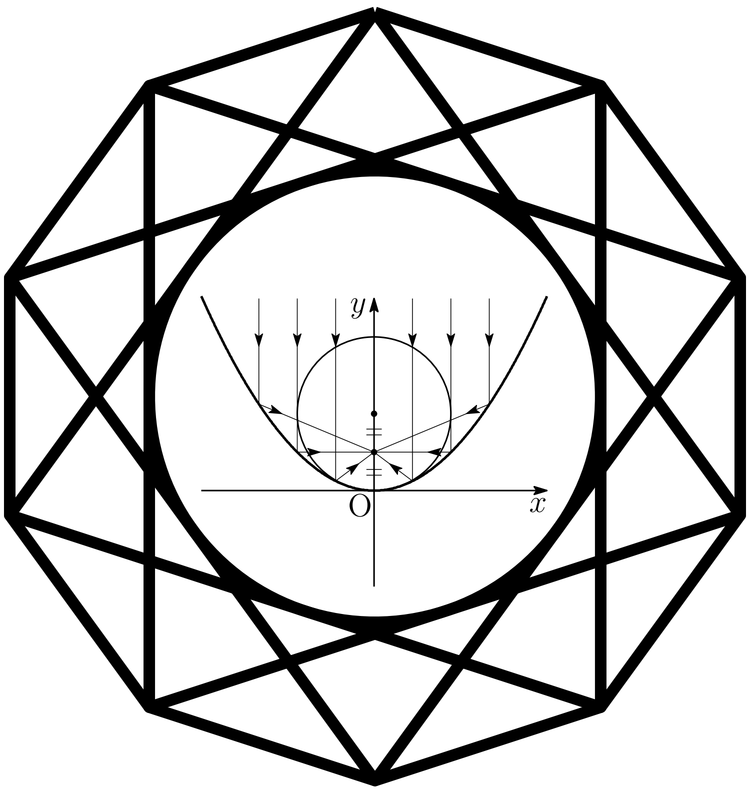
入試の軌跡

熊本大学　理系

2001 － 2014

数　学



2020 年 2 月 7 日

Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

序

本書は，熊本大学理系学部 (理，医保健 (放射線，検査)，薬，工学部) および医学部医学科受験者のための入試問題集である．本書には，平成 13 年 (2001 年) 度から平成 26 年 (2014 年) 度までの 2 次試験前期日程の問題をすべて掲載した．

第 1 章では，過去 14 年分の問題 (75 題) を分野別に掲載し，分野ごとに学習できるように配慮した．

第 2 章では，年度別に掲載しているので，120 分の制限時間で，どの問題から解くべきであるかなど各自が実践的な取り組みを心掛けてもらいたい．

また，年度ごとの問題および解答については，次のサイトに掲載している．

http://kumamoto.s12.xrea.com/plan/

本書の編集にあたり，以下の点に留意した．

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮した．

2. 本書は，電子文書 (PDF) での利用を想定し，ハイパーリンクを施した．利用する際には，全画面表示 ($\boxed{\text{Ctrl}}$+L) および描画領域に合わせる ($\boxed{\text{Ctrl}}$+3) と見やすくなる．ページスクロールには，($\boxed{\text{Ctrl}}$+▲，$\boxed{\text{Ctrl}}$+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る ($\boxed{\text{Alt}}$+◀)，進む ($\boxed{\text{Alt}}$+▶) も利用できる．なお，全画面表示を解除するには $\boxed{\text{ESC}}$．

3. 本書の最新版は，次のサイトにある．

   http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_kiseki_ri_i.pdf

また，本書の姉妹版である「入試の軌跡　熊本大学　英語」も次のサイトに掲載しており，併せて活用いただけることを切に願うものである．

http://kumamoto.s12.xrea.com/plan/eng.html

平成 26 年 3 月　編者

目 次

第 1 章　分野別問題

1.1　方程式と不等式 (数学I)

問題 1 以下の問いに答えよ。 (2012 理系) 解答 (p.69)

(1) k を整数とするとき，x の方程式 $x^2 - k^2 = 12$ が整数解をもつような k の値をすべて求めよ。

(2) x の方程式 $(2a-1)x^2 + (3a+2)x + a + 2 = 0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつような整数 a の値とそのときの整数解をすべて求めよ。

1.2　図形と方程式 (数学II)

問題 2 $a > 1$，$a > p > 0$ とする。2 直線 $l_1 : y = 2x - 1$，$l_2 : y = a$ の交点を S，l_1 と x 軸の交点を T とし，y 軸上の点 $\mathrm{P}(0,\ p)$，l_1 上の点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，l_2 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ a)$ をとる。$\angle\mathrm{PQS} = 135^\circ$，$\angle\mathrm{AQS} = 45^\circ$ であるとき，次の問いに答えよ。 (2002) 解答 (p.70)

(1) p，q それぞれを a で表せ。

(2) $\angle\mathrm{PAT} = \angle\mathrm{QAS}$ であるとき，p，a それぞれの値を求めよ。

問題 3 円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ と円 $C_2 : (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$ とに点 P から接線を引く。P から C_1 の接点までの距離と C_2 の接点までの距離との比が $1 : 2$ になるとする。このとき，P の軌跡を求めよ。 (2004) 解答 (p.71)

問題 4 xy 平面上で，点 $(1,\ 0)$ までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする。以下の問いに答えよ。 (2013 理系) 解答 (p.72)

(1) C で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) 円 $x^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}$ と C の交点の x 座標を求めよ。さらに，交点の個数を求めよ。

問題 5 xy 平面上で，点 $(1,\ 0)$ までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする。以下の問いに答えよ。 (2013 医) 解答 (p.74)

(1) C で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) a を正の数とする。円 $x^2 + y^2 = a$ と C の交点の個数が，a の値によってどのように変わるかを調べよ。

1.3　三角関数 (数学 II)

問題 6 正三角形PQRの3辺PQ，QR，RP上にそれぞれ点A，B，Cをとる。△PCA，△QAB，△RBCの外接円の中心をそれぞれO_1，O_2，O_3，その半径をそれぞれr_1，r_2，r_3とする。△ABCの3辺の長さを$a = \mathrm{BC}$，$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$とするとき，次の問いに答えよ。　(2003) $\boxed{\text{解答 (p.76)}}$

(1) r_1，r_2，r_3をa，b，cで表わせ。

(2) $\triangle \mathrm{O_1O_2O_3}$は正三角形であることを示せ。

問題 7 整数m，nが$1 \leqq m < n$を満たすとき，次の問いに答えよ。(2004) $\boxed{\text{解答 (p.77)}}$

(1) $x > 3$ならば，不等式

$$(mx-1)(nx-1) > x^2+1$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\tan\alpha = \dfrac{1}{m}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{n}$を満たし，かつ$\tan(\alpha+\beta)$の値が整数となる角度$\alpha$，$\beta$があるとする。このような，$(m,\ n)$の組をすべて求めよ。

問題 8 関数$y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 2\sin x - 2\sqrt{3}\cos x$について，以下の問いに答えよ。　(2010 理系) $\boxed{\text{解答 (p.79)}}$

(1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = t$とおいて，$y$を$t$の式で表せ。

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi$のとき，$y$の最大値および最小値を求めよ。

1.4　微分法と積分法 (数学 II)

問題 9 aを定数とする。2つの放物線

$$C_1 : y = -x^2, \qquad C_2 : y = 3(x-1)^2 + a$$

について，以下の問いに答えよ。　(2007) $\boxed{\text{解答 (p.80)}}$

(1) C_1，C_2の両方に接する直線が2本存在するためのaの条件を求めよ。

(2) C_1，C_2の両方に接する2本の直線が，直交するときのaの値を求めよ。

(3) C_1，C_2の両方に接する2本の直線が，$\dfrac{\pi}{4}$の角度で交わるときのaの値を求めよ。

問題 10 放物線 $y = 4x^2 + 3$ を C とする。x 軸上に点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ ($p \neq 0$ とする)，C 上に点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2 + 3)$ をとり，点 A における C の接線 l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ とする。さらに，点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2 + 3)$ における C の接線を m とする。以下の問いに答えよ。

(2008) 解答 (p.82)

(1) q を p を用いて表せ。

(2) 接線 m が点 P を通るとする。p，q の値を求めよ。

(3) (2) で求めた p，q に対して，放物線 C と 2 つの接線 l，m で囲まれた部分の面積を求めよ。

1.5　極限 (極限 III)

問題 11 座標平面上において，x 軸上の点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ と曲線 $C : y = \dfrac{1}{x^2}$ 上の点列 $\{\mathrm{Q}_n\}$ を次のように定める。$\mathrm{P}_1(a,\ 0)$ $(a > 0)$ とする。P_n $(n \geqq 1)$ が定まったとき，P_n を通り y 軸に平行な直線と C との交点を Q_n とする。Q_n における C の接線と x 軸との交点を P_{n+1} とする。次の問いに答えよ。

(2005) 解答 (p.83)

(1) $\mathrm{P}_n(a_n,\ 0)$ とするとき，a_n を a で表せ。

(2) 三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n$ の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を a で表せ。

問題 12 $0 < a < 3$ とする。次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \log(1 + a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を次の手順で求めよ。

(2009 理系) 解答 (p.84)

(1) $0 < x < 3$ のとき，$0 < \log(1 + x) < x - \dfrac{1}{6}x^2$ であることを示せ。必要があれば，$0.69 < \log 2 < 0.70$ を用いてもよい。

(2) $0 < a_n < \dfrac{6}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

問題 13 r を $r>1$ である実数とし，数列 $\{a_n\}$ を次で定める。

$$a_1=1, \qquad a_{n+1}=\frac{a_n+r^2}{a_n+1}$$

以下の問いに答えよ。 (2014 理系) 解答 (p.86)

(1) n が奇数のとき $a_n<r$，n が偶数のとき $a_n>r$ であることを示せ。

(2) 任意の自然数 n について，$a_{n+2}-r$ を a_n と r を用いて表せ。

(3) 任意の自然数 n について，次の不等式を示せ。

$$\frac{a_{2n+2}-r}{a_{2n}-r}<\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2$$

(4) $\lim_{n\to\infty}a_{2n}$ および $\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}$ を求めよ。

1.6 微分・積分 (数学 III)

問題 14 次の問いに答えよ。 (2001) 解答 (p.88)

(1) $x<0$ のとき，e^{-x} と x^2+1 の大小関係を調べよ。

(2) 2つの曲線 $y=xe^{-x}$，$y=x(x^2+1)$ と直線 $x=-1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

問題 15 楕円 $E:\dfrac{x^2}{8}+y^2=1$ について，次の問いに答えよ。 (2002) 解答 (p.90)

(1) E 上の点 $(a,\ b)$ における E の接線の x 切片と y 切片の和を a で表したものを $f(a)$ とするとき，$f(a)$ を求めよ。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(2) $f(a)$ が最小となる a の値を求めよ。

問題 16 $a>0$ とするとき，関数 $f(x)=x^2e^{-\frac{x}{a}}$ について，次の問いに答えよ。
(2002) 解答 (p.91)

(1) $x=c$ で $f(x)$ が極大値をとるとき，c を a で表せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$ を a で表せ。

問題 17 関数 $f(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{10-x^2}}$ について，次の問いに答えよ。(2003) 解答 (p.91)

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ。

(2) 関数 $g(x)$ を各区間 $k \leqq x \leqq k+1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$ において，

$$g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^k f(x-k)$$

と定義する。

$$a_n=\int_0^n g(x)\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

とするとき，数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

問題 18 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の関係式

$$f(x)=\int_0^x (g(t)+t\cos t)\,dt+\sin x, \quad g(x)=\sin x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f'(t)-\cos t)\,dt$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。(2003) 解答 (p.92)

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^\pi (f(x)-g(x))^2\,dx$ を求めよ。

問題 19 次の問いに答えよ。(2004) 解答 (p.93)

(1) 任意の自然数 n に対して，$x \geqq 0$ ならば，不等式

$$e^x > \frac{x^n}{n!}$$

が成り立つことを示せ。

(2) (1) の不等式を用いて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0$ であることを示せ。

(3) 曲線 $y=xe^{-x}$ の点 $(a,\ ae^{-a})$ における接線と法線が x 軸と交わる点を，それぞれ P と Q とおく。ただし $a>1$ とする。線分 PQ の長さを $l(a)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} l(a)$ を求めよ。

問題 20 楕円 $E : (x-1)^2 + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ について，次の問いに答えよ。ただし，b は正の定数とする。 (2004) 解答 (p.95)

(1) E を表す極方程式を $r = f(\theta)$ とするとき，$f(\theta)$ を求めよ。

(2) 点 P が E 上を動くとする。原点 O と P との距離 OP が点 $(2,\ 0)$ 以外で最大となるための b の条件を求めよ。

(3) b は (2) で求めた条件を満たすとし，OP が最大となる点における θ の値を θ_0 とおく。ただし $0 < \theta_0 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。このとき (1) で求めた $f(\theta)$ について，定積分

$$\int_0^{\theta_0} f(\theta)\,d\theta$$

の値を b の式で表せ。

問題 21 平面上の点の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とする。極方程式 $r = f(\theta)$ によって表される曲線 C について，次の問いに答えよ。 (2005) 解答 (p.97)

(1) 曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ について，$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2$ を $f(\theta)$，$f'(\theta)$ を用いて表せ。

(2) $f(\theta) = \sin^3\dfrac{\theta}{3}$ のとき，曲線 C の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ。

問題 22 n を自然数とする。次の問いに答えよ。 (2006) 解答 (p.98)

(1) $n \geqq 2$ のとき，関数 $f(x) = (1-x)^3x^n$ の極値を求めよ。

(2) 定積分 $a_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^3x^n\,dx$ を求めよ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ。

問題 23 関数 $f(x) = 1 + \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}dt \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ について，次の問いに答えよ。 (2006) 解答 (p.99)

(1) 関数 $u = e^{\tan t}$ を t で微分せよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 0$，$x = \dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を x 軸の周りに回転して得られる図形の体積を求めよ。

問題 24 行列 A の表す移動によって xy 平面上の点 $(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$ はそれぞれ $(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$ に移されるとする。以下の問いに答えよ。 (2007) 解答 (p.101)

(1) 行列 A を求めよ。

(2) 曲線 $y = e^x$ 上を点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ が動くとき，P がこの移動によって移る点の軌跡 C を求めよ。ただし，$-\infty < t < \infty$ とする。

(3) 曲線 D を $y = x + \log\left(e + \dfrac{1}{e} - x\right)$ とする。ただし，$x < e + \dfrac{1}{e}$ である。2 つの曲線 C と D で囲まれる領域の面積を求めよ。

問題 25 a を定数とする。方程式 $(\log x)^2 = ax\ (x > 0)$ について，以下の問いに答えよ。 (2007) 解答 (p.103)

(1) 解の個数を調べよ。必要なら，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x} = 0$ を用いよ。

(2) 解がちょうど 2 個のとき，これらの解を p^2，$q^2\ (0 < p < q)$ とおく。q の値を求めよ。また，p は $\dfrac{e}{e+1} < p < 1$ を満たすことを示せ。

問題 26 放物線 $C : y = \dfrac{1}{4}x^2$ および点 $\mathrm{F}(0,\ 1)$ について考える。以下の問いに答えよ。ただし，O は原点を表す。 (2008) 解答 (p.105)

(1) 放物線 C 上の点 $\mathrm{A}(x,\ y)$ ($x > 0$ とする) に対して $\theta = \angle\mathrm{OFA}$，$r = \mathrm{FA}$ とおく。r を θ を用いて表せ。

(2) 放物線 C 上に n 個の点 $\mathrm{A}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{A}_2(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，$\mathrm{A}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$x_k > 0 \quad \text{かつ} \quad \angle\mathrm{OFA}_k = \frac{k\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

を満たすようにとる。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{FA}_k$ を求めよ。

問題 27 実数 p に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_{p-x}^{p}(t^6 + 2t^3 - 3)dt$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。 (2009 理系) 解答 (p.106)

(1) $f'(x)$ は，$x = p + 1$ のとき最小値をとることを示せ。

(2) $f(p+1)$ の $p > 0$ における最小値を求めよ。

問題 28 次の問いに答えよ。 (2009 理系・医) 解答 (p.107)

(1) $-\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sqrt{3}\cos x - \sin x > 0$ をみたす x の範囲を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx$ を求めよ。

問題 29 関数 $f(x) = x\,2^{-x}$ の区間 $t \leqq x \leqq t+1$ における最小値を $g(t)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。 (2010 理系) 解答 (p.110)

(1) $g(t)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^2 g(t)\,dt$ の値を求めよ。

問題 30 関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1+\tan t)\,dt \ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{8}\right)$ について，以下の問いに答えよ。 (2010 理系) 解答 (p.111)

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ および $f(0)$ の値を求めよ。

(3) 条件 $a_1 = f(0)$，$a_{n+1} = f(a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

問題 31 関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1+\tan t)\,dt \ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{8}\right)$ について，以下の問いに答えよ。 (2010 医) 解答 (p.112)

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(0)$ の値を求めよ。

(3) 条件 $a_1 = f(0)$，$a_{n+1} = f(a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

問題 32 以下の問いに答えよ。 (2010 医) 解答 (p.113)

(1) p を 0 でない定数とする。関数 $f(x) = ae^{-x}\sin px + be^{-x}\cos px$ について，$f'(x) = e^{-x}\sin px$ となるように，定数 a，b を定めよ。

(2) $S(t) = \displaystyle\int_0^{t^2} e^{-x}\sin\frac{x}{t}\,dx$ $(t \neq 0)$ とおく。このとき，$S(t)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3}$ の値を求めよ。

問題 33 次の条件によって定められる関数の列 $f_n(x)$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ を考える。

$$f_0(x)=1$$
$$f_n(x)=1-\int_0^x t\,f_{n-1}(t)\,dt \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ。 (2011 理系) 解答 (p.115)

(1) $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 1$ のとき，$f_n(x)-f_{n-1}(x)$ は x についての次数が $2n$ の単項式となることを示し，その単項式を求めよ。

(3) $n \geqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{1}{2} \leqq f_n(1) \leqq \frac{5}{8}$$

が成り立つことを示せ。

問題 34 楕円 $C: x^2+4y^2=1$ と点 P(2, 0) を考える。以下の問いに答えよ。 (2011 理系) 解答 (p.117)

(1) 直線 $y=x+b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(2) (1) における 2 つの交点を A，B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。

問題 35 楕円 $C: x^2+4y^2=4$ と点 P(2, 0) を考える。以下の問いに答えよ。 (2011 医) 解答 (p.118)

(1) 直線 $y=x+b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(2) (1) における 2 つの交点を A，B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。

問題 36 xyz 空間内の 3 点 P(0, 0, 1)，Q(0, 0, −1)，R(t, t^2-t+1, 0) を考える。t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。 (2011 医) 解答 (p.119)

(1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2) K の体積を求めよ。

問題 37 2 つの関数 $f(x) = \int_0^x e^t(\sin t + \cos t)dt$ と $g(x) = \int_0^x e^t(\cos t - \sin t)dt$ について，以下の問いに答えよ。 (2012 理系) 解答 (p.120)

問 1 $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

問 2 $f^{(n)}(x)$ と $g^{(n)}(x)$ をそれぞれ $f(x)$ と $g(x)$ の第 n 次導関数とする。

(1) $n \geqq 2$ のとき，$f^{(n)}(x)$ および $g^{(n)}(x)$ を，$f^{(n-1)}(x)$ と $g^{(n-1)}(x)$ を用いて表せ。

(2) $\{f^{(n)}(x)\}^2 + \{g^{(n)}(x)\}^2$ を求めよ。

(3) 実数 a について，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2a}}{\{f^{(n)}(a)\}^2 + \{g^{(n)}(a)\}^2}$ の和を求めよ。

問題 38 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin t - x\cos t\right| dt \qquad (x > 0)$$

とおく。以下の問いに答えよ。 (2012 理系) 解答 (p.122)

(1) $a > 0$ のとき，$a = \tan\theta$ を満たす $\theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，$\cos\theta$ を a を用いて表せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

問題 39 正の定数 a に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin t - ax\cos t\right| dt$$

とおく。以下の問いに答えよ。 (2012 医) 解答 (p.124)

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

問題 40 半径 1，中心角 θ $(0 < \theta < \pi)$ の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく。以下の問いに答えよ。 (2013 理系・医) 解答 (p.126)

(1) $f(\theta)$ を求めよ。

(2) $0 < \theta < \pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ。

(3) 定積分

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta$$

を求めよ。

問題 41 a を正の定数とする。条件

$$\cos\theta - \sin\theta = a\sin\theta\cos\theta, \qquad 0 < \theta < \pi$$

を満たす θ について，以下の問いに答えよ。 (2014 理系・医) 解答 (p.127)

(1) 条件を満たす θ は，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，ただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 条件を満たす θ の個数を求めよ。

問題 42 以下の問いに答えよ。 (2014 医) 解答 (p.128)

(1) 正の実数 a，b，c について，不等式

$$\frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} < \log 4$$

が成立することを示せ。ただし，log は自然対数とし，必要なら $e > 2.7$ および $\log 2 > 0.6$ を用いてもよい。

(2) 自然数 a，b，c，d の組で

$$a^{bc}b^{ca}c^{ab} = d^{abc}, \qquad a \leqq b \leqq c, \qquad d \geqq 3$$

を満たすものすべて求めよ。

問題 43 a を正の実数とする。xy 平面上の曲線 $C : y = e^{ax}$ の接線で，原点を通るものを l とし，C と l および y 軸で囲まれた領域を S とする。以下の問いに答えよ。 (2014 理系) 解答 (p.129)

(1) S を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V_1 を求めよ。

(2) S を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V_2 を求めよ。

(3) $V_1 = V_2$ となるときの a の値を求めよ。

問題 44 a を $a > 2$ である実数とする。xy 平面上の曲線 $C : y = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y = a$ の交点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ $(\alpha < \beta)$ とする。以下の問いに答えよ。

(2014 医) 解答 (p.130)

(1) $\tan\alpha$ および $\tan\beta$ を a を用いて表せ。

(2) C と x 軸，および 2 直線 $x = \alpha$，$x = \beta$ で囲まれた領域を S とする。S の面積を a を用いて表せ。

(3) S を x 軸の回りに回転して得られる立体の体積 V を a を用いて表せ。

1.7 場合の数と確率 (数学 A)

問題 45 袋の中に 1 から 5 までのいずれかの数字を書いた同じ形の札が 15 枚入っていて，それらは 1 の札が 1 枚，2 の札が 2 枚，3 の札が 3 枚，4 の札が 4 枚，5 の札が 5 枚からなる。袋の中からこれらの札のうち 3 枚を同時にとり出すとき，札に書かれている数の和を S とする。このとき次の問いに答えよ。 (2001) 解答 (p.131)

(1) S が 2 の倍数である確率を求めよ。

(2) S が 3 の倍数である確率を求めよ。

問題 46 さいころを繰り返し投げて，n 回目に出た目の数を X_n とし，$a_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ とする。このとき，各 n について，$a_n \leqq 9$ となる確率を求めよ。(2002) 解答 (p.132)

問題 47 袋の中に 1 から 3 までの数を書いた札が 2 枚ずつ，計 6 枚入っている。この中から同時に 2 枚の札を取り出し，その数を m，n とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$m \geqq n$ とする。 (2003) 解答 (p.133)

(1) $m = n$ となる確率を求めよ。

(2) 直線 $y = x + c$ と点 $(m,\ n)$ との距離の 2 乗を S とする。S の期待値を求めよ。

(3) S の期待値が最小になる c の値を求めよ。

問題 48 ボタンを 1 回押すごとに，画面に 1，2，3，4 のいずれかの数を表示する機械がある。この機械が数 X を表示する確率は次のとおりである。

X	1	2	3	4
確率	$2a$	b	b	a

次の問いに答えよ。 (2005) 解答 (p.134)

(1) b を a で表せ。

(2) ボタンを 2 回押したときに表示される数のうち小さくないほうの数を Z とするとき，Z の期待値 m を a で表せ。

(3) m を最大にする a の値を求めよ。

問題 49 大小 2 つのサイコロを投げて，大きいサイコロの目の数を a，小さいサイコロの目の数を b とする。次の問いに答えよ。 (2006) 解答 (p.135)

(1) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ の最小値が -5 より小さくなる確率を求めよ。

(2) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと x 軸との交点で，x 座標の大きい方を選ぶ。その x 座標が 1 より大きくなる確率を求めよ。

(3) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと関数 $y = bx^2$ のグラフが異なる 2 点で交わる確率を求めよ。

問題 50 xy 平面上で，点 P は原点を出発点とし，さいころを 1 回投げるたびに以下のように進むものとする。1 または 2 の目が出たときは x 軸方向に 1 だけ進み，3 の目が出たときは x 軸方向に -1 だけ進み，4 または 5 の目が出たときは y 軸方向に 1 だけ進み，6 の目が出たときは y 軸方向に -1 だけ進む。以下の問いに答えよ。
(2007) 解答 (p.136)

(1) さいころを 5 回投げるとき，点 P が座標 $(2, -3)$ の位置にいる確率を求めよ。

(2) さいころを n 回投げるとき，点 P が x 軸上のみを動いて最後に原点にいる確率を求めよ。

(3) さいころを 2 回投げるとき，点 P の x 座標の期待値を求めよ。

問題 51 大小 2 個のサイコロを投げ，大きいサイコロの目の数を p，小さいサイコロの目の数を q とする。$y = px^2$ のグラフと $y = qx + 1$ のグラフの交点のうち，x 座標が負のものを A，正のものを B とする。このとき，次の問いに答えよ。
(2009 理系・医) 解答 (p.137)

(1) 線分 AB の中点の y 座標が 2 より小さくなる確率を求めよ。

(2) A の x 座標が有理数となる確率を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{OAB}$ が 90° より大きくなる確率を求めよ。ただし，O は座標平面の原点である。

問題 52 赤球 4 個と白球 6 個の入った袋から 2 個の球を同時に取り出し，その中に赤球が含まれていたら，その個数だけさらに袋から球を取り出す。このとき，以下の問いに答えよ。 (2010 医) 解答 (p.139)

(1) 取り出した赤球の総数が 2 である確率を求めよ。

(2) 取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ。

問題 53 1個のさいころを2回続けて投げるとき，1回目に出る目の数を a，2回目に出る目の数を b とする。これらの a，b に対して，実数を要素とする集合 P，Q を次のように定める。

$$P = \{x \mid x^2 + ax + b > 0\}$$
$$Q = \{x \mid 5x + a \geqq 0\}$$

このとき，以下の問いに答えよ。　(2011 理系) 解答 (p.140)

(1) P が実数全体の集合となる確率を求めよ。

(2) $Q \subset P$ となる確率を求めよ。

問題 54 x，y を整数とするとき，以下の問いに答えよ。　(2011 医) 解答 (p.142)

(1) $x^5 - x$ は30の倍数であることを示せ。

(2) $x^5y - xy^5$ は30の倍数であることを示せ。

問題 55 $n \geqq 4$ とする。$(n-4)$ 個の1と4個の -1 からなる数列 a_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ を考える。以下の問いに答えよ。　(2012 医) 解答 (p.143)

(1) このような数列 $\{a_k\}$ は何通りあるか求めよ。

(2) 数列 $\{a_k\}$ の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1a_2\cdots a_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ とおく。$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。

(3) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ の最大値および最小値を与える数列 $\{a_k\}$ はそれぞれ何通りあるか求めよ。

問題 56 X，Y は $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ の空でない部分集合で，$X \cap Y$ は空集合とする。また，n を自然数とする。A君，B君が以下のルールで対戦する。

(i) 1回目の対戦では，まずA君がさいころを投げて，出た目が X に属するならばA君の勝ちとする。出た目が X に属さなければB君がさいころを投げて，出た目が Y に属するならばB君の勝ちとする。

(ii) 1回目の対戦で勝負がつかなかった場合は，1回目と同じ方法で2回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける。ただし，n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする。

以下の問いに答えよ。　(2013 医) 解答 (p.144)

(1) さいころを投げたとき，X，Y に属する目が出る確率をそれぞれ p，q とする。A君が勝つ確率を求めよ。

(2) A君が勝つ確率が，B君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組 $(X,\ Y)$ は何通りあるか。

1.8　平面上のベクトル (数学 B)

問題 57 座標平面上の点 $\mathrm{P}_n(n,\ 1)$，$n=1,2,\cdots$ に対して，点 P_1 から原点 O と点 P_n $(n \geqq 2)$ を通る直線へ下ろした垂線を $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_n$ とし，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ のなす角を θ_n とする。このとき，次の問いに答えよ。 (2001) 解答 (p.145)

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ の成分を求めよ。

(2) $\cos\theta_n$ を求めよ。

(3) $\tan\theta_n < 1.01$ をみたす最小の n の値を求めよ。

問題 58 曲線 $C: x^2+y^2=1$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ 上に 3 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1)$ をとり，$\angle\mathrm{POR}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ となる C 上の点を $\mathrm{R}(s,\ t)$ とする。さらに，C 上の点 X を 2 つのベクトル $s\overrightarrow{\mathrm{OA}}-t\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $t\overrightarrow{\mathrm{OA}}-s\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ が垂直になるようにとる。このとき，以下の問いに答えよ。 (2010 理系) 解答 (p.146)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ の内積の値を θ を用いて表せ。

(2) 条件をみたす X が弧 AP 上にとれるとき，θ の範囲を求めよ。

(3) (2) で求めた θ の範囲において，$\triangle\mathrm{ROX}$ の面積の最大値を求めよ。

1.9　空間のベクトル (数学 B)

問題 59 座標空間内に 4 点 $\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 1)$，$\mathrm{C}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{D}(3,\ 2,\ 0)$ を考え，線分 CD 上の点 $\mathrm{P}(x,\ 2,\ 0)$ に対して，三角形 PAB の面積を S とするとき，次の問いに答えよ。 (2005) 解答 (p.148)

(1) $\angle\mathrm{APB}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ を x で表せ。

(2) S の最小値を求めよ。

問題 60 原点を O とする座標空間の 4 点 $\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 3,\ 0)$，$\mathrm{B}(-\sqrt{3},\ 3,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 2,\ 2)$，$\mathrm{P}(0,\ 1,\ 0)$ および，平面 OAC，OBC，ABC 上にそれぞれ点 Q，R，S をとる。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ が平面 OAC，OBC，ABC にそれぞれ直交するとき，次の問いに答えよ。 (2006) 解答 (p.149)

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を成分で表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ を成分で表せ。

(3) $\triangle\mathrm{QRS}$ の面積を求めよ。

問題 61 原点をOとし，空間内に3点A(4, 0, 0)，B(1, 2, 0)，C(2, 1, 2)をとる。線分BCを$t:(1-t)$ $(0<t<1)$に内分する点をPとおく．このとき，以下の問いに答えよ。　(2010 医) 解答 (p.152)

(1) △OAPの面積を最小にするtの値を求めよ。

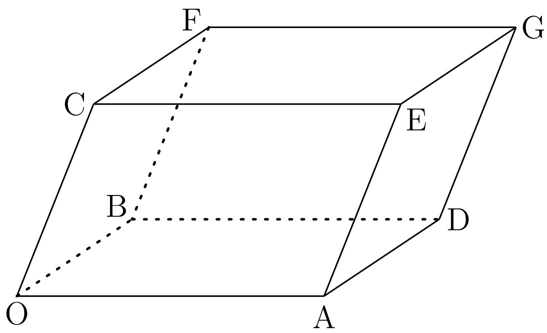
(2) Cを通り，3点O，A，Pを通る平面に垂直な直線とxy平面との交点をDとする。Dが△OABの内部にあるとき，tの範囲を求めよ。

問題 62 平行六面体OADB-CEGFにおいて，辺OAの中点をM，辺ADを2 : 3に内分する点をN，辺DGを1 : 2に内分する点をLとする。また，辺OCを$k:1-k$ $(0<k<1)$に内分する点をKとする。このとき，以下の問いに答えよ。
(2011 理系・医) 解答 (p.154)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2) 3点M，N，Kの定める平面上に点Lがあるとき，kの値を求めよ。

(3) 3点M，N，Kの定める平面が辺GFと交点をもつようなkの値の範囲を求めよ。



問題 63 一辺の長さが$\sqrt{2}$の正四面体OABCにおいて，辺ABの中点をM，辺BCを1 : 2に内分する点をN，辺OCの中点をLとする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおく。以下の問いに答えよ。　(2012 医) 解答 (p.155)

(1) 3点L，M，Nを通る平面と直線OAの交点をDとする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2) 辺OBの中点Kから直線DN上の点Pへ垂線KPを引く。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

問題 64 O を原点とする空間内の 2 点 A$(-1,\ 1,\ 1)$，B$(2,\ 1, -2)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。 (2013 理系) 解答 (p.156)

(1) 実数 k に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき，k の値の範囲を求めよ。

(2) $1 \leqq s+t \leqq 2$ を満たす実数 s，t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 R からなる領域を E とする。このとき，領域 D と E の共通部分の面積を求めよ。

問題 65 O を原点とする空間内の 2 点 A$(-1,\ 1,\ 1)$，B$(2,\ 1, -2)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。 (2013 医) 解答 (p.159)

(1) 実数 k に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき，k の値の範囲を求めよ。

(2) 点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ が最小となる C の座標を求めよ。

問題 66 空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。また，点 D を $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{b} - \vec{a}$ を満たす点，点 E を $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \vec{c} - \vec{a}$ を満たす点とし，点 P を OA の中点とする。以下の問いに答えよ。(2014 理系) 解答 (p.162)

(1) $0 < t < 1$ に対し，BD を $t : (1-t)$ に内分する点を R とし，CE を $(1-t) : t$ に内分する点を S とする．また，OB と PR の交点を M とし，OC と PS の交点を N とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\triangle$OMN の面積を t を用いて表せ。

(3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，$\triangle$OMN の面積の最小値を求めよ。

問題 67 空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$．$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とし，OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。(2014 医) 解答 (p.163)

(1) $0 < t < 1$ に対し，BC を $t : (1-t)$ に内分する点を Q とする。また，PM + MQ が最小となる OB 上の点を M とし，PN + NQ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\triangle$QMN の面積を t を用いて表せ。

(3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，$\triangle$QMN の最大値を求めよ。

1.10　数列 (数学 B)

問題 68　a を整数とする。$x_n = n^3 - an^2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められている数列 $\{x_n\}$ が

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_{14} > x_{15}, \quad x_{15} < x_{16} < x_{17} < \cdots$$

をみたすとき，a を求めよ。　(2001) 解答 (p.166)

問題 69　数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 0,\ a_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

によって定められている。以下の問いに答えよ。　(2008) 解答 (p.168)

(1) $b_n = n + a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を示せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が等比数列であることを示せ。

(3) a_n を求めよ。

(4) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

問題 70 $p>0$ とする。各項が正である 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，次の条件をみたすものとする。

$$\begin{cases} a_1=3,\ b_1=1 \\ a_n-a_{n-1}=b_n-b_{n-1}+1 \qquad (n=2,3,4,\cdots) \\ (a_{n-1}+b_n)(b_n-b_{n-1})=2pn+3-b_n \qquad (n=2,3,4,\cdots) \end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ。　(2009 医) 解答 (p.169)

(1) a_n-b_n を求めよ。

(2) a_nb_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^3+{b_n}^3}{{a_n}^3-{b_n}^3}$ の値を $f(p)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{p\to 0}\frac{1}{p}\log f(p)$ を求めよ。

問題 71 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n=2a_n+n^2$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ。　(2013 理系) 解答 (p.171)

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2) a_n を n の式で表せ。

1.11　行列 (数学 C)

問題 72 直線 $y=2x+1$ を l とする。また，行列 $\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ を A とする。直線 l 上の各点は A が表す移動によって l 上の点に移るとする。以下の問いに答えよ。
(2008) 解答 (p.172)

(1) b の値を求め，c を a を用いて表せ。

(2) $a\neq-\dfrac{1}{2}$ ならば，直線 l 上の点 P で，A が表す移動によって P 自身に移るものが存在することを示せ。

(3) 直線 l 上の各点 Q は A が表す移動によって Q と異なる l 上の点に移るとする。a，c の値を求めよ。

問題 73 実数 t に対して，座標平面上の点 $(0,\ 1)$ と $(1,\ t)$ を通る直線を ℓ とし，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で表される移動により，直線 ℓ 上の各点は，ある直線 m 上の点に移るとする。ℓ と m の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とするとき，次の問いに答えよ。(2009 医) 解答 (p.175)

(1) x，y を t の式で表せ。

(2) t がすべての実数を動くとき，P はある円周上を動くことを示せ。

問題 74 実数 c に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換を T とするとき，以下の問いに答えよ。(2012 理系) 解答 (p.177)

(1) T は原点の回りの回転移動と原点中心の拡大 (相似変換) との合成変換であることを示せ。

(2) xy 平面上の同一直線上にない 3 点 P，Q，R が T によってそれぞれ P′，Q′，R′ に移るとする。三角形 P′Q′R′ の面積が三角形 PQR の面積の 2 倍となる c の値を求めよ。

(3) $c = 2$ とする。楕円

$$E : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

上の点が T によって楕円 E' 上の点に移るとする。E が E' の内部にあることを示し，E' の内部にあり E の外部にある部分の面積を求めよ。

問題 75 実数 c に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換を T とするとき，以下の問いに答えよ。(2012 医) 解答 (p.178)

(1) xy 平面上の同一直線上にない 3 点 P，Q，R が T によってそれぞれ P′，Q′，R′ に移るとする。三角形 P′Q′R′ の面積が三角形 PQR の面積の k 倍 $(k \geqq 1)$ となる c の値を求めよ。

(2) 楕円

$$E : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

上の点が T によって楕円 E' 上の点に移るとする。楕円 E' 上のすべての点が楕円 E の周上または外部にあるための，c の条件を求めよ。

第 2 章　年度別問題

2008 年度までの一般前期試験において，数学の問題は文系・理系の 2 種類の試験問題であった．また理系 (医学科を含む) の問題 4 題中 1 題または 2 題が文系との共通問題であった．

2001	理系 2 は文系 3 に同じ
2002	理系 1 は文系 2，理系 2 は文系 3 に同じ
2003	理系 1 は文系 1 に同じ
2004	理系 1 は文系 1，理系 2 は文系 2 に同じ
2005	理系 1 は文系 3，理系 2 は文系 4 に同じ
2006	理系 1 は文系 1 に同じ
2007	理系 1(1)(2) は文系 3 に同じ
2008	理系 1 は文系 3，理系 2 は文系 4 に同じ

2009 年度以降，医学部医学科は独自問題となり，一般前期の数学の試験問題は，文系 (保健学科を含む)，理系 (医学科を除く)，医学科の 3 種類となる．これ以降，医学科の問題はやや難化したが，極端に難しい出題はないため，医学科においては理系よりも高い得点での選抜には変わりはなさそうである．

2009	医 3 は理系 3，医 4 は理系 4 に同じ
2010	医 4(1)(3) は理系 3(1)(3) に同じ
2011	医 2 は理系 2 に同じ，医 3 は理系 4 の難易度を高めたもの
2012	医 2 は理系 2，医 3 は理系 4 の難易度を高めたもの
2013	医 3 は理系 3 に同じ，医 2,4 はそれぞれ理系 2,4 の難易度を高めたもの
2014	医 2 は理系 2 に同じ，医 1 は理系 1 の難易度を高めたもの

理系と文系の共通問題は，2009 年度以降少なくなり，理系の問題は標準的な難易度の出題が中心となる．

2009	理系と文系の共通問題なし
2010	理系と文系の共通問題なし
2011	理系 2(1)(2) は文系 4 に同じ
2012	理系 1 は文系 1 に同じ
2013	理系 1 は文系 4 に同じ
2013	理系 1 は文系 1 に同じ

理系 (理，医保健 (放射線，検査)，薬，工学部)

理系 (2009 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 III	微分・積分	関数の最小値
2	数学 III	極限	数列の極限
3	数学 A	確率	さいころの目とグラフの交点
4	数学 III	微分・積分	定積分の計算

1 (1) $g(t)$ の原始関数を $G(t)$ とおくと，$f(x) = G(p) - G(p - x)$．合成関数の微分律の計算がポイント．

(2) $f(p+1) = G(p) - G(-1)$ であるから，$f(p+1)$ が最小となるのは，$G(p)$ が最小となるときである．

2 (1) $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{6}x^2\right) - \log(1+x)$ とおいて，関数の増減を調べる．

(2) 数学的帰納法により，$0 < a_n < \dfrac{6}{n+1}$ を示す．このとき，(1) の結果を用いる．a_n の極限はこの不等式から，はさみうちの原理により求める．

3 医学科と共通問題

(1) A，B の座標をそれぞれ $(\alpha,\ q\alpha+1)$，$(\beta,\ q\beta+1)$ とすると，AB の中点の y 座標は $q \times \dfrac{\alpha+\beta}{2} + 1$ である．また α，β は 2 次方程式 $px^2 - qx - 1 = 0$ の解であるから，解と係数の関係を利用する．

(2) 2 次方程式 $px^2 - qx - 1 = 0$ の判別式 $q^2 + 4p$ が平方数である．

(3) 直線 AO および直線 AB の方向ベクトルを利用する．

4 医学科と共通問題

(1) 三角関数の合成を利用する．

(2) 被積分関数の符号により区間に分けて積分する．

理系 (2010 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 II	三角関数	最大値・最小値
2	数学 B	平面上のベクトル	円周上の点の位置ベクトルと内積
3	数学 III	微分・積分	関数の最小値，定積分
4	数学 III	微分・積分	微分法と数列への応用

1
(1) 定型の基本問題.

(2) y は t の 2 次関数であるから，その最大値・最小値を求めればよい.

2
(1) $s=\cos\theta$，$t=\sin\theta$ であることに注意する.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ のなす角を α とすると，その内積 $\cos\alpha$ が (1) の結果の $\sin 2\theta$ に等しい.

(3) $\triangle$ROX の面積が $\dfrac{1}{2}\sin\angle\mathrm{ROX}$ であることから，その最小値を求める.

3
(1) $f(t)$ の増減を調べ，さらに $f(t)=f(t+1)$ をみたす t の値 1 に注意して $g(t)$ を求める.

(2) (1) の結果により，区間に分けて積分する.

4 医学科と大半が共通問題

(1) $f'(x)=-\dfrac{1}{2}$ を導けるかが本題のポイント.

(2) $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=0$ は，自明である．(1) の結果から，$f(x)$ は x の 1 次関数であることから，$f(0)$ は容易に求められる.

(3) (2) の結果から，$a_1=\dfrac{\pi}{16}$，$a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{\pi}{16}$ であるから，a_n は容易に求められる.

理系 (2011 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 A	確率	さいころの目と不等式の解
2	数学 B	空間のベクトル	ベクトルの図形への応用
3	数学 III	微分・積分	関数列
4	数学 III	微分・積分	関数の最大・最小

1 (1) 不等式の係数をさいころの目とする確率の基本題．これまでにさいころを用いた問題が出題されている (06,07,09)．

(2) 数直線上に P，Q の表す範囲をとり，$Q \subset P$ となる条件を考えるとよい．

2 医学科と共通問題

(1) 基本題

(2) 3 点 M，N，K を通る平面を α とする．α を 1 次独立なベクトル $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ を用いて媒介変数表示をする．これと L の位置ベクトルが $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて一意的に表されることにより k を求める．

(3) 辺 GF を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いた媒介変数表示をして (2) と同様に求める．

3 (1) 漸化式により順次求める．

(2) (1) の結果から，$f_n(x) - f_{n-1}(x)$ を推測し，数学的帰納法により証明する．

(3) (1)，(2) の結果を利用する．

4 医学科の類題

(1) 基本題

(2) 考え方は難しくないが，計算力が要求される問題である．

理系 (2012 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 I	方程式と不等式	2 次方程式の整数解
2	数学 C	行列	1 次変換
3	数学 III	微分・積分	n 次導関数
4	数学 III	微分・積分	定積分を用いた関数

1 (1) 偶奇性および $x^2 - k^2 = |x|^2 - |k|^2$ と変形することがポイント．

(2) 有理数を解に持つから，2 次方程式の判別式 $a^2 + 12$ が整数かつ平方数となることに注目する．このとき，整数 l を用いて，$a^2 + 12 = l^2$ とおくと，$l^2 - a^2 = 12$ となり，(1) の結果が利用できる．

2 医学科の類題

(1) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}$，$\sin\theta = \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ とおくとよい．

(2) 正方行列 A，B について，$\det(AB) = \det A \det B$ であることを利用する．

(3) 楕円の中心から楕円上の点の距離は長軸上で最大となり，短軸上で最小となる．

3 問 1 $(e^x \sin t)' = e^x(\sin x + \cos x)$，$(e^x \cos x)' = e^x(\cos x - \sin x)$ がポイント．

問 2 (1) $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$，$g'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$ となり，これと問 1 の結果の式から，$e^x \sin x$，$e^x \cos x$ を消去する．

(2) 問 2(1) の結果を利用する．

(3) 問 2(2) の結果を利用する．

4 医学科の類題

(1) 基本題

(2) $x > 0$ に対して，$\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を満たす θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ をとると，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ であり，$\sin t - x\cos t = \sqrt{1+x^2}\sin(t-\theta)$ を利用する．

(3) (2) で得られた関数の増減を調べる．

理系 (2013 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 B	数列	漸化式
2	数学 B	空間のベクトル	位置ベクトルの表す領域
3	数学 III	微分・積分	関数の増減，定積分
4	数学 II	図形と方程式	軌跡，面積，共有点の個数

1　(1) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用する．

(2) (1) で得られた漸化式 $a_{n+1} = 2a_n - 2n - 1$ に対して，$-2n-1$ が n の 1 次式であるから，n の 1 次式 $f(n)$ を用いた補助方程式 $f(n+1) = 2f(n) - 2n - 1$ を利用する．

2　医学科の類題

(1) Q は D 上の点より，条件より次式が成立する．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \geqq 0 \quad かつ \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \geqq 0$$

すなわち　$6k - 3 \geqq 0$　かつ　$-12k + 9 \geqq 0$

(2) D に含まれる直線 AB 上の点 Q により，D 上の点 P が $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mu\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ $(\mu \geqq 0)$ となることが予想できる．しかし，(1) の結果を利用して証明するには，平面 OAB 上の点を P とし，直線 OP と直線 AB の交点の有無により場合分けを行う必要がある．

(i) 直線 OP と直線 AB の交点を R とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mu\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ $(\mu \neq 0)$．P が D 上の点であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ であるから

$$\mu\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}} \geqq 0 \quad かつ \quad \mu\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}} \geqq 0$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k'\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1 - k')\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると (k' は実数)

$$\mu(6k' - 3) \geqq 0 \quad かつ \quad \mu(-12k' + 9) \geqq 0$$

上式および (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mu\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ $(\mu > 0)$
($\mu < 0$ のとき，上式をみたす k' は存在しない．)

(ii) 直線 OP と直線 AB の交点がないとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mu'\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (μ'は実数) とおくと，P が D 上の点であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ から $\mu' = 0$ を得る．

よって，D は $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mu\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ $(\mu \geqq 0)$ をみたす点 P からなる領域である．

3 医学科と共通問題

(1) 基本題

(2) (1) の結果 $f(\theta) = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}} = 1 - \dfrac{1}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$ を微分すると，次式を得る．

$$f'(\theta) = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}, \quad f''(\theta) = \frac{\sin\frac{\theta}{2}-2}{4\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

よって　$0<\theta<\pi$ の範囲で，$f'(\theta)>0$，$f''(\theta)<0$．

(3) $x = \dfrac{\theta}{2}$ とおいて計算する．

4 医学科の類題

(1) 条件による原方程式

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+|x| = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2-|x| \quad \cdots ①$$

を平方して得られた軌跡の方程式は $y^2 = 2x-4|x|+3 \cdots ②$ であるが，$2-|x| \geqq 0$ をみたす ② の x の値の範囲にあるものだけに制限しなければならない．実際，$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = |x|-2 \cdots ①'$ も平方することにより，② が得られるが，② の x の範囲 $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ は $|x|-2 \geqq 0$ をみたさないので，①$'$ の表す図形は ϕ である．

たとえば，$y=\sqrt{x}$ は，$x=y^2 \ \ (y \geqq 0)$ のように y の範囲に注意する．

(2) 2 つの関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の個数は，方程式 $f(x)=g(x)$ の実数解の個数に一致するが，本題では，ともに x 軸に関して対称な円と閉曲線 C の共有点の個数を問う問題である．円と C の方程式から y を消去した x の方程式を考えると，この方程式の実数解について，$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$ にある解 1 個に対して交点は 2 個あり，$x=-\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$ に対して交点は 1 個である．

理系 (2014 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 B	空間のベクトル	ベクトルの図形への応用
2	数学 III	微分・積分	方程式の解の個数
3	数学 III	極限	n 数列の極限
4	数学 III	微分・積分	回転体の体積

1 医学科の類題

(1) 相似な三角形に気付くかがポイント.

(2) (1) の結果から容易に求められる.

(3) 分子は定数であるから，分母の 2 次式だけに注意すればよい.

2 医学科と共通問題

(1) a を θ の関数とみると，a は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で単調減少.

(2) $a = f(\theta)$ と $y = a$ の共有点の個数を考える

3 (1) $a_n - r$ と $a_n + r$ から $\dfrac{a_n - r}{a_n + r}$ が求まる.

(2) 漸化式を適用する.

(3) (2) の結果を利用する.

(4) (3) の結果とはさみうちの原理を利用する．また，(1) の結果から，一般項を求めて直接，極限値を求めることもできる.

4 医学科の類題

(1) 基本題

(2) 定石通りの計算.

(3) バームクーヘン型の求積法も有効.

理系 (2001-2005) 出題分野

		01	02	03	04	05
I	方程式と不等式					
	2 次関数					
	図形と計量					
II	式と証明					
	複素数と方程式					
	図形と方程式		2		1	
	三角関数			2	2	
	指数関数と対数関数					
	微分法と積分法					
III	関数					
	極限					3
	微分・積分	1	3 4	3 4	3 4	4
A	場合の数と確率	4	1	1		2
	論理と集合					
	平面図形					
B	平面上のベクトル	2				
	空間のベクトル					1
	数列	3				
	複素数平面					
C	行列					
	2 次曲線					

理系 (2006-2014) 出題分野

		06	07	08	09	10	11	12	13	14
I	方程式と不等式							1		
	2 次関数									
	図形と計量									
II	式と証明									
	複素数と方程式									
	図形と方程式								4	
	三角関数					1				
	指数関数と対数関数									
	微分法と積分法		1	1						
III	関数									
	極限				2					3
	微分・積分	3 4	3 4	4	1 4	3 4	3 4	3 4	3	2 4
A	場合の数と確率	1	2		3		1			
	論理と集合									
	平面図形									
B	平面上のベクトル					2	1			
	空間のベクトル	2							2	1
	数列			2					1	
C	行列			3				2		
	2 次曲線									

1〜4 は問題番号

数学 III の『微分・積分』の分野からは常に出題されており，2 題出題されることも多く，合否の決め手となる重要な分野であり，早期の対応が必要となる．

医学部 (医学科)

医学科 (2009 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 C	行列	1 次変換
2	数学 B	数列	漸化式と数列の極限
3	数学 A	確率	さいころの目とグラフの交点
4	数学 III	微分・積分	定積分の計算

1 (1) 直線 l，m の方程式を求め，2 式から x，y について解く．

(2) 問題に t の値により，P が円周上を動くとあるので，適当な t の値をとって円の方程式を予想することができる．

2 (1) 第 2 式から $a_n - b_n = a_{n-1} - b_{n-1} + 1$ となるから，$\{a_n - b_n\}$ は等差数列である．

(2) (1) で得られた結果を利用する．

(3) (1)，(2) で得られた結果を利用し，$a_n > 0$，$b_n > 0$ に注意して

$$a_n + b_n = \sqrt{(a_n - b_n)^2 + 4a_nb_n} = \sqrt{(n+1)^2 + 4\{pn^2 + (p+3)n - 2p\}}$$

として求めることもできる．よって，次の極限を利用して求めればよい．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - b_n}{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_nb_n}{n^2} = p, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{n} = \sqrt{1+4p}$$

3 理系と共通問題

(1) A，B の座標をそれぞれ $(\alpha,\ q\alpha+1)$，$(\beta,\ q\beta+1)$ とすると，AB の中点の y 座標は $q \times \dfrac{\alpha+\beta}{2} + 1$ である．また α，β は 2 次方程式 $px^2 - qx - 1 = 0$ の解であるから，解と係数の関係を利用する．

(2) 2 次方程式 $px^2 - qx - 1 = 0$ の判別式 $q^2 + 4p$ が平方数である．

(3) 直線 AO および直線 AB の方向ベクトルを利用する．

4 理系と共通問題

(1) 三角関数の合成を利用する．

(2) 被積分関数の符号により区間に分けて積分する．

医学科 (2010 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 B	空間のベクトル	位置ベクトル
2	数学 A	確率	赤球と白球を取り出す確率
3	数学 III	微分・積分	微分法と数列への応用
4	数学 III	微分・積分	積分と極限

1
(1) P から x 軸に下ろした垂線の長さの最小値を求める．

(2) D の x 座標が 2 であることから，D の y 座標の範囲を考える．

2
(1) 熊大では確率の出題率が高く，2010 年度は理系では医学科のみ出題であるが，基本題で，簡単な場合分けに注意するだけである．

(2) (1) と同様に，場合分けに注意するだけである．

3 理系と大半が共通問題

(1) $f'(x) = -\dfrac{1}{2}$ を導けるかが本題のポイント．

(2) 医学科では $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 0$ であることに気が付くことが要求される．(1) の結果から，$f(x)$ は x の 1 次関数であることから，$f(0)$ は容易に求められる．

(3) (2) の結果から，$a_1 = \dfrac{\pi}{16}$，$a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{\pi}{16}$ であるから，a_n は容易に求められる．

4
(1) 条件式に代入し，係数を比較する基本題．

(2) (1) の結果に $p = \dfrac{1}{t}$ し，これを用いて $S(t)$ を求める．

(3) 次の極限を利用する．

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1,\quad \lim_{t\to 0}\frac{e^{-t^2}-1}{-t^2} = 1,\quad \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

医学科 (2011年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 A	整数問題	二項定理と整数問題
2	数学 B	空間のベクトル	ベクトルの図形への応用
3	数学 III	微分・積分	関数の最大・最小
4	数学 III	微分・積分	空間図形の体積

1 (1) 次式を利用を利用する．

$$\begin{aligned} x^5 - x &= x(x^2+1)(x^2-1) \\ &= x\{(x^2-4)+5\}(x^2-1) \\ &= x(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)+5x(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

あるいは，この変形に気付かなくても

$$x^5 - x = x(x+1)(x-1)(x^2+1)$$

これに，$x=5k$，$x=5k\pm1$，$x=5k\pm2$ (k は整数) の場合分けにより容易に導かれる．

一般に，x を整数，p を素数とすると，$x^p - x$ は p の倍数．とくに，x と p が互いに素であるとき，$x^{p-1}-1$ は p の倍数 (フェルマーの小定理).

(2) (1) の結果を利用する基本題.

2 理系と共通問題

(1) 基本題

(2) 3点M，N，Kを通る平面を α とする．α を1次独立なベクトル A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を用いて媒介変数表示をする．これと L の位置ベクトルが $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて一意的に表されることにより k を求める．

(3) 辺GFを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いた媒介変数表示をして (2) と同様に求める．

3 理系の類題

(1) 基本題

(2) 考え方は難しくないが，計算力が要求される問題である．

4 (1) 動径ORの軌跡の描く図形の面積を求める．

(2) 錐体の体積は柱体の体積の $\frac{1}{3}$ であることを利用できる基本題.

医学科 (2012 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 A	場合の数と確率	数列との融合問題
2	数学 C	行列	1 次変換
3	数学 III	微分・積分	定積分を関数
4	数学 B	空間のベクトル	位置ベクトル

1 (1) $(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 を並べる順列の総数である．

(2) $b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大となるのは，$\{a_n\}$ において -1 が連続して偶数回並ぶ場合であり，$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最小となるのは，$\{a_n\}$ において $a_1=a_n=-1$ であり，残りの 2 つの -1 が連続して並ぶ場合である．

(3) (2) の結果から，その順列の総数を求める．

2 理系の類題

(1) 正方行列 A，B について，$\det(AB)=\det A\det B$ であることを利用する．

(2) 条件により得られた $\sin\theta$，$\cos\theta$ の 2 次形式を，$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ にすることがポイント．

(3) (2) で得られた関数の増減を調べる．

3 理系の類題

(1) x の値に対して，$\sin\theta=\dfrac{ax}{\sqrt{1+a^2x^2}}$ をみたす θ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をとると，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2x^2}}$ であり，$\sin t-ax\cos t=\sqrt{1+a^2x^2}\sin(t-\theta)$ を利用する．

(2) (1) で得られた関数の増減を調べる．

4 (1) 3 点 L，M，N を通る平面上の位置ベクトルを表し，これが OA 上の点であることから $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を求める．

(2) 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DK}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DN}}$ のなす角を θ とすると　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DK}}||\overrightarrow{\mathrm{DN}}|}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=|\overrightarrow{\mathrm{DK}}|\cos\theta\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DN}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}})}{|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{DN}}$

医学科 (2013 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 A	場合の数と確率	確率，場合の数
2	数学 B	空間のベクトル	位置ベクトルの表す領域
3	数学 III	微分・積分	関数の増減，定積分
4	数学 II	図形と方程式	軌跡，面積，共有点の個数

1　(1) A 君が k $(1 \leqq k \leqq n)$ 回目に勝つ確率を求め，それらの和を求める．

(2) B 君が勝つ確率は，(1) の結果と同様に求める．これと (1) の結果を用いるが，ここからが問題である．

2　理系の類題 (27 ページを参照．)

(1) 基本題

(2) $\vec{l} = \overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\vec{m} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とするとき

$$|\vec{m}|\overrightarrow{\mathrm{OL}} + |\vec{l}|\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

は ∠LMO の二等分線の上にある．ベクトル

$$|\vec{m}|^2\vec{l} - (\vec{l}\cdot\vec{m})\vec{m}$$

は，平面 OLM に平行で，$\vec{m}$ に垂直である．$\vec{m}$ に平行な単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると，平面上 OLM 上にある点 H から直線 OM に下ろした垂線の長さは $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{e}|$ である (解答にある補足を参照).

3　理系と共通問題 (28 ページを参照．)

4　理系の類題 (28 ページを参照．)

(1) 軌跡の方程式が原方程式をみたしているか確認する必要がある．

(2) 円と曲線 C による図形的なアプローチは困難．方程式の解で考える．

医学科 (2014 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 B	空間のベクトル	ベクトルの図形への応用
2	数学 III	微分・積分	方程式の解の個数
3	数学 III	微分・積分	関数の極値
4	数学 III	微分・積分	面積，体積

1 (1) 展開図で考えるのがポイント．

(2) $\triangle\mathrm{OMN} + \triangle\mathrm{BQM} + \triangle\mathrm{CQN} = \triangle\mathrm{OBC} - \triangle\mathrm{QMN}$ に注目する．

(3) (2) の結果を利用する．

2 理系と共通問題

(1) a を θ の関数とみると，a は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で単調減少．

(2) $a = f(\theta)$ と $y = a$ の共有点の個数を考える

3 (1) 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ の極大値を考える．

(2) 関数 $f(x)$ の増減に注意して，n が正の整数のとき，$f(n) \leqq f(3)$

4 (1) $y = \tan x + \dfrac{1}{\tan x}$ を利用する．

(2) $\dfrac{1}{\sin x\cos x} = \dfrac{1}{\tan x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{(\tan x)'}{\tan x}$ がポイント．

(3) $\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \left(1 + \dfrac{1}{\tan^2 x}\right)\dfrac{1}{\cos^2 x} = \left(1 + \dfrac{1}{\tan^2 x}\right)(\tan x)'$ がポイント．

医学科 (2006-2014) 出題分野

		06	07	08	09	10	11	12	13	14
I	方程式と不等式									
	2 次関数									
	図形と計量									
II	式と証明									
	複素数と方程式									
	図形と方程式								4	
	三角関数									
	指数関数と対数関数									
	微分法と積分法		1	1						
III	関数									
	極限									
	微分・積分	3 4	3 4	4	4	3 4	3 4	3	3	2 3 4
A	場合の数と確率	1	2		3	2	1	1	1	
	論理と集合									
	平面図形									
B	平面上のベクトル									
	空間のベクトル	2				1	2	4	2	1
	数列			2	2					
C	行列			3	1			2		
	2 次曲線									

1〜4 は問題番号

2009 年度から医学部医学科は独自問題となったが (2005 年度以前は，30 ページを参照)，2009 年度は，4 題中 2 題が理系学科と同一問題であった．2010 年度は，1 題は理系学科とほぼ同一の問題であったが，3 題が医学部独自の問題となった．2011 年度は，1 題が理系と同一問題で，1 題が理系の類題であった．2012 年度は，2 題が理系の類題であった．2013 年度は，1 題が理系と同一問題で，2 題が理系の類題であった．こうした傾向は今後とも続くと予想される．

数学 III の『微分・積分』の分野は，合否の決め手となる重要な分野である．2010 年度に出題された 2 題とも，他分野 (極限・数列) との融合問題であり，早期の対応が必要である．とくに，2014 年度は 4 題中 3 題がこの分野からの出題であった．

数学 A の『場合の数と確率』の分野からは，確率 (09,10,13)，整数問題 (11)，場合の数 (12,13) と出題されており，今後とも重点的に対応すべき分野である．

数学 B の『空間のベクトル』の分野からの出題が目立つ (10,11,12,13)．

熊本大学の理系および医学部医学科の入学試験では，数学 III の『微分・積分』の問題は，過去 10 年分の問題においては必ず関連付けた小問が設けてあり，設問の誘導にしたがって解けるようになっている．たとえば，次の 2006 年度の 4 番の問題では，(1) は (2) を解くためのヒントになっている．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x)=1+\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $u=e^{\tan t}$ を t で微分せよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=\dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を x 軸の周りに回転して得られる図形の体積を求めよ。

解答　(1) $\dfrac{du}{dt}=e^{\tan t}(\tan t)'=\boldsymbol{\dfrac{e^{\tan t}}{\cos^2 t}}$

(2) $u=e^{\tan t}$ とおくと，(1) の結果および $1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$ に注意して

$$
\begin{aligned}
f(x)&=1+\int_{-x}^{x}\frac{1}{e^{\tan t}(1+e^{\tan t})}\cdot\frac{e^{\tan t}}{\cos^2 t}\,dt\\
&=1+\int_{e^{\tan(-x)}}^{e^{\tan x}}\frac{1}{u(1+u)}\,du\\
&=1+\left[\ \log\left|\frac{u}{1+u}\right|\ \right]_{e^{-\tan x}}^{e^{\tan x}}\\
&=1+\log\frac{e^{\tan x}}{1+e^{\tan x}}-\log\frac{e^{-\tan x}}{1+e^{-\tan x}}\\
&=1+\log e^{\tan x}\\
&=\boldsymbol{1+\tan x}
\end{aligned}
$$

(3) 解答 23 (p.99) を参照．

大問だけの出題は少なく，過去 12 年間 (61 題) では，2001 年度の『数列』，2002 年度の『確率』，2004 年度の『軌跡』のわずか 3 題だけである．したがって，ほとんどの問題は，問題を解く方向性を小問に示してあるので，公式や解法パターンを身に付けておけば対応できる．

2.1　2001 年度

1 次の問いに答えよ。 解答 14 (p.88)

(1) $x < 0$ のとき，e^{-x} と $x^2 + 1$ の大小関係を調べよ。

(2) 2 つの曲線 $y = xe^{-x}$，$y = x(x^2 + 1)$ と直線 $x = -1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

2 座標平面上の点 $\mathrm{P}_n(n,\ 1)$，$n = 1, 2, \cdots$ に対して，点 P_1 から原点 O と点 P_n $(n \geqq 2)$ を通る直線へ下ろした垂線を $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_n$ とし，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ のなす角を θ_n とする。このとき，次の問いに答えよ。 解答 57 (p.145)

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ の成分を求めよ。

(2) $\cos\theta_n$ を求めよ。

(3) $\tan\theta_n < 1.01$ をみたす最小の n の値を求めよ。

3 a を整数とする。$x_n = n^3 - an^2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められている数列 $\{x_n\}$ が

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_{14} > x_{15},\quad x_{15} < x_{16} < x_{17} < \cdots$$

をみたすとき，a を求めよ。 解答 68 (p.166)

4 袋の中に 1 から 5 までのいずれかの数字を書いた同じ形の札が 15 枚入っていて，それらは 1 の札が 1 枚，2 の札が 2 枚，3 の札が 3 枚，4 の札が 4 枚，5 の札が 5 枚からなる。袋の中からこれらの札のうち 3 枚を同時にとり出すとき，札に書かれている数の和を S とする。このとき次の問いに答えよ。 解答 45 (p.131)

(1) S が 2 の倍数である確率を求めよ。

(2) S が 3 の倍数である確率を求めよ。

2.2　2002 年度

1 さいころを繰り返し投げて，n 回目に出た目の数を X_n とし，$a_n = X_1X_2\cdots X_n$ とする。このとき，各 n について，$a_n \leqq 9$ となる確率を求めよ。解答 46 (p.132)

2 $a>1$，$a>p>0$ とする。2 直線 $l_1 : y = 2x-1$，$l_2 : y = a$ の交点を S，l_1 と x 軸の交点を T とし，y 軸上の点 P$(0,\ p)$，l_1 上の点 A$(1,\ 1)$，l_2 上の点 Q$(q,\ a)$ をとる。$\angle\mathrm{PQS} = 135^\circ$，$\angle\mathrm{AQS} = 45^\circ$ であるとき，次の問いに答えよ。
解答 2 (p.70)

(1) p，q それぞれを a で表せ。

(2) $\angle\mathrm{PAT} = \angle\mathrm{QAS}$ であるとき，p，a それぞれの値を求めよ。

3 楕円 $E : \dfrac{x^2}{8} + y^2 = 1$ について，次の問いに答えよ。解答 15 (p.90)

(1) E 上の点 $(a,\ b)$ における E の接線の x 切片と y 切片の和を a で表したものを $f(a)$ とするとき，$f(a)$ を求めよ。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(2) $f(a)$ が最小となる a の値を求めよ。

4 $a>0$ とするとき，関数 $f(x) = x^2e^{-\frac{x}{a}}$ について，次の問いに答えよ。
解答 16 (p.91)

(1) $x = c$ で $f(x)$ が極大値をとるとき，c を a で表せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$ を a で表せ。

2.3 2003年度

1 袋の中に1から3までの数を書いた札が2枚ずつ，計6枚入っている。この中から同時に2枚の札を取り出し，その数を m，n とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$m \geqq n$ とする。 解答 47 (p.133)

(1) $m = n$ となる確率を求めよ。

(2) 直線 $y = x + c$ と点 $(m,\ n)$ との距離の2乗を S とする。S の期待値を求めよ。

(3) S の期待値が最小になる c の値を求めよ。

2 正三角形PQRの3辺PQ，QR，RP上にそれぞれ点A，B，Cをとる。△PCA，△QAB，△RBCの外接円の中心をそれぞれ $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$，$\mathrm{O_3}$，その半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3 とする。△ABCの3辺の長さを $a = \mathrm{BC}$，$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とするとき，次の問いに答えよ。 解答 6 (p.76)

(1) r_1，r_2，r_3 を a，b，c で表わせ。

(2) $\triangle \mathrm{O_1O_2O_3}$ は正三角形であることを示せ。

3 関数 $f(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{10 - x^2}}$ について，次の問いに答えよ。 解答 17 (p.91)

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ。

(2) 関数 $g(x)$ を各区間 $k \leqq x \leqq k+1$ $(k = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$ において，

$$g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^k f(x-k)$$

と定義する。

$$a_n = \int_0^n g(x)\,dx \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

とするとき，数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

4 2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の関係式

$$f(x) = \int_0^x (g(t) + t\cos t)\,dt + \sin x, \quad g(x) = \sin x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f'(t) - \cos t)\,dt$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。 解答 18 (p.92)

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^\pi (f(x) - g(x))^2\,dx$ を求めよ。

2.4　2004 年度

1 円 $C_1 : x^2+y^2=1$ と円 $C_2 : (x-2)^2+(y-4)^2=5$ とに点 P から接線を引く。P から C_1 の接点までの距離と C_2 の接点までの距離との比が $1:2$ になるとする。このとき，P の軌跡を求めよ。
解答 3 (p.71)

2 整数 m，n が $1 \leqq m < n$ を満たすとき，次の問いに答えよ。
解答 7 (p.77)

(1) $x>3$ ならば，不等式

$$(mx-1)(nx-1) > x^2+1$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\tan\alpha = \dfrac{1}{m}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{n}$ を満たし，かつ $\tan(\alpha+\beta)$ の値が整数となる角度 α，β があるとする。このような，$(m,\ n)$ の組をすべて求めよ。

3 次の問いに答えよ。
解答 19 (p.93)

(1) 任意の自然数 n に対して，$x \geqq 0$ ならば，不等式

$$e^x > \frac{x^n}{n!}$$

が成り立つことを示せ。

(2) (1) の不等式を用いて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0$ であることを示せ。

(3) 曲線 $y=xe^{-x}$ の点 $(a,\ ae^{-a})$ における接線と法線が x 軸と交わる点を，それぞれ P と Q とおく。ただし $a>1$ とする。線分 PQ の長さを $l(a)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} l(a)$ を求めよ。

4 楕円 $E : (x-1)^2 + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ について，次の問いに答えよ。ただし，b は正の定数とする。
解答 20 (p.95)

(1) E を表す極方程式を $r=f(\theta)$ とするとき，$f(\theta)$ を求めよ。

(2) 点 P が E 上を動くとする。原点 O と P との距離 OP が点 $(2,\ 0)$ 以外で最大となるための b の条件を求めよ。

(3) b は (2) で求めた条件を満たすとし，OP が最大となる点における θ の値を θ_0 とおく。ただし $0<\theta_0 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。このとき (1) で求めた $f(\theta)$ について，定積分

$$\int_0^{\theta_0} f(\theta)\,d\theta$$

の値を b の式で表せ。

2.5　2005 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標空間内に 4 点 A(3, 0, 0)，B(0, 2, 1)，C(0, 2, 0)，D(3, 2, 0) を考え，線分 CD 上の点 P(x, 2, 0) に対して，三角形 PAB の面積を S とするとき，次の問いに答えよ。 解答 59 (p.148)

(1) $\angle \mathrm{APB} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ を x で表せ。

(2) S の最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ ボタンを 1 回押すごとに，画面に 1，2，3，4 のいずれかの数を表示する機械がある。この機械が数 X を表示する確率は次のとおりである。

X	1	2	3	4
確率	$2a$	b	b	a

次の問いに答えよ。 解答 48 (p.134)

(1) b を a で表せ。

(2) ボタンを 2 回押したときに表示される数のうち小さくないほうの数を Z とするとき，Z の期待値 m を a で表せ。

(3) m を最大にする a の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面上において，x 軸上の点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ と曲線 $C : y = \dfrac{1}{x^2}$ 上の点列 $\{\mathrm{Q}_n\}$ を次のように定める。$\mathrm{P}_1(a,\ 0)$ $(a > 0)$ とする。P_n $(n \geqq 1)$ が定まったとき，P_n を通り y 軸に平行な直線と C との交点を Q_n とする。Q_n における C の接線と x 軸との交点を P_{n+1} とする。次の問いに答えよ。 解答 11 (p.83)

(1) $\mathrm{P}_n(a_n,\ 0)$ とするとき，a_n を a で表せ。

(2) 三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n$ の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を a で表せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 平面上の点の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とする。極方程式 $r = f(\theta)$ によって表される曲線 C について，次の問いに答えよ。 解答 21 (p.97)

(1) 曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ について，$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2$ を $f(\theta)$，$f'(\theta)$ を用いて表せ。

(2) $f(\theta) = \sin^3\dfrac{\theta}{3}$ のとき，曲線 C の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ。

2.6 2006 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 大小 2 つのサイコロを投げて，大きいサイコロの目の数を a，小さいサイコロの目の数を b とする。次の問いに答えよ。 解答 49 (p.135)

(1) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ の最小値が -5 より小さくなる確率を求めよ。

(2) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと x 軸との交点で，x 座標の大きい方を選ぶ。その x 座標が 1 より大きくなる確率を求めよ。

(3) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと関数 $y = bx^2$ のグラフが異なる 2 点で交わる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 原点を O とする座標空間の 4 点 $\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 3,\ 0)$，$\mathrm{B}(-\sqrt{3},\ 3,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 2,\ 2)$，$\mathrm{P}(0,\ 1,\ 0)$ および，平面 OAC，OBC，ABC 上にそれぞれ点 Q，R，S をとる。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ が平面 OAC，OBC，ABC にそれぞれ直交するとき，次の問いに答えよ。 解答 60 (p.149)

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を成分で表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ を成分で表せ。

(3) $\triangle\mathrm{QRS}$ の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ n を自然数とする。次の問いに答えよ。 解答 22 (p.98)

(1) $n \geqq 2$ のとき，関数 $f(x) = (1-x)^3x^n$ の極値を求めよ。

(2) 定積分 $a_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^3x^n\,dx$ を求めよ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x) = 1 + \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ について，次の問いに答えよ。 解答 23 (p.99)

(1) 関数 $u = e^{\tan t}$ を t で微分せよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 0$，$x = \dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を x 軸の周りに回転して得られる図形の体積を求めよ。

2.7　2007 年度

1 a を定数とする。2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2, \qquad C_2 : y = 3(x-1)^2 + a$$

について，以下の問いに答えよ。 解答 9 (p.80)

(1) C_1，C_2 の両方に接する直線が 2 本存在するための a の条件を求めよ。

(2) C_1，C_2 の両方に接する 2 本の直線が，直交するときの a の値を求めよ。

(3) C_1，C_2 の両方に接する 2 本の直線が，$\dfrac{\pi}{4}$ の角度で交わるときの a の値を求めよ。

2 xy 平面上で，点 P は原点を出発点とし，さいころを 1 回投げるたびに以下のように進むものとする。1 または 2 の目が出たときは x 軸方向に 1 だけ進み，3 の目が出たときは x 軸方向に -1 だけ進み，4 または 5 の目が出たときは y 軸方向に 1 だけ進み，6 の目が出たときは y 軸方向に -1 だけ進む。以下の問いに答えよ。 解答 50 (p.136)

(1) さいころを 5 回投げるとき，点 P が座標 $(2, -3)$ の位置にいる確率を求めよ。

(2) さいころを n 回投げるとき，点 P が x 軸上のみを動いて最後に原点にいる確率を求めよ。

(3) さいころを 2 回投げるとき，点 P の x 座標の期待値を求めよ。

3 行列 A の表す移動によって xy 平面上の点 $(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$ はそれぞれ $(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$ に移されるとする。以下の問いに答えよ。 解答 24 (p.101)

(1) 行列 A を求めよ。

(2) 曲線 $y = e^x$ 上を点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ が動くとき，P がこの移動によって移る点の軌跡 C を求めよ。ただし，$-\infty < t < \infty$ とする。

(3) 曲線 D を $y = x + \log\left(e + \dfrac{1}{e} - x\right)$ とする。ただし，$x < e + \dfrac{1}{e}$ である。2 つの曲線 C と D で囲まれる領域の面積を求めよ。

4 a を定数とする。方程式 $(\log x)^2 = ax\ (x > 0)$ について，以下の問いに答えよ。 解答 25 (p.103)

(1) 解の個数を調べよ。必要なら，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$ を用いよ。

(2) 解がちょうど 2 個のとき，これらの解を p^2，q^2 $(0 < p < q)$ とおく。q の値を求めよ。また，p は $\dfrac{e}{e+1} < p < 1$ を満たすことを示せ。

2.8　2008 年度

1 放物線 $y = 4x^2 + 3$ を C とする。x 軸上に点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ $(p \neq 0$ とする$)$，C 上に点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2 + 3)$ をとり，点 A における C の接線 l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ とする。さらに，点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2 + 3)$ における C の接線を m とする。以下の問いに答えよ。

解答 10 (p.82)

(1) q を p を用いて表せ。

(2) 接線 m が点 P を通るとする。p，q の値を求めよ。

(3) (2) で求めた p，q に対して，放物線 C と 2 つの接線 l，m で囲まれた部分の面積を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 0,\ a_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

によって定められている。以下の問いに答えよ。

解答 69 (p.168)

(1) $b_n = n + a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，$b_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を示せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が等比数列であることを示せ。

(3) a_n を求めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

3 直線 $y = 2x + 1$ を l とする。また，行列 $\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ を A とする。直線 l 上の各点は A が表す移動によって l 上の点に移るとする。以下の問いに答えよ。

解答 72 (p.172)

(1) b の値を求め，c を a を用いて表せ。

(2) $a \neq -\dfrac{1}{2}$ ならば，直線 l 上の点 P で，A が表す移動によって P 自身に移るものが存在することを示せ。

(3) 直線 l 上の各点 Q は A が表す移動によって Q と異なる l 上の点に移るとする。a，c の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 放物線 $C : y = \dfrac{1}{4}x^2$ および点 F(0, 1) について考える。以下の問いに答えよ。ただし，O は原点を表す。

解答 26 (p.105)

(1) 放物線 C 上の点 A(x, y) ($x > 0$ とする) に対して $\theta = \angle\mathrm{OFA}$，$r = \mathrm{FA}$ とおく。r を θ を用いて表せ。

(2) 放物線 C 上に n 個の点 $\mathrm{A}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{A}_2(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，$\mathrm{A}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$x_k > 0 \ \text{かつ}\ \angle\mathrm{OFA}_k = \frac{k\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

を満たすようにとる。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{FA}_k$ を求めよ。

2.9　2009 年度

2.9.1　理系 (理，医保健 (放射線，検査)，薬，工学部)

1 実数 p に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_{p-x}^{p} (t^6 + 2t^3 - 3)dt$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。 解答 27 (p.106)

(1) $f'(x)$ は，$x = p + 1$ のとき最小値をとることを示せ。

(2) $f(p + 1)$ の $p > 0$ における最小値を求めよ。

2 $0 < a < 3$ とする。次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \log(1 + a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を次の手順で求めよ。 解答 12 (p.84)

(1) $0 < x < 3$ のとき，$0 < \log(1 + x) < x - \dfrac{1}{6}x^2$ であることを示せ。必要があれば，$0.69 < \log 2 < 0.70$ を用いてもよい。

(2) $0 < a_n < \dfrac{6}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

3 大小 2 個のサイコロを投げ，大きいサイコロの目の数を p，小さいサイコロの目の数を q とする。$y = px^2$ のグラフと $y = qx + 1$ のグラフの交点のうち，x 座標が負のものを A，正のものを B とする。このとき，次の問いに答えよ。 解答 51 (p.137)

(1) 線分 AB の中点の y 座標が 2 より小さくなる確率を求めよ。

(2) A の x 座標が有理数となる確率を求めよ。

(3) $\angle$OAB が 90° より大きくなる確率を求めよ。ただし，O は座標平面の原点である。

4 次の問いに答えよ。 解答 28 (p.107)

(1) $-\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sqrt{3}\cos x - \sin x > 0$ をみたす x の範囲を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx$ を求めよ。

2.9.2　医学部医学科

$\boxed{\mathbf{1}}$ 実数 t に対して，座標平面上の点 $(0,\ 1)$ と $(1,\ t)$ を通る直線を ℓ とし，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で表される移動により，直線 ℓ 上の各点は，ある直線 m 上の点に移るとする。ℓ と m の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とするとき，次の問いに答えよ。

解答 73 (p.175)

(1) x，y を t の式で表せ。

(2) t がすべての実数を動くとき，P はある円周上を動くことを示せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ $p>0$ とする。各項が正である 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，次の条件をみたすものとする。

$$\begin{cases} a_1=3,\ b_1=1 \\ a_n-a_{n-1}=b_n-b_{n-1}+1 \qquad (n=2,3,4,\cdots) \\ (a_{n-1}+b_n)(b_n-b_{n-1})=2pn+3-b_n \qquad (n=2,3,4,\cdots) \end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ。

解答 70 (p.169)

(1) a_n-b_n を求めよ。

(2) a_nb_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^3+{b_n}^3}{{a_n}^3-{b_n}^3}$ の値を $f(p)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{p\to 0}\frac{1}{p}\log f(p)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 大小 2 個のサイコロを投げ，大きいサイコロの目の数を p，小さいサイコロの目の数を q とする。$y=px^2$ のグラフと $y=qx+1$ のグラフの交点のうち，x 座標が負のものを A，正のものを B とする。このとき，次の問いに答えよ。

解答 51 (p.137)

(1) 線分 AB の中点の y 座標が 2 より小さくなる確率を求めよ。

(2) A の x 座標が有理数となる確率を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{OAB}$ が 90° より大きくなる確率を求めよ。ただし，O は座標平面の原点である。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問いに答えよ。

解答 28 (p.107)

(1) $-\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sqrt{3}\cos x-\sin x>0$ をみたす x の範囲を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left|\frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\right|dx$ を求めよ。

2.10　2010 年度

2.10.1　理系 (理，医保健 (放射線，検査)，薬，工学部)

1 関数 $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+2\sin x-2\sqrt{3}\cos x$ について，以下の問いに答えよ。 解答 8 (p.79)

(1) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=t$ とおいて，y を t の式で表せ。

(2) $0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，y の最大値および最小値を求めよ。

2 曲線 $C: x^2+y^2=1\ (x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ 上に 3 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1)$ をとり，$\angle\mathrm{POR}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ となる C 上の点を $\mathrm{R}(s,\ t)$ とする。さらに，C 上の点 X を 2 つのベクトル $s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-t\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-s\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ が垂直になるようにとる。このとき，以下の問いに答えよ。 解答 58 (p.146)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ の内積の値を θ を用いて表せ。

(2) 条件をみたす X が弧 AP 上にとれるとき，θ の範囲を求めよ。

(3) (2) で求めた θ の範囲において，$\triangle\mathrm{ROX}$ の面積の最大値を求めよ。

3 関数 $f(x)=x\,2^{-x}$ の区間 $t\leqq x\leqq t+1$ における最小値を $g(t)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。 解答 29 (p.110)

(1) $g(t)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^2 g(t)\,dt$ の値を求めよ。

4 関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{8}\right)$ について，以下の問いに答えよ。 解答 30 (p.111)

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ および $f(0)$ の値を求めよ。

(3) 条件 $a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,2,3,\cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

2.10.2　医学部医学科

1 原点を O とし，空間内に 3 点 A(4, 0, 0)，B(1, 2, 0)，C(2, 1, 2) をとる。線分 BC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とおく．このとき，以下の問いに答えよ。 解答 61 (p.152)

(1) △OAP の面積を最小にする t の値を求めよ。

(2) C を通り，3 点 O，A，P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。D が △OAB の内部にあるとき，t の範囲を求めよ。

2 赤球 4 個と白球 6 個の入った袋から 2 個の球を同時に取り出し，その中に赤球が含まれていたら，その個数だけさらに袋から球を取り出す。このとき，以下の問いに答えよ。 解答 52 (p.139)

(1) 取り出した赤球の総数が 2 である確率を求めよ。

(2) 取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ。

3 関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{8}\right)$ について，以下の問いに答えよ。 解答 31 (p.112)

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(0)$ の値を求めよ。

(3) 条件 $a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

4 以下の問いに答えよ。 解答 32 (p.113)

(1) p を 0 でない定数とする。関数 $f(x)=ae^{-x}\sin px+be^{-x}\cos px$ について，$f'(x)=e^{-x}\sin px$ となるように，定数 a，b を定めよ。

(2) $S(t)=\displaystyle\int_0^{t^2} e^{-x}\sin\frac{x}{t}\,dx$ $(t\neq 0)$ とおく。このとき，$S(t)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3}$ の値を求めよ。

2.11　2011 年度

2.11.1　理系 (理，医保健 (放射線，検査)，薬，工学部)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき，1 回目に出る目の数を a，2 回目に出る目の数を b とする。これらの a，b に対して，実数を要素とする集合 P，Q を次のように定める。

$$P = \{x \mid x^2 + ax + b > 0\}$$
$$Q = \{x \mid 5x + a \geqq 0\}$$

このとき，以下の問いに答えよ。 解答 53 (p.140)

(1) P が実数全体の集合となる確率を求めよ。

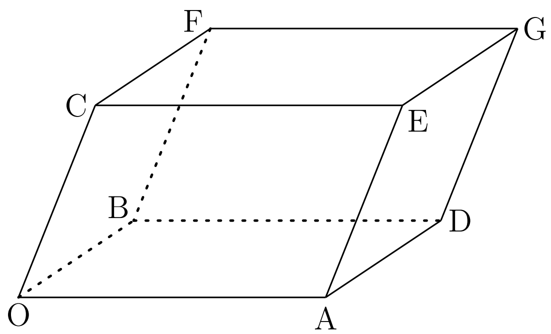
(2) $Q \subset P$ となる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を 2 : 3 に内分する点を N，辺 DG を 1 : 2 に内分する点を L とする。また，辺 OC を $k : 1 - k$ $(0 < k < 1)$ に内分する点を K とする。このとき，以下の問いに答えよ。 解答 62 (p.154)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 M，N，K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ。

(3) 3 点 M，N，K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。



3 次の条件によって定められる関数の列 $f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ を考える。

$$f_0(x) = 1$$
$$f_n(x) = 1 - \int_0^x t\, f_{n-1}(t)\, dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ。 解答 33 (p.115)

(1) $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 1$ のとき，$f_n(x) - f_{n-1}(x)$ は x についての次数が $2n$ の単項式となることを示し，その単項式を求めよ。

(3) $n \geqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{1}{2} \leqq f_n(1) \leqq \frac{5}{8}$$

が成り立つことを示せ。

4 楕円 $C : x^2 + 4y^2 = 1$ と点 $\mathrm{P}(2,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。解答 34 (p.117)

(1) 直線 $y = x + b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(2) (1) における 2 つの交点を A，B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。

2.11.2　医学部医学科

1　x，y を整数とするとき，以下の問いに答えよ。 解答 54 (p.142)

(1) $x^5 - x$ は 30 の倍数であることを示せ。

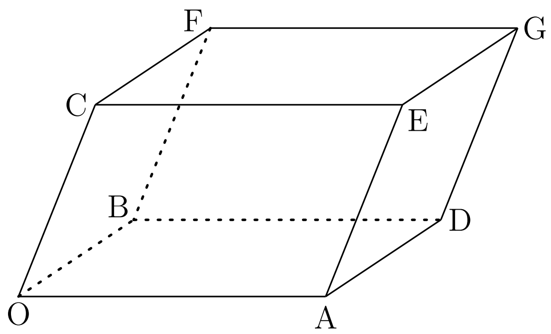
(2) $x^5y - xy^5$ は 30 の倍数であることを示せ。

2　平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を 2 : 3 に内分する点を N，辺 DG を 1 : 2 に内分する点を L とする。また，辺 OC を $k : 1-k$ $(0 < k < 1)$ に内分する点を K とする。このとき，以下の問いに答えよ。 解答 62 (p.154)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 M，N，K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ。

(3) 3 点 M，N，K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。



3 楕円 $C : x^2+4y^2 = 4$ と点 P(2, 0) を考える。以下の問いに答えよ。解答 35 (p.118)

(1) 直線 $y = x + b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(2) (1) における 2 つの交点を A，B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。

4 xyz 空間内の 3 点 P(0, 0, 1)，Q(0, 0, −1)，R(t, $t^2 - t + 1$, 0) を考える。t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。解答 36 (p.119)

(1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2) K の体積を求めよ。

2.12 2012 年度

2.12.1 理系 (理，医保健 (放射線，検査)，薬，工学部)

1 以下の問いに答えよ。 解答 1 (p.69)

(1) k を整数とするとき，x の方程式 $x^2 - k^2 = 12$ が整数解をもつような k の値をすべて求めよ。

(2) x の方程式 $(2a-1)x^2 + (3a+2)x + a + 2 = 0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつような整数 a の値とそのときの整数解をすべて求めよ。

2 実数 c に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換を T とするとき，以下の問いに答えよ。 解答 74 (p.177)

(1) T は原点の回りの回転移動と原点中心の拡大 (相似変換) との合成変換であることを示せ。

(2) xy 平面上の同一直線上にない 3 点 P，Q，R が T によってそれぞれ P′，Q′，R′ に移るとする。三角形 P′Q′R′ の面積が三角形 PQR の面積の 2 倍となる c の値を求めよ。

(3) $c = 2$ とする。楕円

$$E : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

上の点が T によって楕円 E' 上の点に移るとする。E が E' の内部にあることを示し，E' の内部にあり E の外部にある部分の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2 つの関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^t(\sin t + \cos t)dt$ と $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^t(\cos t - \sin t)dt$ について，以下の問いに答えよ。 解答 37 (p.120)

問 1　$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

問 2　$f^{(n)}(x)$ と $g^{(n)}(x)$ をそれぞれ $f(x)$ と $g(x)$ の第 n 次導関数とする。

(1)　$n \geqq 2$ のとき，$f^{(n)}(x)$ および $g^{(n)}(x)$ を，$f^{(n-1)}(x)$ と $g^{(n-1)}(x)$ を用いて表せ。

(2)　$\{f^{(n)}(x)\}^2 + \{g^{(n)}(x)\}^2$ を求めよ。

(3)　実数 a について，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2a}}{\{f^{(n)}(a)\}^2 + \{g^{(n)}(a)\}^2}$ の和を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin t - x\cos t \right| dt \qquad (x > 0)$$

とおく。以下の問いに答えよ。 解答 38 (p.122)

(1)　$a > 0$ のとき，$a = \tan\theta$ を満たす $\theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，$\cos\theta$ を a を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ を求めよ。

(3)　$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

2.12.2　医学部医学科

1 $n \geqq 4$ とする。$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 からなる数列 a_k $(k=1,2,\cdots,n)$ を考える。以下の問いに答えよ。 解答 55 (p.143)

(1) このような数列 $\{a_k\}$ は何通りあるか求めよ。

(2) 数列 $\{a_k\}$ の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1a_2\cdots a_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ とおく。$b_1+b_2+\cdots+b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。

(3) $b_1+b_2+\cdots+b_n$ の最大値および最小値を与える数列 $\{a_k\}$ はそれぞれ何通りあるか求めよ。

2 実数 c に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換を T とするとき，以下の問いに答えよ。 解答 75 (p.178)

(1) xy 平面上の同一直線上にない 3 点 P，Q，R が T によってそれぞれ P′，Q′，R′ に移るとする。三角形 P′Q′R′ の面積が三角形 PQR の面積の k 倍 $(k \geqq 1)$ となる c の値を求めよ。

(2) 楕円

$$E : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

上の点が T によって楕円 E' 上の点に移るとする。楕円 E' 上のすべての点が楕円 E の周上または外部にあるための，c の条件を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 正の定数 a に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin t - ax \cos t \right| dt$$

とおく。以下の問いに答えよ。 解答 39 (p.124)

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 一辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M，辺 BC を $1:2$ に内分する点を N，辺 OC の中点を L とする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。以下の問いに答えよ。 解答 63 (p.155)

(1) 3 点 L，M，N を通る平面と直線 OA の交点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 辺 OB の中点 K から直線 DN 上の点 P へ垂線 KP を引く。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

2.13　2013 年度

2.13.1　理系 (理，医保健 (放射線，検査)，薬，工学部)

1 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n + n^2$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ。 解答 71 (p.171)

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2) a_n を n の式で表せ。

2 O を原点とする空間内の 2 点 A$(-1,\ 1,\ 1)$，B$(2,\ 1, -2)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。 解答 64 (p.156)

(1) 実数 k に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき，k の値の範囲を求めよ。

(2) $1 \leqq s+t \leqq 2$ を満たす実数 s，t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 R からなる領域を E とする。このとき，領域 D と E の共通部分の面積を求めよ。

3 半径 1，中心角 θ $(0 < \theta < \pi)$ の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく。以下の問いに答えよ。 解答 40 (p.126)

(1) $f(\theta)$ を求めよ。

(2) $0 < \theta < \pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ。

(3) 定積分

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta$$

を求めよ。

4 xy 平面上で，点 $(1,\ 0)$ までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする。以下の問いに答えよ。 解答 4 (p.72)

(1) C で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) 円 $x^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}$ と C の交点の x 座標を求めよ。さらに，交点の個数を求めよ。

2.13.2　医学部医学科

$\boxed{\mathbf{1}}$ X，Y は $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ の空でない部分集合で，$X \cap Y$ は空集合とする。また，n を自然数とする。A 君，B 君が以下のルールで対戦する。

(i) 1 回目の対戦では，まず A 君がさいころを投げて，出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする。出た目が X に属さなければ B 君がさいころを投げて，出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする。

(ii) 1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は，1 回目と同じ方法で 2 回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける。ただし，n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする。

以下の問いに答えよ。 解答 56 (p.144)

(1) さいころを投げたとき，X，Y に属する目が出る確率をそれぞれ p，q とする。A 君が勝つ確率を求めよ。

(2) A 君が勝つ確率が，B 君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組 $(X,\ Y)$ は何通りあるか。

$\boxed{\mathbf{2}}$ O を原点とする空間内の 2 点 A$(-1,\ 1,\ 1)$，B$(2,\ 1,\ -2)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。 解答 65 (p.159)

(1) 実数 k に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき，k の値の範囲を求めよ。

(2) 点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ が最小となる C の座標を求めよ。

3 半径 1，中心角 θ $(0 < \theta < \pi)$ の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく。以下の問いに答えよ。 解答 40 (p.126)

(1) $f(\theta)$ を求めよ。

(2) $0 < \theta < \pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ。

(3) 定積分

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\, d\theta$$

を求めよ。

4 xy 平面上で，点 $(1,\ 0)$ までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする。以下の問いに答えよ。 解答 5 (p.74)

(1) C で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) a を正の数とする。円 $x^2 + y^2 = a$ と C の交点の個数が，a の値によってどのように変わるかを調べよ。

2.14　2014 年度

2.14.1　理系 (理，医保健 (放射線，検査)，薬，工学部)

1 空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。また，点 D を $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{b} - \vec{a}$ を満たす点，点 E を $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \vec{c} - \vec{a}$ を満たす点とし，点 P を OA の中点とする。以下の問いに答えよ。 解答 66 (p.162)

(1) $0 < t < 1$ に対し，BD を $t : (1-t)$ に内分する点を R とし，CE を $(1-t) : t$ に内分する点を S とする．また，OB と PR の交点を M とし，OC と PS の交点を N とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) △OMN の面積を t を用いて表せ。

(3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，△OMN の面積の最小値を求めよ。

2 a を正の定数とする。条件

$$\cos\theta - \sin\theta = a\sin\theta\cos\theta, \qquad 0 < \theta < \pi$$

を満たす θ について，以下の問いに答えよ。 解答 41 (p.127)

(1) 条件を満たす θ は，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，ただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 条件を満たす θ の個数を求めよ。

3 r を $r>1$ である実数とし，数列 $\{a_n\}$ を次で定める。

$$a_1=1, \qquad a_{n+1}=\frac{a_n+r^2}{a_n+1}$$

以下の問いに答えよ。 解答 13 (p.86)

(1) n が奇数のとき $a_n<r$，n が偶数のとき $a_n>r$ であることを示せ。

(2) 任意の自然数 n について，$a_{n+2}-r$ を a_n と r を用いて表せ。

(3) 任意の自然数 n について，次の不等式を示せ。

$$\frac{a_{2n+2}-r}{a_{2n}-r}<\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2$$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_{2n}$ および $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$ を求めよ。

4 a を正の実数とする。xy 平面上の曲線 $C: y=e^{ax}$ の接線で，原点を通るものを l とし，C と l および y 軸で囲まれた領域を S とする。以下の問いに答えよ。 解答 43 (p.129)

(1) S を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V_1 を求めよ。

(2) S を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V_2 を求めよ。

(3) $V_1=V_2$ となるときの a の値を求めよ。

2.14.2　医学部医学科

1 空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$. $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とし，OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。 解答 67 (p.163)

(1) $0 < t < 1$ に対し，BC を $t : (1-t)$ に内分する点を Q とする。また，PM＋MQ が最小となる OB 上の点を M とし，PN＋NQ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) △QMN の面積を t を用いて表せ。

(3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，△QMN の最大値を求めよ。

2 a を正の定数とする。条件

$$\cos\theta - \sin\theta = a\sin\theta\cos\theta, \qquad 0 < \theta < \pi$$

を満たす θ について，以下の問いに答えよ。 解答 41 (p.127)

(1) 条件を満たす θ は，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，ただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 条件を満たす θ の個数を求めよ。

3 以下の問いに答えよ。 解答 42 (p.128)

(1) 正の実数 a，b，c について，不等式

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}<\log 4$$

が成立することを示せ。ただし，log は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい。

(2) 自然数 a，b，c，d の組で

$$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}, \qquad a \leqq b \leqq c, \qquad d \geqq 3$$

を満たすものすべて求めよ。

4 a を $a>2$ である実数とする。xy 平面上の曲線 $C: y=\dfrac{1}{\sin x\cos x}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y=a$ の交点の x 座標を α, β $(\alpha<\beta)$ とする。以下の問いに答えよ。 解答 44 (p.130)

(1) $\tan\alpha$ および $\tan\beta$ を a を用いて表せ。

(2) C と x 軸，および 2 直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた領域を S とする。S の面積を a を用いて表せ。

(3) S を x 軸の回りに回転して得られる立体の体積 V を a を用いて表せ。

解答

解答 1 (2012 理系) 問題 (p.1)

(1) 整数解を m とすると $\quad m^2-k^2=12$

$$|m|^2-|k|^2=12$$

ゆえに $\quad (|m|+|k|)(|m|-|k|)=12$

ここで，$|m|+|k|=(|m|-|k|)+2|k|$ および上式の偶奇性により，$|m|+|k|$, $|m|-|k|$ はともに偶数であるから

$$\begin{cases} |m|+|k|=6 \\ |m|-|k|=2 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad |m|=4,\quad |k|=2$$

よって $\quad \boldsymbol{k=\pm 2}$

(2) a は整数であるから $\quad 2a-1\neq 0$

したがって，x の方程式 $(2a-1)x^2+(3a+2)x+a+2=0$ の解は

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(3a+2)\pm\sqrt{(3a+2)^2-4(2a-1)(a+2)}}{2(2a-1)} \\ &= \frac{-(3a+2)\pm\sqrt{a^2+12}}{2(2a-1)} \end{aligned}$$

この方程式が整数解をもつとき

$$l^2=a^2+12 \quad \text{すなわち} \quad l^2-a^2=12$$

を満たす整数 l が存在するから，(1) の結果から，$a=\pm 2$

ゆえに，$a=2$ のとき $\quad x=-2,-\dfrac{2}{3}$

$a=-2$ のとき $\quad x=0,-\dfrac{4}{5}$

よって $\quad \boldsymbol{a=2}$ **のとき** $\quad \boldsymbol{x=-2}$

$\boldsymbol{a=-2}$ **のとき** $\quad \boldsymbol{x=0}$

解答 **2** (2002) 問題 (p.1)

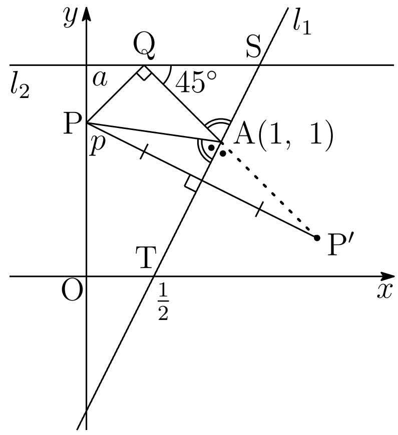
(1) $a>1$，$a>p$，$\angle\mathrm{PQS}=135^\circ$，$\angle\mathrm{AQS}=45^\circ$ であるから，直線AQの傾きは-1，直線PQの傾きは1である．
したがって，直線AQの方程式は

$$y-1=-1(x-1)$$

すなわち　$y=-x+2\quad\cdots①$

直線①と直線 l_2 : $y=a\cdots②$ の交点がQであるから，①，②を解いて

$$\mathrm{Q}(2-a,\ a)$$



直線PQは，Qを通り傾き1の直線であるから，その方程式は

$$y-a=1\{x-(2-a)\}\quad すなわち\quad y=x+2a-2$$

ゆえに，Pの座標は　$(0,\ 2a-2)$

よって　　$\boldsymbol{p=2a-2,\ q=2-a}$

(2) l_1 に関して，Pと対称な点を $\mathrm{P}'(s,\ t)$ とする．
l_1 の傾きは2，直線PP′の傾きは $\dfrac{t-2a+2}{s}$ である．$l_1\perp\mathrm{PP}'$ であるから

$$2\times\frac{t-2a+2}{s}=-1\quad すなわち\quad s+2t=4a-4\quad\cdots③$$

線分PP′の中点 $\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{2a-2+t}{2}\right)$ が l_1 上にあるから

$$\frac{2a-2+t}{2}=2\times\frac{s}{2}-1\quad すなわち\quad 2s-t=2a\quad\cdots④$$

③，④を解いて $s=\dfrac{8a-4}{5}$，$t=\dfrac{6a-8}{5}$　ゆえに　$\mathrm{P}'\left(\dfrac{8a-4}{5},\ \dfrac{6a-8}{5}\right)$

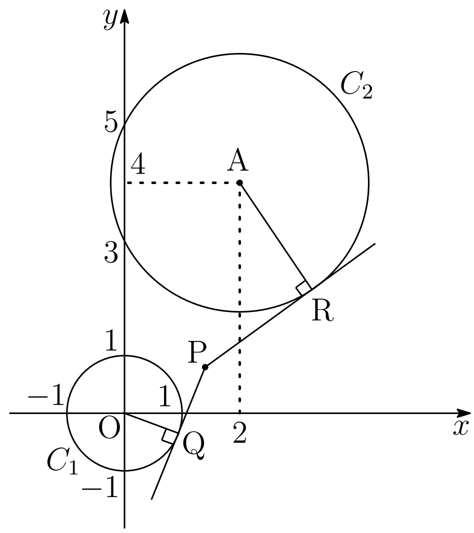
$\angle\mathrm{PAT}=\angle\mathrm{QAS}$ であるとき，P′は直線①上にあるので

$$\frac{6a-8}{5}=-\frac{8a-4}{5}+2\quad ゆえに\quad \boldsymbol{a=\frac{11}{7}}$$

これを(1)の結果に代入して　　$\boldsymbol{p=\dfrac{8}{7}}$

解答 3 (2004) 問題 (p.1)

C_1，C_2 の中心をそれぞれ O，A とし，P から C_1，C_2 に引いた接線の接点を，それぞれ Q，R とする．



P の座標を $(x,\ y)$ とすると，P に関する条件は

$$\mathrm{PQ} : \mathrm{PR} = 1 : 2$$

これより　　$2\mathrm{PQ} = \mathrm{PR}$

すなわち　　$4\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{PR}^2 \quad \cdots ①$

△OQP，△ARP において，$\angle\mathrm{OQP} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{ARP} = 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{OP}^2 - \mathrm{OQ}^2 = x^2 + y^2 - 1$$
$$\mathrm{PR}^2 = \mathrm{AP}^2 - \mathrm{AR}^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 - 5$$

上の 2 式を ① に代入して，整理すると

$$\begin{aligned} 4(x^2+y^2-1) &= (x-2)^2 + (y-4)^2 - 5 \\ 3x^2 + 3y^2 + 4x + 8y - 19 &= 0 \\ \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 &= \frac{77}{9} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

C_1，C_2 の半径をそれぞれ r_1，r_2 とすると　　$r_1 = 1$，$r_2 = \sqrt{5}$

$\mathrm{OA} = 2\sqrt{5}$ より，$r_1 + r_2 < \mathrm{OA}$ であるから，2 円 C_1，C_2 は互いに外部にある．

よって，点 P は円 ② 上にある．

したがって，求める軌跡は，**点 $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{77}}{3}$ の円**である．

解答 4 (2013 理系) $\boxed{\text{問題 (p.1)}}$

(1) C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，条件により

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+|x|=2 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{(x-1)^2+y^2}=2-|x| \quad \cdots①$$

① の両辺を平方して整理すると

$$y^2=2x-4|x|+3$$

上の方程式で x のとりうる値の範囲は

$$2x-4|x|+3 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 4|x| \leqq 2x+3$$

ゆえに $$-(2x+3) \leqq 4x \leqq 2x+3$$

① の $2-|x| \geqq 0$ に注意して $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$

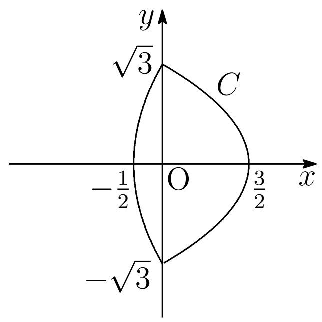
したがって $C: y^2=2x-4|x|+3$

C は $x \geqq 0$ のとき $y^2=-2x+3$ すなわち $x=-\dfrac{1}{2}(y^2-3)$,

$x<0$ のとき $y^2=6x+3$ すなわち $x=\dfrac{1}{6}(y^2-3)$

C の表す図形は右の図の曲線 (閉曲線) で，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left\{-\frac{1}{2}(y^2-3)-\frac{1}{6}(y^2-3)\right\} dy \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{3}} (3-y^2)\,dy \\ &= \frac{4}{3}\left[\,3y-\frac{y^3}{3}\,\right]_0^{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{8}{3}\sqrt{3}} \end{aligned}$$



(2) 円 $x^2+y^2=\dfrac{9}{4}$ と $C: y^2=2x-4|x|+3$ の交点は $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ の範囲にあり，2 式から y^2 を消去し整理すると

$$x^2+2x-4|x|+\frac{3}{4}=0 \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\right) \quad \cdots (*)$$

(i) $0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき　　$x^2-2x+\dfrac{3}{4}=0$

x の範囲に注意してこれを解いて　$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$

(ii) $-\dfrac{1}{2} \leqq x < 0$ のとき　　$x^2+6x+\dfrac{3}{4}=0$

x の範囲に注意してこれを解いて　$x=\dfrac{-6+\sqrt{33}}{2}$

したがって，求める交点の x 座標は　　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{-6+\sqrt{33}}{2}}$

円と C はともに x 軸に関して対称であるから，方程式 $(*)$ の実数解について，$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$ にある解 1 個に対して交点は 2 個あり，$x=-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}$ に対して交点は 1 個である．

ゆえに，$x=\frac{1}{2},\ \frac{-6+\sqrt{33}}{2}$ に対して交点は 2 個ずつあり，$x=\frac{3}{2}$ に対して交点は 1 個である．よって，求める交点の個数は　　**5 個**

解答 5 (2013 医) $\boxed{\text{問題 (p.1)}}$

(1) C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，条件により

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+|x|=2 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{(x-1)^2+y^2}=2-|x| \quad \cdots ①$$

① の両辺を平方して整理すると

$$y^2=2x-4|x|+3$$

上の方程式で x のとりうる値の範囲は

$$2x-4|x|+3 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 4|x| \leqq 2x+3$$

ゆえに $$-(2x+3) \leqq 4x \leqq 2x+3$$

① の $2-|x| \geqq 0$ に注意して $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$

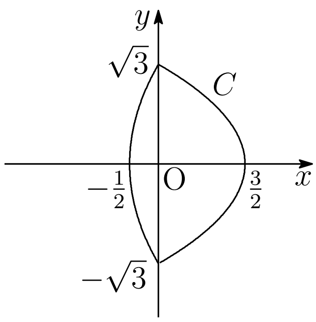
したがって $C : y^2=2x-4|x|+3$

C は $x \geqq 0$ のとき $y^2=-2x+3$ すなわち $x=-\dfrac{1}{2}(y^2-3)$,

$x<0$ のとき $y^2=6x+3$ すなわち $x=\dfrac{1}{6}(y^2-3)$

C の表す図形は右の図の曲線 (閉曲線) で，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left\{-\frac{1}{2}(y^2-3)-\frac{1}{6}(y^2-3)\right\} dy \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{3}} (3-y^2)\, dy \\ &= \frac{4}{3}\left[\,3y-\frac{y^3}{3}\,\right]_0^{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{8}{3}\sqrt{3}} \end{aligned}$$



(2) 円 $x^2+y^2=a$ と $C: y^2=2x-4|x|+3$ の交点は $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ の範囲にあり，2 式から y^2 を消去すると

$$x^2+2x-4|x|+3=a \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\right) \quad \cdots (*)$$

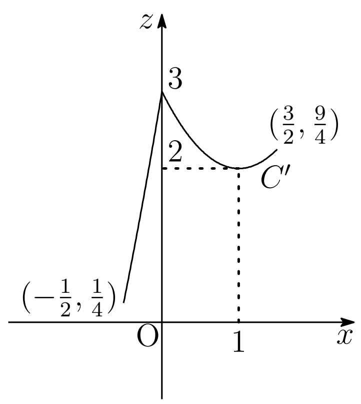
方程式 $(*)$ の実数解は，xz 平面上の曲線

$$C': z=x^2+2x-4|x|+3 \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\right)$$

と直線 $z=a$ の交点の x 座標である．

C' は　$-\frac{1}{2} \leqq x < 0$ のとき　$z=(x+3)^2-6$

　　　$0 \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ のとき　$z=(x-1)^2+2$



円と C はともに x 軸に関して対称であるから，方程式 $(*)$ の実数解について，$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ にある解 1 個に対して交点は 2 個あり，$x=-\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$ に対して交点は 1 個である．よって，求める交点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < a < \frac{1}{4}} \text{ のとき} & \boldsymbol{0} \text{ 個} \\ \boldsymbol{a = \frac{1}{4}} \text{ のとき} & \boldsymbol{1} \text{ 個} \\ \boldsymbol{\frac{1}{4} < a < 2} \text{ のとき} & \boldsymbol{2} \text{ 個} \\ \boldsymbol{a = 2} \text{ のとき} & \boldsymbol{4} \text{ 個} \\ \boldsymbol{2 < a < \frac{9}{4}} \text{ のとき} & \boldsymbol{6} \text{ 個} \\ \boldsymbol{a = \frac{9}{4}} \text{ のとき} & \boldsymbol{5} \text{ 個} \\ \boldsymbol{\frac{9}{4} < a < 3} \text{ のとき} & \boldsymbol{4} \text{ 個} \\ \boldsymbol{a = 3} \text{ のとき} & \boldsymbol{2} \text{ 個} \\ \boldsymbol{3 < a} \text{ のとき} & \boldsymbol{0} \text{ 個} \end{cases}$$

解答 6 (2003) $\boxed{\text{問題 (p.2)}}$

(1) $\triangle$CPA，$\triangle$AQB，$\triangle$BRC に正弦定理を適用すると

$$r_1 = \frac{b}{2\sin\angle\mathrm{CPA}} = \frac{b}{2\sin 60^\circ} = \boldsymbol{\frac{b}{\sqrt{3}}}$$
$$r_2 = \frac{c}{2\sin\angle\mathrm{AQB}} = \frac{c}{2\sin 60^\circ} = \boldsymbol{\frac{c}{\sqrt{3}}}$$
$$r_3 = \frac{a}{2\sin\angle\mathrm{BRC}} = \frac{b}{2\sin 60^\circ} = \boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{3}}}$$

(2) (中心角) $=2\times$ (円周角) であるから

$$\angle\mathrm{CO_1A} = 2\times\angle\mathrm{CPA} = 2\times 60^\circ = 120^\circ$$
$$\angle\mathrm{AO_2B} = 2\times\angle\mathrm{AQB} = 2\times 60^\circ = 120^\circ$$
$$\angle\mathrm{BO_3C} = 2\times\angle\mathrm{BRC} = 2\times 60^\circ = 120^\circ$$

$\triangle\mathrm{CO_1A}$，$\triangle\mathrm{AO_2B}$，$\triangle\mathrm{BO_3C}$ は，二等辺三角形であるから，これらの三角形の底角は 30° である．$\angle\mathrm{O_1AO_2}$ について

$\angle\mathrm{CAB} \leqq 120^\circ$ のとき (図 1)　　$\angle\mathrm{O_1AO_2} = 60^\circ + \angle\mathrm{CAB}$

$\angle\mathrm{CAB} > 120^\circ$ のとき (図 2)　　$\angle\mathrm{O_1AO_2} = 360^\circ - (60^\circ + \angle\mathrm{CAB})$

これらの場合において，ともに　$\cos\angle\mathrm{O_1AO_2} = \cos(60^\circ + \angle\mathrm{CAB})$

図 1

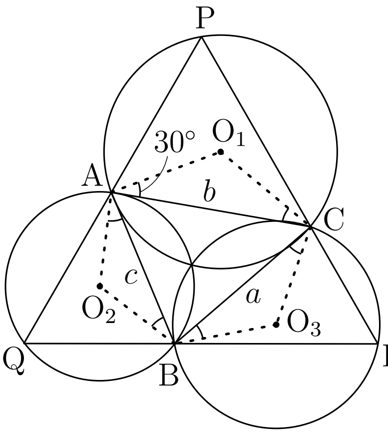
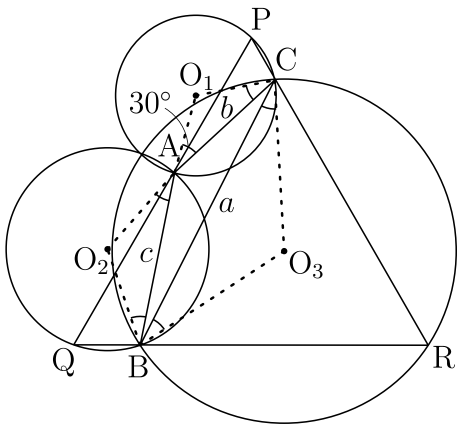


図 2



$\triangle O_1AO_2$ に余弦定理を適用すると，(1) の結果から

$$\begin{aligned}\overline{O_1O_2}^2 &= {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos\angle O_1AO_2\\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3}\cos(60^\circ + \angle\mathrm{CAB})\\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3}(\cos 60^\circ\cos\angle\mathrm{CAB} - \sin 60^\circ\sin\angle\mathrm{CAB})\\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{1}{3}bc\cos\angle\mathrm{CAB} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}bc\sin\angle\mathrm{CAB}\end{aligned}$$

$\triangle ABC$ の面積を S とする．また，余弦定理により

$$\begin{aligned}\overline{O_1O_2}^2 &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{1}{3}bc\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{2\sqrt{3}}{3}S\\ &= \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}S\end{aligned}$$

このとき，式の対称性から

$$\overline{O_2O_3}^2 = \overline{O_3O_1}^2 = \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}S$$

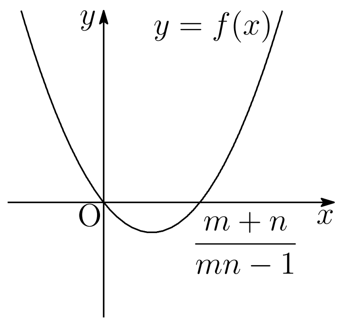
したがって　　$O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$

よって，$\triangle O_1O_2O_3$ は，正三角形である．

解答 7 (2004) 問題 (p.2)

(1) $f(x) = (mx-1)(nx-1) - (x^2+1)$ とおくと

$$f(x) = (mn-1)x^2 - (m+n)x$$



$1 \leqq m < n$ より $mn-1 > 0 \cdots$ ① であるから，$y = f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，x 軸との共有点の x 座標は

$$x = 0,\quad \frac{m+n}{mn-1}$$

ここで

$$\begin{aligned}3 - \frac{m+n}{mn-1} &= \frac{3(mn-1)-(m+n)}{mn-1}\\ &= \frac{(9mn-3m-3n+1)-10}{3(mn-1)}\\ &= \frac{(3m-1)(3n-1)-10}{3(mn-1)} \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

m，n は $1 \leqq m < n$ である整数であるから　$n \geqq 2$

ゆえに　　$3m-1 \geqq 2$，$3n-1 \geqq 5$

$mn-1>0$，$(3m-1)(3n-1) \geqq 2\cdot5$ および ② から

$$3-\frac{m+n}{mn-1} \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{m+n}{mn-1} \leqq 3 \quad \cdots③$$

③ より，$x>3$ のとき　$f(x)>0$

すなわち　$x>3$ のとき　$(mx-1)(nx-1)>x^2+1$

(2)

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}}=\frac{m+n}{mn-1}$$

$1 \leqq m < n$，①，③ より，$\tan(\alpha+\beta)$ がとる整数値は，3 以下の自然数であるから，次の 3 つに場合に分けて求める．

［1］$\tan(\alpha+\beta)=1$ のとき

$$\frac{m+n}{mn-1}=1 \quad \text{ゆえに} \quad (m-1)(n-1)=2$$

このとき，$0 \leqq m-1 < n-1$ に注意して

$$m-1=1,\ \ n-1=2 \quad \text{すなわち} \quad (m,\ n)=(2,\ 3)$$

［2］$\tan(\alpha+\beta)=2$ のとき

$$\frac{m+n}{mn-1}=2 \quad \text{ゆえに} \quad (2m-1)(2n-1)=5$$

このとき，$1 \leqq 2m-1 < 2n-1$ に注意して

$$2m-1=1,\ \ 2n-1=5 \quad \text{すなわち} \quad (m,\ n)=(1,\ 3)$$

［3］$\tan(\alpha+\beta)=3$ のとき

$$\frac{m+n}{mn-1}=3 \quad \text{ゆえに} \quad (3m-1)(3n-1)=10$$

このとき，$2 \leqq 3m-1 < 3n-1$ に注意して

$$3m-1=2,\ \ 3n-1=5 \quad \text{すなわち} \quad (m,\ n)=(1,\ 2)$$

［1］～［3］より　　$\boldsymbol{(m,\ n)=(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3)}$

解答 8 (2010 理系) $\boxed{\text{問題 (p.2)}}$

(1) $$t = \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$x - \dfrac{\pi}{3} = \theta$ とおくと $t = 2\sin\theta \cdots$ ① であるから

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x &= 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left\{2\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6}\right\}\\ &= 2\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos 2\theta\\ &= 2(1 - 2\sin^2\theta) = 2 - (2\sin\theta)^2 = 2 - t^2\end{aligned}$$

また $\quad 2\sin x - 2\sqrt{3}\cos x = 2(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 2t$

よって $\quad y = (2 - t^2) + 2t = \boldsymbol{-t^2 + 2t + 2}$

(2) ① より $0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ のとき $\quad -\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ $\quad$ ゆえに $\quad -\sqrt{3} \leqq t \leqq \sqrt{3}$

(1) の結果から $\quad y = -(t-1)^2 + 3$

よって

$t = 1$ $\quad$ すなわち $\quad \theta = \dfrac{\pi}{6}\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき $\quad$ **最大値 3**

$t = -\sqrt{3}$ $\quad$ すなわち $\quad \theta = -\dfrac{\pi}{3}(x = 0)$ のとき $\quad$ **最小値 $\boldsymbol{-2\sqrt{3} - 1}$**

解答 9 (2007) 問題 (p.2)

(1) $y = -x^2$ を微分すると　　$y' = -2x$

C_1 上の点 $(t, -t^2)$ における接線を ℓ とすると，ℓ の傾きは $-2t$ であるから，接線の方程式は

$$y - (-t^2) = -2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = -2tx + t^2$$

ℓ と C_2 の共有点の x 座標は

$$3(x-1)^2 + a = -2tx + t^2$$

すなわち　$$3x^2 + 2(t-3)x - t^2 + a + 3 = 0$$

の解であり，ℓ と C_2 が接するとき，この方程式は重解をもつので

$$(t-3)^2 - 3\cdot(-t^2 + a + 3) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 4t^2 - 6t - 3a = 0 \quad \cdots ①$$

このとき，ℓ が 2 本存在するためには，① の判別式を D とすると，$D > 0$ であるから

$$D/4 = (-3)^2 - 4\cdot(-3a) > 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a > -\frac{3}{4}}$$

別解

C_1 は上に凸，C_2 は下に凸の放物線であるから，C_1 と C_2 が共有点をもたないとき，C_1，C_2 の両方に接する直線が 2 本存在する．
したがって，$y = -x^2$，$y = 3(x-1)^2 + a$ から y を消去して

$$-x^2 = 3(x-1)^2 + a \quad \text{すなわち} \quad 4x^2 - 6x + a + 3 = 0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，$D < 0$ であるから

$$D/4 = (-3)^2 - 4\cdot(a+3) < 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a > -\frac{3}{4}}$$

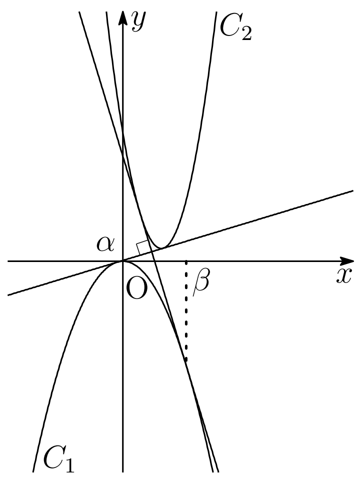
(2) ① の 2 解を α，β とすると，2 点 $(\alpha, -\alpha^2)$，$(\beta, -\beta^2)$ における接線の傾きは，それぞれ 2α，2β であり，これらが直交するとき

$$2\alpha\cdot 2\beta = -1 \quad \text{すなわち} \quad \alpha\beta = -\frac{1}{4}$$

また，① の解と係数の関係から　$\alpha\beta = -\dfrac{3a}{4}$

したがって　$-\dfrac{3a}{4} = -\dfrac{1}{4}$

$a > -\dfrac{3}{4}$ に注意して　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{3}}$



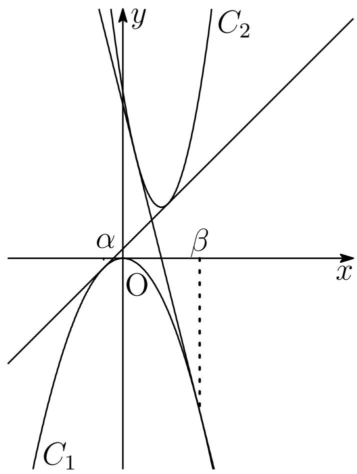
(3) ℓ 上の 2 点 $(\alpha, -\alpha^2)$，$(\beta, -\beta^2)$ における接線を x 軸の正の向きから測った角を，それぞれ θ_1，θ_2 とすると

$$\tan\theta_1 = -2\alpha,\ \tan\theta_2 = -2\beta$$

このとき，$|\,\theta_1 - \theta_2\,| = \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$ であるから $|\tan(\theta_1 - \theta_2)\,| = 1$ より

$$\left|\frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2}\right| = 1$$

したがって　$\left|\dfrac{2(\beta - \alpha)}{1 + 4\alpha\beta}\right| = 1$



平方して整理すると　$4(\beta - \alpha)^2 = (1 + 4\alpha\beta)^2$

したがって　$4\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} = (1 + 4\alpha\beta)^2$

① の解と係数の関係から $\alpha + \beta = \dfrac{3}{2}$，$\alpha\beta = -\dfrac{3a}{4}$ であるから

$$4\left(\frac{9}{4} + 3a\right) = (1 - 3a)^2$$

すなわち　$9a^2 - 18a - 8 = 0$

$a > -\dfrac{3}{4}$ に注意して　$\boldsymbol{a = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{3}}$

解答 10 (2008) 問題 (p.3)

(1) $y=4x^2+3$ を微分すると　$y'=8x$

点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2+3)$ における接線 l の傾きは $8p$ であるから，その方程式は

$$y-(4p^2+3)=8p(x-p)$$

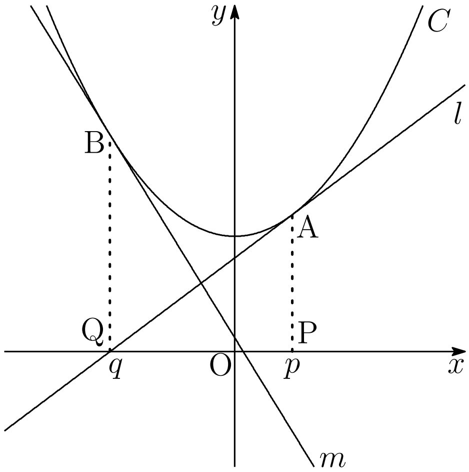
すなわち　$y=8px-4p^2+3$

l は $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ を通るから

$$0=8pq-4p^2+3 \quad \cdots ①$$

$p\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{q=\frac{4p^2-3}{8p}}$$



(2) 点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2+3)$ における接線 m の方程式は，(1) と同様にして

$$y=8qx-4q^2+3$$

を得る．これが点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ を通るから

$$0=8pq-4q^2+3 \quad \cdots ②$$

①，② より　$q=\pm p$

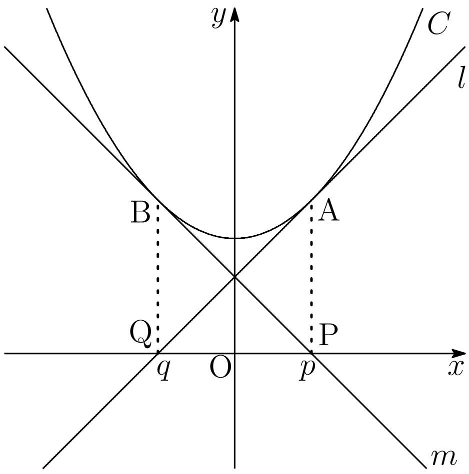
$q=p$ のとき，① より

　$4p^2+3=0$ となり，不適

$q=-p$ のとき，① より

　$0=-12p^2+3$

となり，これを解いて　$\boldsymbol{(p,\ q)=\left(\pm\frac{1}{2},\ \mp\frac{1}{2}\right)}$ **(複号同順)**



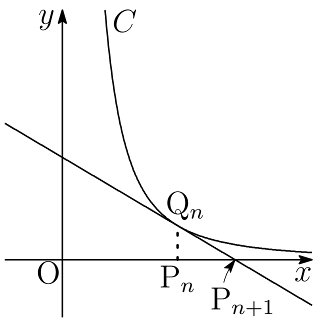
(3) (2) の結果から，2 本の接線の方程式は　$y=4x+2$，$y=-4x+2$

これらの接線と放物線で囲まれた部分は，y 軸に関して対称であるから，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=2\int_0^{\frac{1}{2}}\{(4x^2+3)-(4x+2)\}\,dx\\&=2\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)^2\,dx=2\left[\frac{1}{2\cdot 3}(2x-1)^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

解答 11 (2005) $\boxed{\text{問題 (p.3)}}$

(1) $\mathrm{P}_n(a_n,\ 0)$ より　$\mathrm{Q}_n\left(a_n,\ \dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$



$y=\dfrac{1}{x^2}$ を微分すると　$y'=-\dfrac{2}{x^3}$

Q_n における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{{a_n}^2}=-\frac{2}{{a_n}^3}(x-a_n)$$

ゆえに　$y=-\dfrac{2x}{{a_n}^3}+\dfrac{3}{{a_n}^2}$

この接線の x 軸との交点の x 座標は $y=0$ を代入して　$x=\dfrac{3}{2}a_n$

これが P_{n+1} の x 座標であるから　$a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n$

また，$\mathrm{P}_1(a,\ 0)$ であるから　$\boldsymbol{a_n=a\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}}$

(2) $a>0$ および (1) の結果から

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)\times\frac{1}{{a_n}^2}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a_n-a_n\right)\times\frac{1}{{a_n}^2}\\&=\frac{1}{4a_n}=\frac{1}{4a}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は，初項が $\dfrac{1}{4a}$，公比が $\dfrac{2}{3}$ の無限等比級数である．

公比について $\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$ であるから，収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{4a}\times\frac{1}{1-\dfrac{2}{3}}=\boldsymbol{\frac{3}{4a}}$$

解答 12 (2009 理系) 問題 (p.3)

(1) $x>0$ のとき $1+x>1$ であるから　$\log(1+x)>0$　$\cdots$①

$f(x)=\left(x-\frac{1}{6}x^2\right)-\log(1+x)$ とすると

$$f'(x)=1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{1+x}=\frac{x(2-x)}{3(1+x)}$$

$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$	$\frac{3-4\log 2}{2}$

$\log 2<0.70$ より $\dfrac{3-4\log 2}{2}>0$ であるから，$0<x \leqq 3$ において

$$f(x)>0 \quad \text{すなわち} \quad \log(1+x)<x-\frac{1}{6}x^2 \quad \cdots②$$

①，② より　$0<x \leqq 3$ のとき　$0<\log(1+x)<x-\frac{1}{6}x^2$　$\cdots$③

したがって　$0<x<3$ のとき　$0<\log(1+x)<x-\frac{1}{6}x^2$

(2) $0<a_n<\dfrac{6}{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を (A) とする．

［1］$n=1$ のとき，$0<a_1=a<3$ より

$$0<a_1<\frac{6}{1+1}$$

であるから (A) が成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成り立つ，すなわち

$$0<a_k<\frac{6}{k+1}$$

が成り立つと仮定すると

$$1<1+a_k<1+\frac{6}{k+1}$$

対数をとると　$\log 1<\log(1+a_k)<\log\left(1+\frac{6}{k+1}\right)$

ゆえに　$0<a_{k+1}<\log\left(1+\frac{6}{k+1}\right)$　$\cdots$④

$0 < \dfrac{6}{k+1} \leqq 3$ であるから，③ より

$$\log\left(1+\frac{6}{k+1}\right) < \frac{6}{k+1} - \frac{1}{6}\left(\frac{6}{k+1}\right)^2 = \frac{6k}{(k+1)^2}$$
$$< \frac{6k}{k^2+2k} = \frac{6}{(k+1)+1} \quad \cdots ⑤$$

④，⑤ より

$$0 < a_{k+1} < \frac{6}{(k+1)+1}$$

したがって，$n = k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］，［2］からすべての自然数 n について (A) が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6}{n+1} = 0$$

であるから，はさみうちの原理を (A) に適用して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

解答 13 (2014 理系) $\boxed{\text{問題 (p.4)}}$

(1) $$a_{n+1} = \frac{a_n + r^2}{a_n + 1} \quad \cdots (*)$$

$a_1 = 1$ および上式より，すべての自然数 n に対して　$a_n > 0 \quad \cdots ①$

$(*)$ から
$$a_{n+1} - r = (1-r) \times \frac{a_n - r}{a_n + 1} \quad \cdots (**)$$
$$a_{n+1} + r = (1+r) \times \frac{a_n + r}{a_n + 1}$$

上の 2 式より
$$\frac{a_{n+1} - r}{a_{n+1} + r} = \frac{1-r}{1+r} \times \frac{a_n - r}{a_n + r}$$

ゆえに
$$\frac{a_n - r}{a_n + r} = \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n-1} \times \frac{a_1 - r}{a_1 + r} = \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n} \quad \cdots ②$$

$r > 1$ より
$$\frac{1-r}{1+r} < 0 \quad \cdots ③$$

①，②，③ から

n が偶数のとき　$a_n - r > 0$　すなわち　$a_n > r$

n が奇数のとき　$a_n - r < 0$　すなわち　$a_n < r$

(2) $(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned} a_{n+2} - r &= (1-r) \times \frac{a_{n+1} - r}{a_{n+1} + 1} \\ &= (1-r) \times \frac{(1-r) \times \dfrac{a_n - r}{a_n + 1}}{\dfrac{a_n + r^2}{a_n + 1} + 1} = \boldsymbol{\frac{(1-r)^2(a_n - r)}{2a_n + r^2 + 1}} \end{aligned}$$

(3) (1) の結果から，$a_{2n} > r$．これと (2) の結果から

$$a_{2n+2} - r = \frac{(1-r)^2(a_{2n} - r)}{2a_{2n} + r^2 + 1} < \frac{(1-r)^2(a_{2n} - r)}{2r + r^2 + 1} = \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2 \times (a_{2n} - r)$$

よって
$$\frac{a_{2n+2} - r}{a_{2n} - r} < \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2$$

(4) (3) の結果から，$\lambda=\left(\dfrac{r-1}{r+1}\right)^2$ とおくと

$$0<\frac{a_4-r}{a_2-r}<\lambda,\quad 0<\frac{a_6-r}{a_4-r}<\lambda,\quad \cdots,\quad 0<\frac{a_{2n}-r}{a_{2n-2}-r}<\lambda$$

これらの辺々をかけると

$$0<\frac{a_{2n}-r}{a_2-r}<\lambda^{n-1}\quad \text{ゆえに}\quad 0<a_{2n}-r<(a_2-r)\lambda^{n-1}$$

$r>1$ より，$0<\lambda<1$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_2-r)\lambda^{n-1}=0$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(a_{2n}-r)=0\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_{2n}=r}$$

これと (*) により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+r^2}{a_n+1}=\frac{r+r^2}{r+1}=\boldsymbol{r}$

解説 $r>1$ であるから，② より

$$\left|\frac{a_n-r}{a_n+r}\right|=\left|\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n\right|=\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^n$$

$0<\dfrac{r-1}{r+1}<1$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^n=0$

はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-r}{a_n+r}=0$ よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=r$

また，② より，一般項は

$$a_n=\frac{r\left\{1+\left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^n\right\}}{1-\left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^n}$$

であるから，$-1<\dfrac{1-r}{1+r}<0$ より，直接 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めることもできる．

また，一般項から $\quad a_n-r=\dfrac{2r\left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^n}$

ゆえに n が偶数のとき $a_n-r>0$ すなわち $a_n>r$

n が奇数のとき $a_n-r<0$ すなわち $a_n<r$

解答 14 (2001) $\boxed{\text{問題 (p.4)}}$

(1) $f(t)=e^t-\left(1+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}\right)$ とすると

$$\begin{aligned} f'(t)&=e^t-\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)\\ f''(t)&=e^t-(1+t)\\ f'''(t)&=e^t-1 \end{aligned}$$

$t>0$ のとき $f'''(t)>0$，$f''(0)=0$ であるから　$t>0$ のとき $f''(t)>0$
これから
$t>0$ のとき　$f''(t)>0$，　$f'(0)=0$ であるから　$t>0$ のとき　$f'(t)>0$
さらに
$t>0$ のとき　$f'(t)>0$，　$f(0)=0$ であるから　$t>0$ のとき　$f(t)>0$

したがって，$t>0$ のとき

$$e^t>1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\quad\cdots①$$

このとき

$$\begin{aligned} 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}&=1+t^2+\frac{t}{6}(t^2-3t+6)\\ &=1+t^2+\frac{t}{6}\left\{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right\}\\ &>1+t^2\quad\cdots② \end{aligned}$$

①，② から，$t>0$ のとき

$$e^t>1+t^2$$

上式において $t=-x$ とすると

$$x<0\text{ のとき}\qquad \boldsymbol{e^{-x}>1+x^2}$$

解説

$e^t=1+t+\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^3}{3!}+\cdots$ であるから，$t>0$ において，

$$e^t>1+t+\frac{t^2}{2},\quad e^t>1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}$$

などを活用すればよい．

別解 $x^2+1-e^{-x}=e^{-x}\{(x^2+1)e^x-1\}\quad\cdots①$

$g(x)=(x^2+1)e^x-1$ とおくと

$$g'(x)=2xe^x+(x^2+1)e^x=(x+1)^2e^x$$

$g'(x)=0$ とすると　$x=-1$

$g(x)$ の増減表は，下のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$g'(x)$	$+$	0	$+$	
$g(x)$	$\nearrow$	$2e^{-1}-1$	$\nearrow$	0

したがって，$x<0$ のとき　　$g(x)<0$

よって，① より　　$x<0$ のとき　$\boldsymbol{x^2+1<e^{-x}}$

(2) $x<0$ のとき　$e^{-x}>x^2+1$　ゆえに　$xe^{-x}<x(x^2+1)$

$x=0$ のとき　$xe^{-x}=x(x^2+1)$

$x>0$ のとき　$e^{-x}<1<x^2+1$　ゆえに　$xe^{-x}<x(x^2+1)$

ゆえに，2 つの曲線 $y=xe^{-x}$，$y=x(x^2+1)$ の共有点の x 座標は　$x=0$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{0}\{x(x^2+1)-xe^{-x}\}\,dx\\&=\left[\,\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+(x+1)e^{-x}\,\right]_{-1}^{0}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

解答 15 (2002) 問題 (p.4)

(1) $E : \dfrac{x^2}{8}+y^2=1$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は　$\dfrac{ax}{8}+by=1$

この接線の x 切片，y 切片はそれぞれ，$\dfrac{8}{a}$，$\dfrac{1}{b}$ であるから

$$f(a)=\frac{8}{a}+\frac{1}{b} \quad \cdots ①$$

点 $(a,\ b)$ は E 上の点であるから，$a>0$，$b>0$ に注意して

$$\frac{a^2}{8}+b^2=1 \quad \cdots ② \quad \text{ゆえに} \quad b=\frac{\sqrt{8-a^2}}{2\sqrt{2}} \quad (0<a<2\sqrt{2})$$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{f(a)=\dfrac{8}{a}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8-a^2}}}$

(2) ① は，a の関数であるから，その第 1 次，第 2 次導関数を求めると

$$f'(a)=-\frac{8}{a^2}-\frac{b'}{b^2} \quad \cdots ③$$
$$f''(a)=\frac{16}{a^3}+\frac{2(b')^2}{b^3}-\frac{b''}{b^2} \quad \cdots ④$$

② を a で微分すると　$\dfrac{a}{4}+2bb'=0 \quad \cdots ⑤$　ゆえに　$b'=-\dfrac{a}{8b} \quad \cdots ⑤'$

⑤$'$ を ③ に代入すると

$$f'(a)=-\frac{8}{a^2}+\frac{a}{8b^3}=\frac{(a-4b)(a^2+4ab+16b^2)}{8a^2b^3} \quad \cdots ③'$$

⑤ を a について微分すると　$\dfrac{1}{4}+2(b')^2+2bb''=0$

⑤$'$ をこれに代入し，b'' について解くと　$b''=-\dfrac{1}{4b}-\dfrac{a^2}{64b^3} \quad \cdots ⑥$

⑤$'$，⑥ を ④ に代入して整理すると

$$f''(a)=\frac{16}{a^3}+\frac{1}{4b^3}+\frac{3a^2}{64a^5} \quad \cdots ④'$$

$a>0$，$b>0$ であるから，常に　$f''(a)>0$

ゆえに，$f'(a)=0$ となるとき，$f(a)$ は極小かつ最小である．

③$'$ より，$f'(a)=0$ となるとき　$a=4b \quad \cdots ⑦$

②，⑦ を $a>0$ に注意して解いて　$\boldsymbol{a=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$

解答 16 (2002) 問題 (p.4)

(1) $f(x)=x^2e^{-\frac{x}{a}}$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-\frac{x}{a}}+x^2\left(-\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right) \\ &= -\frac{x}{a}(x-2a)e^{-\frac{x}{a}} \end{aligned}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$a>0$ であるから，増減表は，右のようになる．

よって　　$\boldsymbol{c=2a}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \int_0^c f(x)\,dx &= \int_0^{2a} x^2e^{-\frac{x}{a}}\,dx \\ &= -a\Big[\,(x^2+2ax+2a^2)e^{-\frac{x}{a}}\,\Big]_0^{2a} \\ &= \boldsymbol{2a^3\left(1-\frac{5}{e^2}\right)} \end{aligned}$$

解答 17 (2003) 問題 (p.5)

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{x}{\sqrt{10-x^2}}\right)dx=\Big[\,x+\sqrt{10-x^2}\,\Big]_0^1=\boldsymbol{4-\sqrt{10}}$

(2) $$a_n=\int_0^n g(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}g(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k f(x-k)\,dx$$

$x-k=t$ とおくと，(1) の結果から

$$\int_k^{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k f(x-k)\,dx=\left(\frac{2}{3}\right)^k\int_0^1 f(t)\,dt=(4-\sqrt{10})\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

したがって

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n-1}(4-\sqrt{10})\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= (4-\sqrt{10})\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=3(4-\sqrt{10})\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

よって　　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=3(4-\sqrt{10})}$

解答 18 (2003) $\boxed{\text{問題 (p.5)}}$

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(f'(t)-\cos t)\,dt$ は定数であるから，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(f'(t)-\cos t)\,dt=k$ とおくと

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sin x + k \quad \cdots ① \\
f(x) &= \int_0^x (g(t)+t\cos t)\,dt + \sin x \\
&= \int_0^x (\sin t + k + t\cos t)\,dt + \sin x \\
&= \Big[\,t\sin t + kt\,\Big]_0^x + \sin x \\
&= (x+1)\sin x + kx \quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

したがって，② より

$$
\begin{aligned}
k &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(f'(t)-\cos t)\,dt = \Big[\,f(t)-\sin t\,\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \Big[\,\{(t+1)\sin t + kt\} - \sin t\,\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \Big[\,t\sin t + kt\,\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = k\pi
\end{aligned}
$$

ゆえに　　$k=0$

よって，①，② より

$$\boldsymbol{f(x)=(x+1)\sin x,\quad g(x)=\sin x}$$

(2) (1) の結果から

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \{f(x)-g(x)\}^2\,dx &= \int_0^\pi x^2\sin^2 x\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2(1-\cos 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\,\Big]_0^\pi \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}
$$

解答 19 (2004) $\boxed{\text{問題 (p.5)}}$

(1) 証明する不等式を (A) とする．

$x = 0$ のとき，(A) は自明であるので，$x > 0$ について，(A) が成り立つことを示す．

［1］$0 \leqq t \leqq x$ とすると，$e^t \geqq 1$ であるから

$$\int_0^x e^t\,dt > \int_0^x dt \quad \text{ゆえに} \quad e^x - 1 > x$$

したがって　　$e^x > x$

よって，$n = 1$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］$n = k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると

$$\int_0^x e^t\,dt > \int_0^x \frac{t^k}{k!}\,dt \quad \text{ゆえに} \quad e^x - 1 > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

したがって　　$e^x > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

よって，$n = k+1$ のときも (A) は成り立つ．

［1］,［2］から，すべての自然数 n に対して，(A) が成り立つ．

補足

上の証明において，実際は，$n = 1$ のとき，$e^x > 1 + x$ が成り立つ．
$x > 0$ のとき，次式が成り立つことが，上と同様にして導かれる．

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

(2) (1) の結果より，$x > 0$ のとき　$e^x > \dfrac{x^3}{3!}$

ゆえに　　$0 < x^2 e^{-x} < \dfrac{6}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{6}{x} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = 0$$

(3) $y=xe^{-x}$ を微分すると　$y'=(1-x)e^{-x}$

曲線 $y=xe^{-x}$ の点 $(a,\ ae^{-a})$ における接線の方程式は

$$y-ae^{-a}=(1-a)e^{-a}(x-a)\quad \text{すなわち}\quad y=e^{-a}\{(1-a)x+a^2\}$$

P の座標は，これに $y=0$ を代入して　$\left(\dfrac{a^2}{a-1},\ 0\right)$

曲線 $y=xe^{-x}$ の点 $(a,\ ae^{-a})$ における法線の方程式は

$$y-ae^{-a}=\frac{e^a}{a-1}(x-a)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{e^a}{a-1}(x-a)+ae^{-a}$$

Q の座標は，これに $y=0$ を代入して　$(a-a(a-1)e^{-2a},\ 0)$

P，Q の x 座標を，それぞれ x_p，x_q とすると

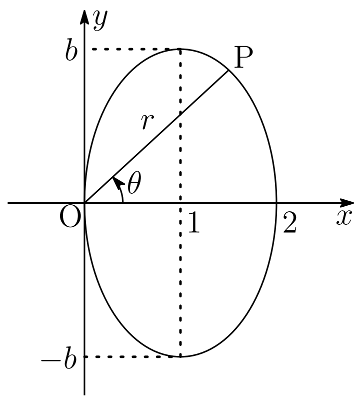
$$\begin{aligned}x_p-x_q&=\frac{a^2}{a-1}-\{a-a(a-1)e^{-2a}\}\\&=1+\frac{1}{a-1}+a(a-1)e^{-2a}\\&=1+\frac{1}{a-1}+\left(1-\frac{1}{a}\right)\cdot a^2e^{-a}\cdot e^{-a}\end{aligned}$$

$l(a)=|x_p-x_q|$ であることと，(2) の結果から $\displaystyle\lim_{a\to\infty}a^2e^{-a}=0$ であることに注意して

$$\boldsymbol{\lim_{a\to\infty}l(a)=1}$$

解答 20 (2004) 問題 (p.6)

(1) $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入して整理すると



$$(r\cos\theta-1)^2+\frac{(r\sin\theta)^2}{b^2}=1$$
$$r^2\cos^2\theta-2r\cos\theta+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=0$$
$$r\left\{r\left(b^2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)-2b^2\cos\theta\right\}=0$$

したがって

$$r=0 \quad \text{または} \quad r=\frac{2b^2\cos\theta}{b^2\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

上式の第 2 式は，$\cos\theta=0$ のとき $r=0$ であるから，E を表す極方程式を次のように定めてよい．

$$\boldsymbol{f(\theta)=\frac{2b^2\cos\theta}{b^2\cos^2\theta+\sin^2\theta}}$$

(2) (1) より，E は，一般性を失うことなく，次のように定めることができる．

$$f(\theta)=\frac{2b^2\cos\theta}{(b^2-1)\cos^2\theta+1} \qquad \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

$f(\theta)$ の最大値について，次の 3 つに場合分けする．

［1］$b^2-1<0$ のとき

$$b^2\leqq(b^2-1)\cos^2\theta+1\leqq1,\quad 0\leqq2b^2\cos\theta\leqq2b^2$$

$\theta=0$ で $(b^2-1)\cos^2\theta+1=b^2$，$2b^2\cos\theta=2b^2$ であるから，$f(\theta)$ は，点 $(2,0)$ で最大値をとり，これは条件に反する

［2］$b^2-1=0$ のとき　$f(\theta)=2\cos\theta$

$\theta=0$ すなわち点 $(2,\ 0)$ で $f(\theta)$ は最大となり，これも条件に反する．

［3］$b^2-1>0$ のとき，$f(\theta)$ は，$\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$ で最小値をとる．$u=\cos\theta$ とおくと，点 $(2,\ 0)$ 以外で最大値をもつので，$0<u<1$ の範囲で，次式が最大値をもつための条件を求めればよい．

$$f(\theta)=\frac{2b^2\cos\theta}{(b^2-1)\cos^2\theta+1}=\frac{2b^2u}{(b^2-1)u^2+1}=\frac{2b^2}{(b^2-1)u+\dfrac{1}{u}}$$

$g(u)=(b^2-1)u+\dfrac{1}{u}$ とおくと，$g(u)$ が $0<u<1$ で最小値もつための条件を求めればよい．

$$g'(u)=b^2-1-\frac{1}{u^2}=\frac{b^2-1}{u^2}\left(u+\frac{1}{\sqrt{b^2-1}}\right)\left(u-\frac{1}{\sqrt{b^2-1}}\right)$$

$g(u)$ の増減は，右のように，b は次式を満たせばよい．

u	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{b^2-1}}$	$\cdots$	1
$g'(u)$		$-$	0	$+$	
$g(u)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$0<\frac{1}{\sqrt{b^2-1}}<1$$

$b>0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{b>\sqrt{2}}$

(3) (2) の結果より　$\cos\theta_0=\dfrac{1}{\sqrt{b^2-1}}$

また，$0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\theta_0=\sqrt{\dfrac{b^2-2}{b^2-1}}$

$$\int_0^{\theta_0}f(\theta)\,d\theta=\int_0^{\theta_0}\frac{2b^2\cos\theta}{b^2-(b^2-1)\sin^2\theta}\,d\theta$$

$t=\sqrt{b^2-1}\sin\theta$ とすると　$\dfrac{dt}{d\theta}=\sqrt{b^2-1}\cos\theta$

θ と t の対応は，右のようになる．よって

θ	$0\longrightarrow\quad\theta_0$
t	$0\longrightarrow\sqrt{b^2-2}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\theta_0}f(\theta)d\theta&=\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\int_0^{\sqrt{b^2-2}}\frac{2b}{b^2-t^2}\,dt\\&=\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\int_0^{\sqrt{b^2-2}}\left(\frac{1}{b+t}+\frac{1}{b-t}\right)dt\\&=\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\Big[\ \log\left|\frac{b+t}{b-t}\right|\ \Big]_0^{\sqrt{b^2-2}}\\&=\boldsymbol{\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\log\frac{b+\sqrt{b^2-2}}{b-\sqrt{b^2-2}}}\end{aligned}$$

解答 21 (2005) $\boxed{\text{問題 (p.6)}}$

(1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を θ について微分すると

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

したがって

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)^2 \\
&= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \\
&= \boldsymbol{\{f'(\theta)\}^2 + \{f(\theta)\}^2}
\end{aligned}$$

(2) $f(\theta) = \sin^3\dfrac{\theta}{3}$ を微分すると

$$f'(\theta) = 3\sin^2\frac{\theta}{3}\cdot\frac{1}{3}\cos\frac{\theta}{3} = \sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$$

したがって

$$\{f'(\theta)\}^2 + \{f(\theta)\}^2 = \left(\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\right)^2 + \left(\sin^3\frac{\theta}{3}\right)^2 = \sin^4\frac{\theta}{3}$$

求める長さを l とすると

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\{f'(\theta)\}^2 + \{f(\theta)\}^2}\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^4\frac{\theta}{3}}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{\theta}{3}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos\frac{2}{3}\theta\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{3}{8}\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

解答 22 (2006) 問題 (p.6)

(1) $n \geqq 2$，$f(x)=(1-x)^3x^n$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(1-x)^2(-1)\cdot x^n + (1-x)^3\cdot nx^{n-1} \\ &= (1-x)^2x^{n-1}\{n-(n+3)x\} \end{aligned}$$

n が奇数のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{n}{n+3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	極大 $\frac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}$	$\searrow$	0	$\searrow$

n が偶数のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{n}{n+3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\frac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}$	$\searrow$	0	$\searrow$

n が奇数のとき　$x=\dfrac{n}{n+3}$ で極大値 $\boldsymbol{\dfrac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}}$

n が偶数のとき　$x=0$ で極小値 **0**,

$x=\dfrac{n}{n+3}$ で極大値 $\boldsymbol{\dfrac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}}$

(2)

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 (1-x)^3x^n\,dx \\ &= \int_0^1 (x^n-3x^{n+1}+3x^{n+2}-x^{n+3})\,dx \\ &= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{3}{n+2}x^{n+2}+\frac{3}{n+3}x^{n+3}-\frac{1}{n+4}x^{n+4}\right]_0^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{n+1}-\frac{3}{n+2}+\frac{3}{n+3}-\frac{1}{n+4}} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n+1}-\frac{3}{n+2}+\frac{3}{n+3}-\frac{1}{n+4} \\ &= \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-2\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right) \end{aligned}$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)=\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$$

により

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

解答 23 (2006) 問題 (p.6)

(1) $u'=e^{\tan t}(\tan t)'=\boldsymbol{\dfrac{e^{\tan t}}{\cos^2 t}}$

(2) $u=e^{\tan t}$ とおくと，(1) の結果および $1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$ に注意して

$$\begin{aligned}
f(x)&=1+\int_{-x}^{x}\frac{1}{e^{\tan t}(1+e^{\tan t})}\cdot\frac{e^{\tan t}}{\cos^2 t}\,dt\\
&=1+\int_{e^{\tan(-x)}}^{e^{\tan x}}\frac{1}{u(1+u)}\,du\\
&=1+\Big[\ \log\left|\frac{u}{1+u}\right|\ \Big]_{e^{-\tan x}}^{e^{\tan x}}\\
&=1+\log\frac{e^{\tan x}}{1+e^{\tan x}}-\log\frac{e^{-\tan x}}{1+e^{-\tan x}}\\
&=1+\log e^{\tan x}\\
&=\boldsymbol{1+\tan x}
\end{aligned}$$

別解 $\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt=\int_{-x}^{0}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt+\int_{0}^{x}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt \quad \cdots ①$

$\displaystyle\int_{-x}^{0}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt$ において $t=-s$ とおくと　$\dfrac{dt}{ds}=-1$

また，t と s の対応は右のようになる．

t	$-x \longrightarrow 0$
s	$x \longrightarrow 0$

よって

$$\begin{aligned}\int_{-x}^{0}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt&=\int_{x}^{0}\frac{1+\tan^2(-s)}{1+e^{\tan(-s)}}\cdot(-1)\,ds\\&=\int_{0}^{x}\frac{1+\tan^2 s}{1+e^{-\tan s}}\,ds\\&=\int_{0}^{x}\frac{e^{\tan s}(1+\tan^2 s)}{e^{\tan s}+1}\,ds\\&=\int_{0}^{x}\frac{e^{\tan t}(1+\tan^2 t)}{1+e^{\tan t}}\,dt\end{aligned}$$

ゆえに，① から次の等式が得られる．

$$\begin{aligned}\int_{-x}^{x}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt&=\int_{0}^{x}\frac{e^{\tan t}(1+\tan^2 t)}{1+e^{\tan t}}\,dt+\int_{0}^{x}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}\,dt\\&=\int_{0}^{x}(1+\tan^2 t)\,dt\\&=\int_{0}^{x}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt=\Big[\ \tan t\ \Big]_{0}^{x}=\tan x\end{aligned}$$

したがって　$\boldsymbol{f(x)=1+\tan x}$

(3) 求める回転体の体積を V とすると，(2) の結果より

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan x)^2\,dx\\&=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1+2\tan x+\tan^2 x)\,dx\\&=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+2\tan x\right)dx\\&=\pi\Big[\ \tan x-2\log|\cos x|\ \Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}\\&=\pi\left(1-2\log\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\&=\boldsymbol{\pi(1+\log 2)}\end{aligned}$$

解答 24 (2007) 問題 (p.7)

(1) 条件から $A\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$ $\cdots$①

行列 $\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$ について $\Delta=0\cdot2-1\cdot1=-1\neq0$

よって $\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}$

① より $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}}$$

(2) $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ が行列 A の表す移動によって点 $(x,\ y)$ に移るとき

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\e^t\end{pmatrix}$$

すなわち　$x=e^t$，$y=-t+e^t$

$-\infty<t<\infty$ より　$x=e^t>0$，$t=\log x$

したがって，求める軌跡 C の方程式は

$$\boldsymbol{y=-\log x+x}$$

(3) C と D の交点の x 座標は

$$-\log x+x=x+\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)$$

$$\log\frac{1}{x}=\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)$$

よって　$\dfrac{1}{x}=e+\dfrac{1}{e}-x$

したがって　$x^2-\left(e+\dfrac{1}{e}\right)x+1=0$　これを解いて　$x=\dfrac{1}{e},\ e$

区間 $\left[\dfrac{1}{e},\ e\right]$ において　$\dfrac{1}{x}-\left(e+\dfrac{1}{e}-x\right)=\dfrac{1}{x}\left\{x^2-\left(e+\dfrac{1}{e}\right)x+1\right\}$

$$=\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{e}\right)(x-e)\leqq0$$

ゆえに　$$e+\frac{1}{e}-x \geqq \frac{1}{x}$$

$$\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right) \geqq \log\frac{1}{x}$$

よって　$$x+\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right) \geqq -\log x + x$$

したがって，$\dfrac{1}{e}<x<e$ において，曲線 D は，曲線 C の上側にある．

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left\{x+\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)-(-\log x + x)\right\} dx \\ &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left\{\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)+\log x\right\} dx \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \log\left(e+\frac{1}{e}-x\right) dx$ において $e+\dfrac{1}{e}-x=t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=-1$

また，x と t の対応は右のようになる．

よって　$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{e}}^{e} \log\left(e+\frac{1}{e}-x\right) dx \\ &= \int_{e}^{\frac{1}{e}} \log t \cdot (-1) dt \\ &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} \log t\, dt = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \log x\, dx \end{aligned}$$

x	$\frac{1}{e} \longrightarrow e$
t	$e \longrightarrow \frac{1}{e}$

したがって　$$S=2\int_{\frac{1}{e}}^{e} \log x\, dx = 2\Big[x\log x - x\Big]_{\frac{1}{e}}^{e} = \boldsymbol{\frac{4}{e}}$$

解説

$\displaystyle\int_{a}^{b} f(a+b-x)\, dx$ において $a+b-x=t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=-1$

x と t の対応は右のようになる．

よって　$$\begin{aligned} &\int_{a}^{b} f(a+b-x)\, dx \\ &= \int_{b}^{a} f(t)\cdot(-1) dt \\ &= \int_{a}^{b} f(t)\, dt = \int_{a}^{b} f(x)\, dx \end{aligned}$$

x	$a \longrightarrow b$
t	$b \longrightarrow a$

解答 25 (2007) 問題 (p.7)

(1) $x \neq 0$ であるから $f(x) = \dfrac{(\log x)^2}{x}$ とすると

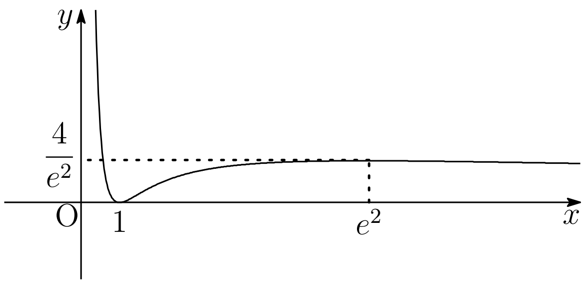
$$f'(x) = \frac{2\log x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot x - (\log x)^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{\log x(2 - \log x)}{x^2}$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようなる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

また
$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{(\log x)^2}{x} = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$$

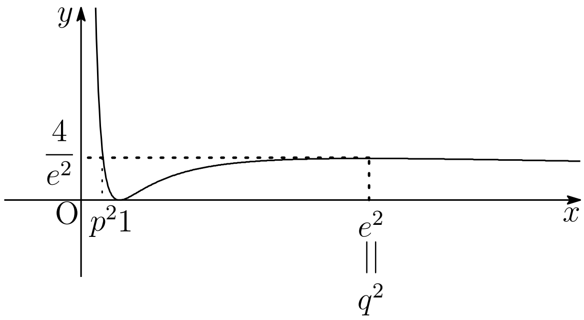
したがって，$y = f(x)$ のグラフは下の図のようになる．



このグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する．したがって

$\boldsymbol{a < 0}$ **のとき**	**0 個**
$\boldsymbol{a > \frac{4}{e^2}}$**，**$\boldsymbol{a = 0}$ **のとき**	**1 個**
$\boldsymbol{a = \frac{4}{e^2}}$ **のとき**	**2 個**
$\boldsymbol{0 < a < \frac{4}{e^2}}$ **のとき**	**3 個**

(2) 解が2個となるのは $a=\dfrac{4}{e^2}$ のときで，$0<p<q$ であるから p^2，q^2 は下の図ような位置関係になる．



$k=\dfrac{e}{e+1}$ とおくと

$$f(k^2)=\frac{(\log k^2)^2}{k^2}=\left(\frac{2\log k}{k}\right)^2=\left\{\frac{2(e+1)}{e}\log\frac{e}{e+1}\right\}^2$$
$$=\frac{4}{e^2}\left\{(e+1)\log\frac{e+1}{e}\right\}^2 \quad \cdots①$$

ここで関数 $g(x)=\log x$ を考え，この関数は区間 $(e,\ e+1)$ で微分可能で，

$$g'(x)=\frac{1}{x}$$

区間 $[e,\ e+1]$ において，平均値の定理を適用すると

$$\frac{\log(e+1)-\log e}{(e+1)-e}=\frac{1}{c},\quad e<c<e+1$$

を同時に満たす c が存在する．よって

$$\frac{1}{e+1}<\log\frac{e+1}{e}<\frac{1}{e}$$

ゆえに $$(e+1)\log\frac{e+1}{e}>1 \quad \cdots②$$

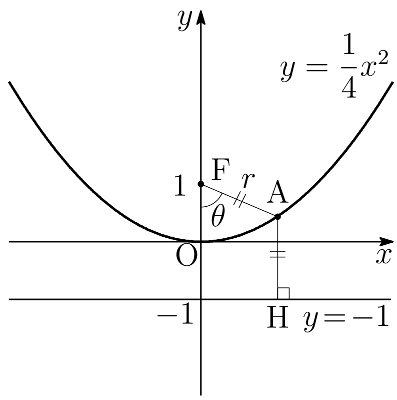
$f(p^2)=\dfrac{4}{e^2}$ であるから，①，② より　$f(k^2)>f(p^2)$

グラフから　$k^2<p^2<1$，$q^2=e^2$

$0<p<q$ より　$\boldsymbol{\dfrac{e}{e+1}<p<1}$，$\boldsymbol{q=e}$

解答 26 (2008) 問題 (p.7)

(1) F は放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ の焦点であり，準線の方程式は $y=-1$ である．



右の図から，放物線上の点 A の y 座標は

$$y=1-r\cos\theta$$

A から準線に下ろした垂線 AH の長さは

$$\begin{aligned}\mathrm{AH}&=(1-r\cos\theta)-(-1)\\&=2-r\cos\theta\end{aligned}$$

放物線上の点 A について，$\mathrm{FA}=\mathrm{AH}$ であるから

$$r=2-r\cos\theta \qquad \text{これを解いて} \qquad \boldsymbol{r=\frac{2}{1+\cos\theta}}$$

(2) (1) の結果から　　$\mathrm{FA}_k=\dfrac{2}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}$

したがって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{FA}_k&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}\\&=\int_0^1\frac{2}{1+\cos\frac{\pi x}{2}}\,dx\\&=\int_0^1\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}\,dx\\&=\left[\frac{4}{\pi}\tan\frac{\pi x}{4}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{4}{\pi}}\end{aligned}$$

解答 27 (2009 理系) 問題 (p.7)

(1) $g(t) = t^6 + 2t^3 - 3$ とし，この関数の原始関数を $G(t)$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{p-x}^{p} g(t)dt = \Big[\ G(t)\ \Big]_{p-x}^{p} \\ &= G(p) - G(p-x) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

① を x について微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 - G'(p-x)\cdot(p-x)' \\ &= -g(p-x)\cdot(-1) \\ &= g(p-x) \\ &= (p-x)^6 + 2(p-x)^3 - 3 \\ &= \{(p-x)^3+1\}^2 - 4 \end{aligned}$$

よって $f'(x)$ が最小となるのは

$$(p-x)^3 + 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = p+1$$

のときである．

(2) ① に $x = p+1$ を代入すると　$f(p+1) = G(p) - G(-1) \quad \cdots ②$

② より $f(p+1)$ が最小となるのは $G(p)$ が最小となるときであるから

$$\begin{aligned} G'(p) &= g(p) = p^6 + 2p^3 - 3 \\ &= (p^3-1)(p^3+3) \\ &= (p-1)(p^2+p+1)(p^3+3) \end{aligned}$$

$G(p)$ の $p > 0$ における増減表は，次のようになる．

p	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$G'(p)$		$-$	0	$+$
$G(p)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって $p = 1$ のとき最小となり，求める最小値は ② から

$$\begin{aligned} G(1) - G(-1) &= \int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (t^6 + 2t^3 - 3)\,dt \\ &= 2\int_{0}^{1} (t^6 - 3)\,dt \\ &= 2\left[\ \frac{t^7}{7} - 3t\ \right]_0^1 = -\boldsymbol{\frac{40}{7}} \end{aligned}$$

解答 28 (2009 理系・医) $\boxed{\text{問題 (p.8)}}$

(1) 与式から　$\sin x-\sqrt{3}\cos x<0$

左辺の三角関数を合成すると

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)<0$$

よって　　$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)<0 \quad \cdots①$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$-\frac{4}{3}\pi \leqq x-\frac{\pi}{3} \leqq \frac{2}{3}\pi$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$-\pi<x-\frac{\pi}{3}<0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{-\frac{2}{3}\pi<x<\frac{\pi}{3}}$$

(2) (1) の結果から

$$-\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{\pi}{6} \text{ において} \quad \sqrt{3}\cos x-\sin x>0$$

ゆえに

$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left|\frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\right|dx\\ &=-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\,dx \quad \cdots②\end{aligned}$$

ここで

$$4\sin x=a(\sqrt{3}\cos x-\sin x)+b(\sqrt{3}\cos x-\sin x)'$$

をみたす定数 a，b を求める．上式の右辺は

$$\begin{aligned}4\sin x&=a(\sqrt{3}\cos x-\sin x)+b(-\sqrt{3}\sin x-\cos x)\\&=(-a-\sqrt{3}\,b)\sin x+(\sqrt{3}\,a-b)\cos x\end{aligned}$$

係数を比較して　$4=-a-\sqrt{3}\,b,\ 0=\sqrt{3}\,a-b$

これを解いて　　$a=-1,\ b=-\sqrt{3}$

ゆえに　　$\dfrac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}=-1-\sqrt{3}\times\dfrac{(\sqrt{3}\cos x-\sin x)'}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}$

したがって

$$
\begin{aligned}
&-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\,dx \\
&=-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \left\{-1-\sqrt{3}\times\frac{(\sqrt{3}\cos x-\sin x)'}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\right\}dx \\
&=-\Big[-x-\sqrt{3}\,\log\left|\sqrt{3}\cos x-\sin x\right|\,\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{0}=\frac{\pi}{3}\quad\cdots ③
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\,dx \\
&=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left\{-1-\sqrt{3}\times\frac{(\sqrt{3}\cos x-\sin x)'}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\right\}dx \\
&=\Big[-x-\sqrt{3}\,\log\left|\sqrt{3}\cos x-\sin x\right|\,\Big]_{0}^{\frac{\pi}{6}}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\log 3\quad\cdots ④
\end{aligned}
$$

③，④ を ② に代入して $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left|\frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\right|dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\log 3}$

別解 (1) の結果から

$$-\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{\pi}{6} \text{ において} \quad \sqrt{3}\cos x - \sin x > 0$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\, dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{2\sin x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}\, dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}\, dx
\end{aligned}$$

ここで，$t = x - \dfrac{\pi}{3}$ とおくと $\quad \dfrac{dt}{dx} = 1$

$$2\sin x = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \sin t + \sqrt{3}\cos t$$

x	$-\frac{\pi}{3} \to 0 \to \frac{\pi}{6}$
t	$-\frac{2}{3}\pi \to -\frac{\pi}{3} \to -\frac{\pi}{6}$

したがって

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{-\frac{\pi}{3}} \left(1 + \sqrt{3}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \left(1 + \sqrt{3}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt \\
&= \Big[\, t + \sqrt{3}\log|\sin t| \,\Big]_{-\frac{2}{3}\pi}^{-\frac{\pi}{3}} - \Big[\, t + \sqrt{3}\log|\sin t| \,\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\log\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3}
\end{aligned}$$

解答 29 (2010 理系) 問題 (p.8)

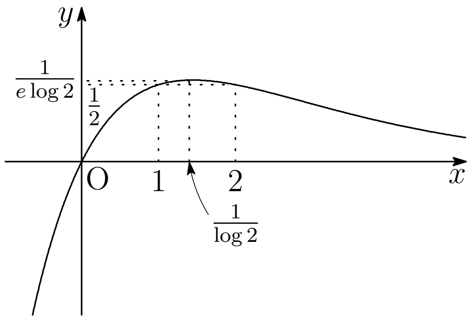
(1) $f(x) = x\,2^{-x}$ を微分すると

$$f'(x) = 2^{-x} - x\,2^{-x}\log 2 = 2^{-x}(1 - x\log 2)$$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = \dfrac{1}{\log 2}$

$f(x)$ の増減は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $\frac{1}{e\log 2}$	$\searrow$



また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$f(t) = f(t+1)$ を解くと　$t\,2^{-t} = (t+1)2^{-(t+1)}$　ゆえに　$t = 1$

$t < 1$ のとき　$g(t) = f(t)$　　すなわち　$g(t) = t\,2^{-t}$

$t \geqq 1$ のとき　$g(t) = f(t+1)$　すなわち　$g(t) = (t+1)\,2^{-(t+1)}$

よって　$$\boldsymbol{g(t) = \begin{cases} t\,2^{-t} & (t < 1) \\ (t+1)\,2^{-(t+1)} & (t \geqq 1) \end{cases}}$$

(2) (1) の結果から [1]

$$\begin{aligned}
\int_0^2 g(t)\,dt &= \int_0^1 t\,2^{-t}\,dt + \int_1^2 (t+1)\,2^{-(t+1)}\,dt \\
&= \int_0^1 t\,2^{-t}\,dt + \int_2^3 t\,2^{-t}\,dt \\
&= \left[-\frac{t\,2^{-t}}{\log 2} - \frac{2^{-t}}{(\log 2)^2}\right]_0^1 + \left[-\frac{t\,2^{-t}}{\log 2} - \frac{2^{-t}}{(\log 2)^2}\right]_2^3 \\
&= \left\{-\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{2(\log 2)^2}\right\} + \left\{\frac{1}{8\log 2} + \frac{1}{8(\log 2)^2}\right\} \\
&= \boldsymbol{-\frac{3}{8\log 2} + \frac{5}{8(\log 2)^2}}
\end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_ri_2010.pdf の $\boxed{3}$ の別解を参照．

解答 30 (2010 理系) $\boxed{\text{問題 (p.8)}}$

(1) $f(x)=\displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}\right)$ を x について微分すると

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\log_4\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}\cdot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)'-\log_4(1+\tan x)\cdot(x)'\\
&=-\log_4\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}-\log_4(1+\tan x)\\
&=-\log_4\left\{1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right\}-\log_4(1+\tan x)\\
&=-\log_4\frac{2}{1+\tan x}-\log_4(1+\tan x)\\
&=-\log_4 2=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(2)
$$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}}\log_4(1+\tan t)\,dt=\mathbf{0}$$

上式および (1) の結果から [2]

$$\begin{aligned}
f(x)&=f\left(\frac{\pi}{8}\right)+\int_{\frac{\pi}{8}}^{x}f'(t)\,dt\\
&=0+\int_{\frac{\pi}{8}}^{x}\left(-\frac{1}{2}\right)dt=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)
\end{aligned}$$

よって $\quad f(0)=-\dfrac{1}{2}\left(0-\dfrac{\pi}{8}\right)=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{16}}$

(3) (2) の結果から $\quad a_1=f(0)=\dfrac{\pi}{16}$, $\quad a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{\pi}{16}$

ゆえに $\quad a_{n+1}-\dfrac{\pi}{24}=-\dfrac{1}{2}\left(a_n-\dfrac{\pi}{24}\right)$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{\pi}{24}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{\pi}{24}$, 公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n-\frac{\pi}{24}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1-\frac{\pi}{24}\right)$$

よって $\quad a_n=\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi}{48}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{24}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}}$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_ri_2010.pdf の $\boxed{4}$ の別解を参照.

解答 31 (2010 医) 問題 (p.8)

(1) $f(x)=\displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{8}\right)$ を x について微分すると

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \log_4\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}\cdot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)' - \log_4(1+\tan x)\cdot(x)' \\
&= -\log_4\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\} - \log_4(1+\tan x) \\
&= -\log_4\left\{1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right\} - \log_4(1+\tan x) \\
&= -\log_4\frac{2}{1+\tan x} - \log_4(1+\tan x) \\
&= -\log_4 2 = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(2)
$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}}\log_4(1+\tan t)\,dt = 0$$

上式および (1) の結果から [3]

$$\begin{aligned}
f(x) &= f\left(\frac{\pi}{8}\right) + \int_{\frac{\pi}{8}}^{x} f'(t)\,dt \\
&= 0 + \int_{\frac{\pi}{8}}^{x}\left(-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)
\end{aligned}$$

よって $\quad f(0) = -\dfrac{1}{2}\left(0-\dfrac{\pi}{8}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{16}}$

(3) (2) の結果から $\quad a_1 = f(0) = \dfrac{\pi}{16}$, $\quad a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{\pi}{16}$

ゆえに $\quad a_{n+1}-\dfrac{\pi}{24} = -\dfrac{1}{2}\left(a_n-\dfrac{\pi}{24}\right)$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{\pi}{24}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{\pi}{24}$, 公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n-\frac{\pi}{24} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1-\frac{\pi}{24}\right)$$

よって $\quad a_n = \dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi}{48}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{24}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}}$

---

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2010.pdf の $\boxed{3}$ の別解を参照.

解答 32 (2010 医) $\boxed{\text{問題 (p.8)}}$

(1) $f(x)=e^{-x}(a\sin px+b\cos px)$ であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(a\sin px+b\cos px)+e^{-x}(ap\cos px-bp\sin px) \\ &= e^{-x}\{-(a+bp)\sin px+(ap-b)\cos px\} \end{aligned}$$

これが $f'(x)=e^{-x}\sin px$ となるので

$$e^{-x}\{-(a+bp)\sin px+(ap-b)\cos px\}=e^{-x}\sin px$$

ゆえに　$$e^{-x}\{-(a+bp+1)\sin px+(ap-b)\cos px\}=0$$

すべての x に対して，上式は成立するので，$x=0,\ \dfrac{\pi}{2p}$ を代入すると

$$ap-b=0,\quad a+bp+1=0$$

よって　$$\boldsymbol{a=-\frac{1}{1+p^2},\quad b=-\frac{p}{1+p^2}}$$

別解　$e^{-x}\sin px$，$e^{-x}\cos px$ を微分すると

$$\begin{aligned} (e^{-x}\sin px)' &= -e^{-x}\sin px+e^{-x}\cdot p\cos px \\ &= -e^{-x}\sin px+pe^{-x}\cos px \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e^{-x}\cos px)' &= -e^{-x}\cos px+e^{-x}(-p\sin px) \\ &= -pe^{-x}\sin px-e^{-x}\cos px \end{aligned}$$

上の 2 式から

$$\begin{pmatrix} (e^{-x}\sin px)' \\ (e^{-x}\cos px)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & p \\ -p & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-x}\sin px \\ e^{-x}\cos px \end{pmatrix}$$

2 次の正方行列 $\begin{pmatrix} -1 & p \\ -p & -1 \end{pmatrix}$ は正則であるから，$\begin{pmatrix} -1 & p \\ -p & -1 \end{pmatrix}^{-1}$ を上式の両辺に左からかけると

$$\frac{1}{1+p^2}\begin{pmatrix} -1 & -p \\ p & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (e^{-x}\sin px)' \\ (e^{-x}\cos px)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x}\sin px \\ e^{-x}\cos px \end{pmatrix}$$

上式の (1,1) 成分から

$$\left(-\frac{1}{1+p^2}e^{-x}\sin px-\frac{p}{1+p^2}e^{-x}\cos px\right)'=e^{-x}\sin px$$

よって　$$\boldsymbol{a=-\frac{1}{1+p^2},\quad b=-\frac{p}{1+p^2}}$$

(2) $p=\dfrac{1}{t}$ とおくと $(t \neq 0)$，(1) の結果から

$$\left(-\frac{t^2}{t^2+1}e^{-x}\sin\frac{x}{t}-\frac{t}{t^2+1}e^{-x}\cos\frac{x}{t}\right)'=e^{-x}\sin\frac{x}{t}$$

したがって

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{t^2} e^{-x}\sin\frac{x}{t}\,dx \\ &= \left[-\frac{t^2}{t^2+1}e^{-x}\sin\frac{x}{t}-\frac{t}{t^2+1}e^{-x}\cos\frac{x}{t}\right]_0^{t^2} \\ &= \boldsymbol{-\frac{t^2}{t^2+1}e^{-t^2}\sin t+\frac{t}{t^2+1}\left(1-e^{-t^2}\cos t\right)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{S(t)}{t^3} &= -\frac{e^{-t^2}}{t^2+1}\times\frac{\sin t}{t}+\frac{1}{t^2+1}\times\frac{1-e^{-t^2}\cos t}{t^2} \\ &= -\frac{e^{-t^2}}{t^2+1}\times\frac{\sin t}{t}+\frac{1}{t^2+1}\left\{\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}+\frac{e^{-t^2}(1-\cos t)}{t^2}\right\} \\ &= -\frac{e^{-t^2}}{t^2+1}\times\frac{\sin t}{t}+\frac{1}{t^2+1}\left\{\frac{e^{-t^2}-1}{-t^2}+e^{-t^2}\times\frac{1-\cos t}{t^2}\right\} \end{aligned}$$

ここで $\displaystyle \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1,\quad \lim_{t\to0}\frac{e^{-t^2}-1}{-t^2}=\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1$

$$\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1}{1+\cos t}\times\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}$$

よって $\displaystyle \lim_{t\to0}\frac{S(t)}{t^3}=-1\times1+1\left(1+1\times\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

解答 33 (2011 理系) 問題 (p.9)

(1) 漸化式により

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 1 - \int_0^x t f_0(t)\,dt = 1 - \int_0^x t\,dt \\
&= \boldsymbol{1 - \frac{1}{2}x^2} \\
f_2(x) &= 1 - \int_0^x t f_1(t)\,dt = 1 - \int_0^x t\left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)dt \\
&= \boldsymbol{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4} \\
f_3(x) &= 1 - \int_0^x t f_2(t)\,dt = 1 - \int_0^x t\left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4\right)dt \\
&= \boldsymbol{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6}
\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$f_n(x) - f_{n-1}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{x^{2n}}{n!} \qquad \cdots (*)$$

と推測し，これを数学的帰納法により証明する．

［1］$n = 1$ のとき，(1) の結果から $(*)$ が成り立つ．

［2］$n = k$ のとき，$(*)$ が成り立つ，すなわち

$$f_k(x) - f_{k-1}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{x^{2k}}{k!}$$

であると仮定すると

$$\begin{aligned}
f_{k+1}(x) - f_k(x) &= 1 - \int_0^x t f_k(t)\,dt - \left(1 - \int_0^x t f_{k-1}(t)\,dt\right) \\
&= -\int_0^x t(f_k(t) - f_{k-1}(t))dt \\
&= -\int_0^x t\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{t^{2k}}{k!}\,dt \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \frac{x^{2(k+1)}}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

したがって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］から，$n \geqq 1$ のすべて自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

(3) (1) の結果より

$$f_1(1)=\frac{1}{2},\ f_2(1)=\frac{5}{8},\ f_3(1)=\frac{29}{48}$$

したがって，$n=1,\ 2,\ 3$ のとき

$$\frac{1}{2}\leqq f_n(1)\leqq\frac{5}{8}\qquad\cdots(**)$$

が成り立つ．

$(*)$ より，$n\geqq 4$ のとき

$$|f_n(1)-f_{n-1}(1)|=\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\leqq\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

上式より

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{n}|f_k(1)-f_{k-1}(1)|&\leqq\frac{1}{4!}\sum_{k=4}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{4!}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\\&<\frac{1}{192}\end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{k=4}^{n}|f_k(1)-f_{k-1}(1)|\geqq\left|\sum_{k=4}^{n}(f_k(1)-f_{k-1}(1))\right|=|f_n(1)-f_3(1)|$$

上の 2 式から　　$|f_n(1)-f_3(1)|<\dfrac{1}{192}$

したがって，$n\geqq 4$ のとき

$$\begin{aligned}f_3(1)-\frac{1}{192}<f_n(1)<f_3(1)+\frac{1}{192}\\\frac{29}{48}-\frac{1}{192}<f_n(1)<\frac{29}{48}+\frac{1}{192}\\\frac{1}{2}<\frac{115}{192}<f_n(1)<\frac{117}{192}<\frac{5}{8}\end{aligned}$$

よって，$n\geqq 1$ のとき，$(**)$ が成り立つ．

解答 34 (2011 理系) $\boxed{\text{問題 (p.9)}}$

(1) $C : x^2 + 4y^2 = 1$ および直線 $l : y = x + b$ を x 軸を元に y 軸方向に 2 倍に拡大した図形を，それぞれ，$C' : x^2 + y^2 = 1$，$l' : y = 2x + 2b$ とする．C と l が異なる 2 つの交点をもつとき，C' と l' は異なる 2 つの交点をもつから

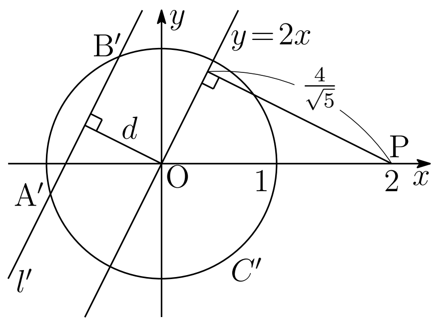
$$\frac{|2b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} < 1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-\frac{\sqrt{5}}{2} < b < \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

(2) C' と l' の交点を A$'$，B$'$ とし，△PAB，△PA$'$B$'$ の面積を，それぞれ，S，S' とすると，$S' = 2S$ が成り立つ．S' が最大となるとき，S は最大となるから，S' を最大にする b の値を求めればよい．

原点 O から l' までの距離を d とすると

$$d = \frac{|2b|}{\sqrt{5}}$$

$$\mathrm{A'B'} = 2\sqrt{1^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{5 - 4b^2}}{\sqrt{5}}$$



S' を最大する b は，右の図から

$$0 < b < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

の範囲で調べればよい．P から l' に引いた垂線の長さを h とすると

$$h = \frac{2b}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{2b+4}{\sqrt{5}}, \quad S' = \frac{1}{2}\mathrm{A'B'}\cdot h = \frac{2}{5}(b+2)\sqrt{5 - b^2}$$

$$S = \frac{1}{2}S' = \frac{1}{5}(b+2)\sqrt{5-4b^2} = \frac{1}{5}\sqrt{(b+2)^2(5-4b^2)}$$

したがって，関数

$$f(b) = (b+2)^2(5-4b^2) \quad \left(0 < b < \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

を最大にする b の値を求めればよい．

$$f'(b) = -2(b+2)(8b^2 + bb - 5)$$

$0 < b < \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ に注意して $f'(b) = 0$ を解くと　$b = \dfrac{\sqrt{14} - 2}{4}$

$f(b)$ の増減は，右のようになる．よって，求める b の値は

$$\boldsymbol{b = \frac{\sqrt{14} - 2}{4}}$$

b	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{14}-2}{2}$	$\cdots$	$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

解答 35 (2011 医) 問題 (p.9)

(1) $C: x^2+4y^2=4$ および直線 $l: y=x+b$ を x 軸を元に y 軸方向に 2 倍に拡大した図形を，それぞれ，$C': x^2+y^2=4$，$l': y=2x+2b$ とする．C と l が異なる 2 つの交点をもつとき，C' と l' は異なる 2 つの交点をもつから

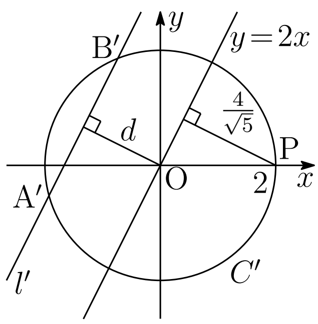
$$\frac{|2b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}<2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-\sqrt{5}<b<\sqrt{5}}$$

(2) C' と l' の交点を A$'$，B$'$ とし，△PAB，△PA$'$B$'$ の面積を，それぞれ，S，S' とすると，$S'=2S$ が成り立つ．S' が最大となるとき，S は最大となるから，S' を最大にする b の値を求めればよい．

原点 O から l' までの距離を d とすると

$$d=\frac{|2b|}{\sqrt{5}}$$

$$\mathrm{A'B'}=2\sqrt{2^2-d^2}=\frac{4\sqrt{5-b^2}}{\sqrt{5}}$$



S' を最大する b は，右の図から

$$0<b<\sqrt{5}$$

の範囲で調べればよい．P から l' に引いた垂線の長さを h とすると

$$h=\frac{2b}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{2b+4}{\sqrt{5}}, \quad S'=\frac{1}{2}\mathrm{A'B'}\cdot h=\frac{4}{5}(b+2)\sqrt{5-b^2}$$

$$S=\frac{1}{2}S'=\frac{2}{5}(b+2)\sqrt{5-b^2}=\frac{2}{5}\sqrt{(b+2)^2(5-b^2)}$$

したがって，関数

$$f(b)=(b+2)^2(5-b^2) \quad (0<b<\sqrt{5})$$

を最大にする b の値を求めればよい．

$$f'(b)=-2(b+2)(2b^2+2b-5)$$

$0<b<\sqrt{5}$ に注意して $f'(b)=0$ を解くと　$b=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}$

$f(b)$ の増減は，右のようになる．よって，求める b の値は

b	(0)	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$	$\cdots$	$(\sqrt{5})$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$		↗	極大	↘	

$$\boldsymbol{b=\frac{-1+\sqrt{11}}{2}}$$

解答 36 (2011 医) 問題 (p.9)

(1) R は，xy 平面上の放物線 $y = x^2 - x + 1\ (0 \leqq x \leqq 2)$ 上を動く．

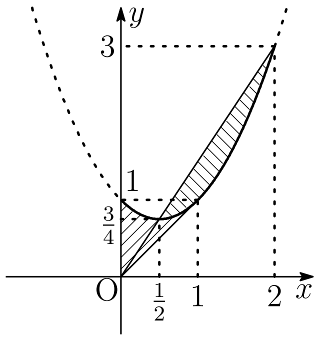
放物線と原点を通る直線 $y = kx$ が接するときの k の値は，2 式から y を消去して

$$x^2 - x + 1 = kx \quad \text{すなわち} \quad x^2 - (k+1)x + 1 = 0$$

この方程式の判別式および重解について，$D = 0$，$x = \dfrac{k+1}{2}$ であるから

$$(k+1)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}1 = 0,\quad 0 \leqq \frac{k+1}{2} \leqq 2$$

したがって　　$k = 1$



よって，原点を通る直線 $y = x$ は，点 $(1,\ 1)$ で接する．原点と点 $(2,\ 3)$ を通る直線 $y = \frac{3}{2}x$ は，放物線との交点 $(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4})$ をもつから，求める面積を S とすると，右の図から

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(x^2 - x + 1) - x\}dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left\{\frac{3}{2}x - (x^2 - x + 1)\right\}dx \\ &= \int_0^1 (x-1)^2\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx = \boldsymbol{\frac{43}{48}} \end{aligned}$$

別解 ($r = \mathrm{OR}$ とする極座標による求積法)

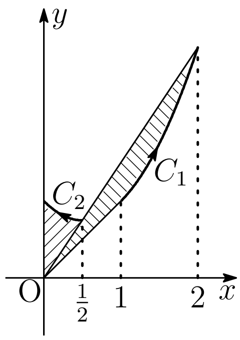
$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2(1 + \tan^2\theta) = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{x^2 - x + 1}{x} \text{ を } x \text{ で微分して} \quad \frac{1}{\cos^2\theta}{\cdot}\frac{d\theta}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

上の 2 式から　　$r^2\,d\theta = (x^2 - 1)\,dx$

右の図から，求める面積 S は

(注意：積分区間は，回転角の向きにとる)



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_{C_1} r^2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{C_2} r^2\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 (x^2 - 1)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^0 (x^2 - 1)\,dx = \boldsymbol{\frac{43}{48}} \end{aligned}$$

(2) K は xy 平面に関して対称であるから，求める体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}S{\cdot}\mathrm{OP} \times 2 = \frac{1}{3}{\cdot}\frac{43}{48}{\cdot}1 \times 2 = \boldsymbol{\frac{43}{72}}$$

解答 37 (2012 理系) 問題 (p.10)

問 1 $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^t(\sin t+\cos t)dt=\Big[\,e^t\sin t\,\Big]_0^x=\boldsymbol{e^x\sin x}$

$g(x)=\displaystyle\int_0^x e^t(\cos t-\sin t)dt=\Big[\,e^t\cos t\,\Big]_0^x=\boldsymbol{e^x\cos x-1}$

問 2 (1) $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^t(\sin t+\cos t)dt$ と $g(x)=\displaystyle\int_0^x e^t(\cos t-\sin t)dt$ をそれぞれ x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x)&=e^x\sin x+e^x\cos x\\ g'(x)&=e^x\cos x-e^x\sin x \end{aligned}$$

問 1 の結果から $e^x\sin x=f(x)$，$e^x\cos x=g(x)+1$ を代入すると

$$\begin{aligned} f'(x)&=f(x)+\{g(x)+1\}\\ g'(x)&=\{g(x)+1\}-f(x) \end{aligned}$$

これらを $(n-1)$ 回微分すると $(n\geqq 2)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f^{(n)}(x)}&\boldsymbol{=f^{(n-1)}(x)+g^{(n-1)}(x)}\\ \boldsymbol{g^{(n)}(x)}&\boldsymbol{=-f^{(n-1)}(x)+g^{(n-1)}(x)} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} &\{f^{(n)}(x)\}^2+\{g^{(n)}(x)\}^2\\ =&\{f^{(n-1)}(x)+g^{(n-1)}(x)\}^2+\{-f^{(n-1)}(x)+g^{(n-1)}(x)\}^2\\ =&2\big[\{f^{(n-1)}(x)\}^2+\{g^{(n-1)}(x)\}^2\big] \end{aligned}$$

したがって

$$\{f^{(n)}(x)\}^2+\{g^{(n)}(x)\}^2=2^{n-1}\big[\{f'(x)\}^2+\{g'(x)\}^2\big]$$

さらに

$$\begin{aligned} \{f'(x)\}^2+\{g'(x)\}^2&=(e^x\sin x+e^x\cos x)^2+(e^x\cos x-e^x\sin x)\\ &=2e^{2x} \end{aligned}$$

よって，上の 2 式より　$\{f^{(n)}(x)\}^2+\{g^{(n)}(x)\}^2=2^{n-1}{\cdot}2e^{2x}=\boldsymbol{2^n e^{2x}}$

(3) (2) の結果から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2a}}{\{f^{(n)}(a)\}^2+\{g^{(n)}(a)\}^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2a}}{2^n e^{2a}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{1}$$

補足

$n \geqq 2$ のとき，問 2(1) の結果から

$$\begin{pmatrix} f^{(n)}(x) \\ g^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(n-1)}(x) \\ g^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

ここで，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ であることから

$$\begin{pmatrix} f^{(n)}(x) \\ g^{(n)}(x) \end{pmatrix} = (\sqrt{2})^{n-1} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4}(n-1) & \sin\frac{\pi}{4}(n-1) \\ -\sin\frac{\pi}{4}(n-1) & \cos\frac{\pi}{4}(n-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$$

また，$\begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} = \sqrt{2}e^x \begin{pmatrix} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{pmatrix} f^{(n)}(x) \\ g^{(n)}(x) \end{pmatrix} = (\sqrt{2})^n e^x \begin{pmatrix} \sin\left(x + \frac{n}{4}\pi\right) \\ \cos\left(x + \frac{n}{4}\pi\right) \end{pmatrix}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立する．

解答 38 (2012 理系) 問題 (p.10)

(1) $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に $\tan\theta = a$ を代入すると

$$1+a^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2\theta = \frac{1}{1+a^2}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ により，$\cos\theta>0$ であるから $\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}}$

(2) $x>0$ に対して，次式を満たす θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をとる．

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

このとき，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ であるから

$$\sin t - x\cos t = \sqrt{1+x^2}\sin(t-\theta)$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin t - x\cos t\right| dt \\ &= \sqrt{1+x^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin(t-\theta)\right| dt \end{aligned}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x^2}\left\{\int_0^{\theta}\{-\sin(t-\theta)\}\,dt + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\sin(t-\theta)\,dt\right\} \\ &= \sqrt{1+x^2}\left\{\Big[\cos(t-\theta)\Big]_0^{\theta} + \Big[-\cos(t-\theta)\Big]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\right\} \\ &= \sqrt{1+x^2}(2-\sin\theta-\cos\theta) \\ &= \boldsymbol{2\sqrt{1+x^2}-x-1} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果を微分すると

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{1+x^2}(2x + \sqrt{1+x^2})}
\end{aligned}
$$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小 $\sqrt{3}-1$	$\nearrow$

よって，$\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{3}}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\sqrt{3}-1}$ をとる．

別解

(2) により

$$
\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad x = \tan\theta
$$

ここで，$g(\theta) = f(x)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
g(\theta) &= \frac{2}{\cos\theta} - \tan\theta - 1 \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \\
g'(\theta) &= \frac{2\sin\theta - 1}{\cos^2\theta}
\end{aligned}
$$

したがって，$g(\theta)$ の増減表は，次のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$g(\theta)$		$\searrow$	極小 $\sqrt{3}-1$	$\nearrow$	

また，$x = \tan\theta$ により，$\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

よって，$\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{3}}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\sqrt{3}-1}$ をとる．

解答 39 (2012 医) 問題 (p.10)

(1) x の値に対して，次式を満たす θ $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ をとる．

$$\sin\theta = \frac{ax}{\sqrt{1+a^2x^2}}$$

このとき，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2x^2}}$ であるから

$$\sin t - ax\cos t = \sqrt{1+a^2x^2}\sin(t-\theta)$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bigl|\sin t - ax\cos t\bigr|\,dt \\ &= \sqrt{1+a^2x^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \bigl|\sin(t-\theta)\bigr|\,dt \end{aligned}$$

i) $x \geqq 0$ のとき，$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+a^2x^2}\left\{\int_0^{\theta}\{-\sin(t-\theta)\}\,dt + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\sin(t-\theta)\,dt\right\} \\ &= \sqrt{1+a^2x^2}\left\{\Bigl[\ \cos(t-\theta)\ \Bigr]_0^{\theta} + \Bigl[\ -\cos(t-\theta)\ \Bigr]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\right\} \\ &= \sqrt{1+a^2x^2}(2-\sin\theta-\cos\theta) \\ &= 2\sqrt{1+a^2x^2} - ax - 1 \end{aligned}$$

ii) $x < 0$ のとき，$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+a^2x^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t-\theta)\,dt \\ &= \sqrt{1+a^2x^2}\Bigl[-\cos(t-\theta)\ \Bigr]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{1+a^2x^2}\,(-\sin\theta+\cos\theta) \\ &= -ax+1 \end{aligned}$$

i)，ii) より $\quad \boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{1+a^2x^2} - ax - 1 & (x \geqq 0) \\ -ax+1 & (x < 0) \end{cases}}$

(2) $x<0$ で $f(x)$ は単調減少.

$x \geqq 0$ のとき

$$f'(x)=\frac{2a^2x}{\sqrt{1+a^2x^2}}-a=\frac{a(2ax-\sqrt{1+a^2x^2})}{\sqrt{1+a^2x^2}}$$
$$=\frac{a(3a^2x^2-1)}{\sqrt{1+a^2x^2}(2ax+\sqrt{1+a^2x^2})}$$

したがって, $f(x)$ の増減表は, 次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$	極小 $\sqrt{3}-1$	$\nearrow$

よって, $\boldsymbol{x=\frac{1}{\sqrt{3}a}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\sqrt{3}-1}$ をとる.

別解

$x<0$ において, $f(x)$ は単調減少であるから, $x \geqq 0$ において, $f(x)$ の最小値を調べればよい. (1) により

$$\sqrt{1+a^2x^2}=\frac{1}{\cos\theta},\quad ax=\tan\theta$$

ここで, $g(\theta)=f(x)$ とおくと

$$g(\theta)=\frac{2}{\cos\theta}-\tan\theta-1\quad\left(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$
$$g'(\theta)=\frac{2\sin\theta-1}{\cos^2\theta}$$

したがって, $g(\theta)$ の増減表は, 次のようになる.

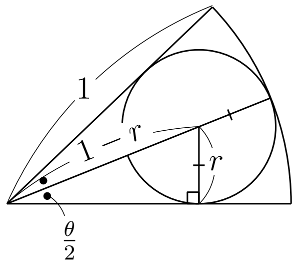
θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$g(\theta)$	1	$\searrow$	極小 $\sqrt{3}-1$	$\nearrow$	

また, $ax=\tan\theta$ により, $\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき $x=\frac{1}{\sqrt{3}a}$

よって, $\boldsymbol{x=\frac{1}{\sqrt{3}a}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\sqrt{3}-1}$ をとる. ■ (2012 医)

解答 40 (2013 理系・医) 問題 (p.11)

(1) $r = f(\theta)$ とおくと，右の図から



$$(1-r)\sin\frac{\theta}{2} = r \quad \cdots ①$$

ゆえに $\qquad r = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$

よって $\qquad \boldsymbol{f(\theta) = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}}$

(2) $0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\qquad \sin\dfrac{\theta}{2} > 0$，$\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$

また，$r > 0$ であるから，① より $\quad 1 - r > 0$

① の両辺を θ で微分すると

$$-r'\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}(1-r)\cos\frac{\theta}{2} = r'$$

ゆえに $\qquad \left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)r' = \dfrac{1}{2}(1-r)\cos\dfrac{\theta}{2} \quad \cdots ②$

② において，$1+\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$，$1-r > 0$，$\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$ であるから $\quad r' > 0$

さらに，② の両辺を θ で微分すると

$$\frac{1}{2}r'\cos\frac{\theta}{2} + \left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)r'' = -\frac{1}{2}r'\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}(1-r)\sin\frac{\theta}{2}$$

ゆえに $\qquad \left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)r'' = -\left\{r'\cos\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{1}{4}(1-r)\sin\dfrac{\theta}{2}\right\}$

上式において $r' > 0$，$1-r > 0$，$\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$，$\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$ であるから $\quad r'' < 0$

したがって $\qquad 0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ において $\qquad r' > 0$，$r'' < 0$

よって $\qquad 0 < \theta < \pi$ の範囲で，$f(\theta)$ は単調増加，$f'(\theta)$ は単調減少．

(3) $x = \dfrac{\theta}{2}$ とおくと $\dfrac{d\theta}{dx} = 2$

θ	$\frac{\pi}{3} \to \frac{\pi}{2}$
x	$\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{4}$

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x+\sin x-1}{\cos^2 x}\,dx \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx \\
&= 2\Big[\,x+\frac{1}{\cos x}-\tan x\,\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{6}-2+2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}
\end{aligned}
$$

解答 41 (2014 理系・医) 問題 (p.127)

(1) $\cos\theta - \sin\theta = a\sin\theta\cos\theta \quad (0<\theta<\pi) \qquad \cdots(*)$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta \neq 0$ であるから $a = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\cos\theta}$

$f(\theta) = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\cos\theta}$ とおくと

$$f'(\theta) = -\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$f'(\theta)<0$ であるから，$f(\theta)$ は単調減少．

$$\lim_{\theta\to+0} f(\theta) = \infty, \qquad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} f(\theta) = -\infty$$

よって，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$f(\theta)=a$ をみたす θ はただ 1 つ存在する．

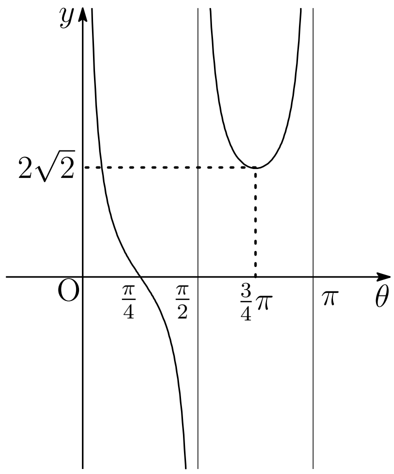
(2) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ は，$(*)$ の解ではない．$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

$$
\begin{aligned}
f'(\theta) &= -\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = -\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta} \\
&= -\frac{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}
\end{aligned}
$$

$f(\theta)$ の増減表は次のようなる．

θ	$(\frac{\pi}{2})$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0} f(\theta)=\infty, \quad \lim_{\theta\to\pi-0} f(\theta)=\infty$$



(1) および上の結果から，$y=f(\theta)$ のグラフは右のようになる．

$y=f(\theta)$ と $y=a$ の共有点の個数が，$(*)$ の解の個数であるから

$$\begin{cases} 0<a<2\sqrt{2}\text{のとき} & 1\text{個} \\ a=2\sqrt{2}\text{のとき} & 2\text{個} \\ 2\sqrt{2}<a\text{のとき} & 3\text{個} \end{cases}$$

解答 42 (2014 医) 問題 (p.11)

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

正の実数 a，b，c について

$$f(a)+f(b)+f(c)\leqq 3f(e)=\frac{3}{e}<\frac{3}{2.7}<2\times 0.6<2\log 2=\log 4$$

したがって　$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$

(2) a，b，c，d は自然数であるから

$$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc} \qquad \cdots(*)$$

の両辺の自然対数をとると

$$bc\log a+ca\log b+ab\log c=abc\log d$$

ゆえに　$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}=\log d$

$d \geqq 3$ であるから，上式および (1) の結果から　$\boldsymbol{d = 3}$

(1) の増減表から $f(1) < f(2),\ \ f(3) > f(4) > f(5) > \cdots$

また　　$f(2) = \dfrac{\log 2}{2} = \dfrac{3\log 2}{6} = \dfrac{\log 8}{6},$

$$f(3) = \frac{\log 3}{3} = \frac{2\log 3}{6} = \frac{\log 9}{6}$$

ゆえに　　$f(1) < f(2) < f(3) > f(4) > f(5) > \cdots$

$$\frac{\log a}{a} \leqq \frac{\log 3}{3},\quad \frac{\log b}{b} \leqq \frac{\log 3}{3},\quad \frac{\log c}{c} \leqq \frac{\log 3}{3}$$

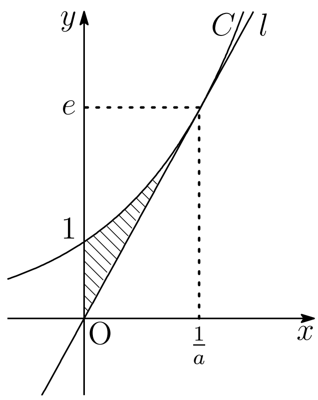
したがって　　$\dfrac{\log a}{a} + \dfrac{\log b}{b} + \dfrac{\log c}{c} \leqq \log 3$

上式において，等号が成り立つ a，b，c を求めればよい．

よって　　$\boldsymbol{a = b = c = 3}$

解答 43 (2014 理系) 問題 (p.11)

(1) $y = e^{ax}$ より　$y' = ae^{ax}$



C 上の点 $(t,\ e^{at})$ における接線の方程式は

$$y - e^{at} = ae^{at}(x - t)$$

ゆえに　　$y = ae^{at}x + (1 - at)e^{at}$

これが原点を通るから

$$1 - at = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{a}$$

l の方程式は　　$y = aex$

よって　　$V_1 = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} (e^{ax})^2\,dx - \frac{1}{3}\cdot\pi e^2\cdot\frac{1}{a} = \frac{\pi}{2a}\Big[\, e^{2ex} \,\Big]_0^{\frac{1}{a}} - \frac{\pi e^2}{3a}$

$$= \frac{\pi(e^2 - 1)}{2a} - \frac{\pi e^2}{3a} = \boldsymbol{\frac{\pi(e^2 - 3)}{6a}}$$

(2) $y = e^{ax}$ より　$x = \dfrac{1}{a}\log y$

よって $$V_2=\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{1}{a}\right)^2e-\frac{\pi}{a^2}\int_1^e(\log y)^2\,dy$$
$$=\frac{\pi e}{3a^2}-\frac{\pi}{a^2}\Big[\,y\{(\log y)^2-2\log y+2\}\,\Big]_1^e$$
$$=\frac{\pi e}{3a^2}-\frac{\pi(e-2)}{a^2}=\boldsymbol{\frac{2\pi(3-e)}{3a^2}}$$

別解 $V_2=2\pi\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}}x(e^{ax}-aex)\,dx=2\pi\Big[\,e^{ax}\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right)-\frac{ae}{3}x^3\,\Big]_0^{\frac{1}{a}}=\frac{2\pi(3-e)}{3a^2}$

バウムクーヘン型求積法

$a\leqq x\leqq b$ の範囲で $f(x)\geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

(3) (1)，(2) の結果を $V_1=V_2$ に代入して

$$\frac{\pi(e^2-3)}{6a}=\frac{2\pi(3-e)}{3a^2}\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{a=\frac{4(3-e)}{e^2-3}}$$

解答 44 (2014 医) 問題 (p.12)

(1) $\dfrac{1}{\sin x\cos x}=\dfrac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos x}=\tan x+\dfrac{1}{\tan x}$ より

$$y=\tan x+\frac{1}{\tan x}\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

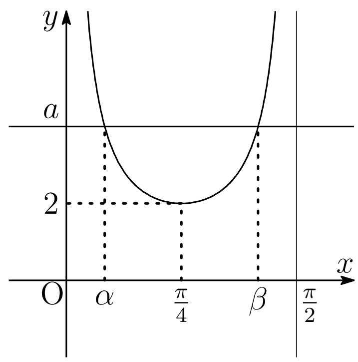
とおく．上式と $y=a$ から y を消去すると

$$\tan x+\frac{1}{\tan x}=a\quad\text{ゆえに}\quad\tan^2x-a\tan x+1=0\quad\cdots(*)$$

この方程式の解が α，β であるから $(\alpha<\beta)$，$a>2$ に注意して

$$\boldsymbol{\tan\alpha=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\quad\tan\beta=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}$$

(2) $(*)$ の解と係数の関係により，$\tan\alpha\tan\beta = 1$ に注意すると，求める面積 S は，



$$
\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sin x\cos x}dx = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx \\
&= \int_\alpha^\beta \frac{(\tan x)'}{\tan x}dx = \Big[\ \log\tan x\ \Big]_\alpha^\beta \\
&= \log\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \log\tan^2\beta \\
&= \boldsymbol{2\log\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}
\end{aligned}
$$

(3) $\tan\alpha\tan\beta = 1$，$\tan\beta - \tan\alpha = \sqrt{a^2-4}$ より，求める体積 V は

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int_\alpha^\beta \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx \\
&= \int_\alpha^\beta \left(1+\frac{1}{\tan^2 x}\right)(\tan x)'dx = \int_\alpha^\beta \left\{(\tan x)' + \frac{(\tan x)'}{\tan^2 x}\right\}dx \\
&= \left[\ \tan x - \frac{1}{\tan x}\ \right]_\alpha^\beta = \left(\tan\beta - \frac{1}{\tan\beta}\right) - \left(\tan\alpha - \frac{1}{\tan\alpha}\right) \\
&= (\tan\beta - \tan\alpha) - (\tan\alpha - \tan\beta) = 2(\tan\beta - \tan\alpha) = 2\sqrt{a^2-4}
\end{aligned}
$$

よって　　$\boldsymbol{V = 2\pi\sqrt{a^2-4}}$

解答 45 (2001) 問題 (p.12)

(1) S が偶数になるのは，3 枚が偶数または 1 枚が偶数で 2 枚が奇数の場合である．したがって，S が 2 の倍数になる確率は

$$
\frac{{}_6\mathrm{C}_3 + {}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_9\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_3} = \frac{20+6\times 36}{455} = \boldsymbol{\frac{236}{455}}
$$

(2) 3 で割った余りが 0 となる数の札が 3 枚，1 となる数の札が 5 枚，2 となる数の札が 7 枚あり，S が 3 の倍数となる余りの組み合わせは $(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 1)$，$(2,\ 2,\ 2)$，$(0,\ 1,\ 2)$ である．したがって，S が 3 の倍数になる確率は

$$
\frac{1+{}_5\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_3} = \frac{1+10+35+105}{455} = \boldsymbol{\frac{151}{455}}
$$

解答 46 (2002) 問題 (p.12)

$a_n \leqq 9$ となる確率を p_n とする．

［1］$n=1$ のとき　すべての X_1 に対して $a_1 = X_1 \leqq 9$ であるから　$p_1 = 1$

［2］$n=2$ のとき

1 の目が 2 回出るのは，1 通り

1 の目が 1 回だけ出るのは，残りの目が 1 以外で　$5 \times {}_2\mathrm{C}_1$ (通り)

1 の目が出ないのは，次の 6 通り

$$(X_1,\ X_2) = (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)$$

したがって　$p_2 = \dfrac{1 + 5 \times {}_2\mathrm{C}_1 + 6}{6^2} = \dfrac{17}{36}$

［3］$n \geqq 3$ のとき，1 以外の目が出る回数は 3 回以内であることに注意して

1 の目が n 回出るのは，1 通り

1 の目が $(n-1)$ 回だけ出るのは，残りの目が 1 以外で　$5 \times {}_n\mathrm{C}_1$ (通り)

1 の目が $(n-2)$ 回だけ出るのは，残りの目が次の組合せで　$6 \times {}_n\mathrm{C}_2$ (通り)

$$(2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)$$

1 の目が $(n-3)$ 回だけ出るのは，残りの目が $(2,\ 2,\ 2)$ で　${}_n\mathrm{C}_3$ (通り)

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{6^n}(1 + 5 \times {}_n\mathrm{C}_1 + 6 \times {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3) \\ &= \frac{1}{6^n}\left\{1 + 5n + 3n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right\} \\ &= \frac{1}{6^{n+1}}(n^3 + 15n^2 + 14n + 6) \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

① は，$n=1$，$n=2$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{6^{n+1}}(n^3 + 15n^2 + 14n + 6)}$$

解答 47 (2003) $\boxed{\text{問題 (p.12)}}$

(1) 6 枚から 2 枚取り出す方法は $\quad {}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15$ (通り)

$m = n$ となるのは，$(m,\ n) = (1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3)$ の 3 通り

よって，求める確率は $\quad \dfrac{3}{15} = \boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

(2) 点 $(m,\ n)$ から直線 $y = x + c$ $(x - y + c = 0)$ までの距離を d とすると

$$d = \frac{|m - n + c|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|m - n + c|}{\sqrt{2}}$$

よって $\quad S = d^2 = \dfrac{1}{2}(m - n + c)^2$

$m - n = 1$ となるのは，$(m,\ n) = (2,\ 1),\ (3,\ 2)$ で，その確率は

$$\frac{2 \times 2}{15} + \frac{2 \times 2}{15} = \frac{8}{15}$$

$m - n = 2$ となるのは，$(m,\ n) = (3,\ 1)$ で，その確率は

$$\frac{2 \times 2}{15} = \frac{4}{15}$$

よって，(1) および上の結果から，S の期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}c^2 \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2}(1 + c)^2 \times \frac{8}{15} + \frac{1}{2}(2 + c)^2 \times \frac{4}{15} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{30}(15c^2 + 32c + 24)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $\quad E = \dfrac{1}{2}\left(c + \dfrac{16}{15}\right)^2 + \dfrac{52}{225}$

よって，期待値 E が最小となる c の値は $\quad \boldsymbol{c = -\dfrac{16}{15}}$

解答 48 (2005) $\boxed{\text{問題 (p.12)}}$

(1) $X=1$ から $X=4$ までのそれぞれの確率の和は 1 であるから

$$2a+b+b+a=1 \quad \text{これを } b \text{ について解くと} \quad b=\frac{1-3a}{2}$$

また，$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ に注意して $\quad \boldsymbol{b=\frac{1-3a}{2} \quad \left(0 \leqq a \leqq \frac{1}{3}\right)}$

(2) ともに 1 である確率は $\quad (2a)^2=4a^2$

ともに 2 以下である確率は $\quad (2a+b)^2=\left(2a+\frac{1-3a}{2}\right)^2=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}$

ともに 3 以下である確率は $\quad (1-a)^2=a^2-2a+1$

ゆえに

$$\begin{aligned}
P(Z=1)&=4a^2\\
P(Z=2)&=\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)-4a^2=-\frac{15}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\\
P(Z=3)&=(a^2-2a+1)-\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}a^2-\frac{5}{2}a+\frac{3}{4}\\
P(Z=4)&=1-(a^2-2a+1)=-a^2+2a
\end{aligned}$$

よって，m は

$$\begin{aligned}
m&=\sum_{k=1}^{4}k\cdot P(Z=k)\\
&=1\cdot 4a^2+2\left(-\frac{15}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)+3\left(\frac{3}{4}a^2-\frac{5}{2}a+\frac{3}{4}\right)+4\left(-a^2+2a\right)\\
&=\boldsymbol{-\frac{21}{4}a^2+\frac{3}{2}a+\frac{11}{4} \quad \left(0 \leqq a \leqq \frac{1}{3}\right)}
\end{aligned}$$

(3) したがって，(2) の結果から

$$m=-\frac{21}{4}\left(a-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{20}{7} \quad \left(0 \leqq a \leqq \frac{1}{3}\right)$$

よって，m は，$\boldsymbol{a=\frac{1}{7}}$ で最大となる．

解答 49 (2006) $\boxed{\text{問題 (p.13)}}$

(1) $y = ax^2 + 2x - b = a\left(x + \dfrac{1}{a}\right)^2 - \dfrac{1}{a} - b$

$a > 0$ であるから　最小値は $-\dfrac{1}{a} - b$

条件より　$-\dfrac{1}{a} - b < -5$　すなわち　$5 - b < \dfrac{1}{a}$

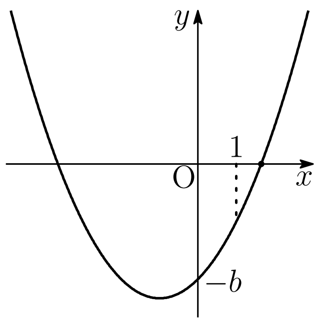
$0 < \dfrac{1}{a} \leqq 1$ であり，$5 - b$ は整数であるから

$$5 - b \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = 5,\ 6$$

また，a は 1，2，3，4，5，6 の 6 通りある．

よって　$\dfrac{6 \times 2}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(2) $f(x) = ax^2 + 2x - b$ とおくと



$$f(0) = -b < 0$$

$a > 0$ かつ $f(0) < 0$ より $f(1) < 0$ を満たせばよいから

$$f(1) = a + 2 - b < 0 \text{ より} \quad b > a + 2$$

これを満たすのは，

$$(a, b) = (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 6)$$

の 6 通り．　よって　$\dfrac{6}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

(3) 2 式より　$ax^2 + 2x - b = bx^2$　すなわち　$(a - b)x^2 + 2x - b = 0$

条件を満たすのは，$a - b \neq 0$ かつ 判別式 $D > 0$ のときであるから

$$D/4 = 1 + b(a - b) > 0 \text{ より} \quad b(b - a) < 1$$

$b(b - a)$ は整数で，$a - b \neq 0$ であるから

$$b(b - a) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad b < a$$

$b < a$ を満たす a，b の組は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{6^2} = \mathbf{\frac{5}{12}}$$

解答 50 (2007) 問題 (p.13)

(1) P が点 $(2, -3)$ の位置にいるためには，x 軸方向に 2 回以上，y 軸方向に 3 回以上移動しなければならない．したがって，さいころを 5 回投げてこの位置にいるためには x 軸方向に 1 だけ進む移動を 2 回，y 軸方向へ -1 だけ進む移動を 3 回行うことになる．すなわち，さいころを 5 回投げて，1 または 2 の目が出る回数が 2 回，6 の目が出る回数が 3 回である確率を求めればよい．

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3=\boldsymbol{\frac{5}{972}}$$

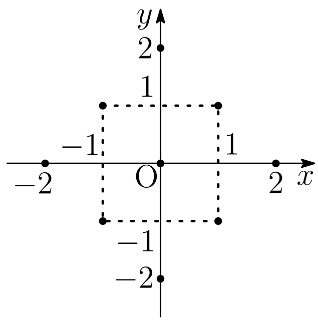
(2) x 軸方向のみを移動して P が原点にいるためには，x 軸方向に 1 だけ進む回数と x 軸方向へ -1 だけ進む回数が等しい．したがって n が奇数のときのときは，求める確率は 0 である．n が偶数のとき，$m=\dfrac{n}{2}$ とおくと，求める確率は

$${}_{2m}\mathrm{C}_m\left(\frac{2}{6}\right)^m\left(\frac{1}{6}\right)^m=\frac{(2m)!}{(m!)^2{\cdot}18^m}$$

ゆえに，m を自然数とすると，求める確率は

$$\boldsymbol{n=2m-1\ \text{のとき}\quad 0,\qquad n=2m\ \text{のとき}\ \ \frac{(2m)!}{(m!)^2{\cdot}18^m}}$$

(3) さいころを 2 回投げたとき，点 P の座標は



x 座標が -2 のとき　$(-2,\ 0)$
x 座標が -1 のとき　$(-1,\ 1),\ (-1, -1)$
x 座標が 0 のとき　$(0,\ 2),\ (0,\ 0),\ (0, -2)$
x 座標が 1 のとき　$(1,\ 1),\ (1, -1)$
x 座標が 2 のとき　$(2,\ 0)$

となる．ゆえにそれぞれの確率は

x 座標が -2 のとき　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{1}{36}$

x 座標が -1 のとき　${}_2\mathrm{C}_1\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{6}+{}_2\mathrm{C}_1\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{6}{36}$

x 座標が 0 のとき　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^2+{}_2\mathrm{C}_1\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 2+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{13}{36}$

x 座標が 1 のとき　${}_2\mathrm{C}_1\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}+{}_2\mathrm{C}_1\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{12}{36}$

x 座標が 2 のとき　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^2=\dfrac{4}{36}$

したがって，点 P の x 座標の期待値は

$$(-2)\times\frac{1}{36}+(-1)\times\frac{6}{36}+0\times\frac{13}{36}+1\times\frac{12}{36}+2\times\frac{4}{36}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

解答 51 (2009 理系・医) 問題 (p.13)

(1) $y = px^2$，$y = qx + 1$ から y を消去すると

$$px^2 - qx - 1 = 0 \quad \cdots ①$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-q)^2 - 4 \cdot p \cdot (-1) = q^2 + 4p$$

$p > 0$ より $D > 0$ となり，2 次方程式 ① は異なる 2 つの実数解をもつ．
その解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{q}{p}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{p}$$

$p > 0$ より $\alpha\beta < 0$ であるから，A，B の x 座標はそれぞれ α，β となる．
線分 AB の中点の y 座標は，上の第 1 式から

$$q \times \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 = q \times \frac{q}{2p} + 1 = \frac{q^2}{2p} + 1$$

これが 2 より小さいので

$$\frac{q^2}{2p} + 1 < 2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{q^2}{2} < p \leqq 6$$

上式より，$q \leqq 3$ であるから

$$\begin{array}{lll} q = 1 \text{ のとき} & 1 \leqq p \leqq 6 & \text{の 6 通り} \\ q = 2 \text{ のとき} & 3 \leqq p \leqq 6 & \text{の 4 通り} \\ q = 3 \text{ のとき} & 5 \leqq p \leqq 6 & \text{の 2 通り} \end{array}$$

よって，求める確率は $\dfrac{6 + 4 + 2}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(2) A の x 座標 α は 2 次方程式 ① の負の解であるから

$$\alpha=\frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2p} \quad \cdots ②$$

これが有理数となるは，q^2+4p が平方数のときである．

q^2+4p の値は右の表のようなる．

$q \backslash p$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	5	9	13	17	21	25
2	8	12	16	20	24	28
3	13	17	21	25	29	33
4	20	24	28	32	36	40
5	29	33	37	41	45	49
6	40	44	48	52	56	60

したがって条件をみたす $(p,\ q)$ の組は，次の 6 組である．

$$(p,\ q)=(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 1),\ (6,\ 5)$$

よって，求める確率は $\quad \dfrac{6}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(3) $\mathrm{A}(\alpha,\ q\alpha+1)$ および ② から，直線 AO の傾きは

$$\frac{q\alpha+1}{\alpha}=q+\frac{1}{\alpha}=q+\frac{2p}{q-\sqrt{q^2+4p}}=\frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2}$$

A，B を通る直線の方程式から，直線 AB の傾きは $\quad q$

直線 AO および直線 AB の方向ベクトルをそれぞれ

$$\vec{u}=\left(1,\ \frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2}\right),\ \vec{v}=(1,\ q)$$

とおくと，$\angle\mathrm{OAB}$ は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角である．$\angle\mathrm{OAB}$ が 90° より大きくなるとき，$\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ であるから

$$1\cdot1+\frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2}\cdot q<0$$

ゆえに $\qquad 2+q^2<q\sqrt{q^2+4p}$

上式の両辺がともに正であることに注意して，両辺を平方して整理すると

$$p>1+\frac{1}{q^2}$$

したがって $\quad q=1$ のとき $\qquad 3 \leqq p \leqq 6 \quad$ の 4 通り

$\qquad 2 \leqq q \leqq 6$ のとき $\quad 2 \leqq p \leqq 6 \quad$ の 5 通り

よって，求める確率は $\quad \dfrac{4+5\times5}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{29}{36}}$

解答 52 (2010 医) $\boxed{\text{問題 (p.13)}}$

(1) 取り出した赤球の総数が 2 であるのは，次［1］,［2］の場合である．

［1］1 回目に赤球 2 個を取り出し，箱の中には赤球 2 個，白球 6 個が残り，2 回目にこの箱から白球 2 個を取り出す場合で，その確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{6}{45}\times\frac{15}{28}=\frac{1}{14}$$

［2］1 回目に赤球，白球をそれぞれ 1 個ずつ取り出し，箱の中には赤球 3 個，白球 5 個が残り，2 回目に赤球 1 個を取り出す場合で，その確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{3}{8}=\frac{4\times6}{45}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{5}$$

［1］,［2］は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{14}+\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{19}{70}}$$

(2) 取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえるのは，上の［2］と次の［3］の場合である．

［3］1 回目に赤球を 2 個取り出し，2 回目に取り出した球が 2 個とも赤球，または，赤球と白球が 1 個ずつの場合で，その確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{6}{45}\times\frac{1+2\times6}{28}=\frac{13}{210}$$

［2］,［3］は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{5}+\frac{13}{210}=\mathbf{\frac{11}{42}}$$

解答 53 (2011 理系) 問題 (p.14)

(1) 2次不等式 $x^2+ax+b>0$ の係数について，$D=a^2-4b$ とおくと，P が実数全体となるのは，$D<0$ のときであるから

$$a^2-4b<0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{a^2}{4}<b \leqq 6$$

上式より，$a \leqq 4$ であるから

$a=1$ のとき　$1 \leqq b \leqq 6$　の 6 通り
$a=2$ のとき　$2 \leqq b \leqq 6$　の 5 通り
$a=3$ のとき　$3 \leqq b \leqq 6$　の 4 通り
$a=4$ のとき　$5 \leqq b \leqq 6$　の 2 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{6+5+4+2}{6^2}=\mathbf{\dfrac{17}{36}}$

(2) Q は　$x \geqq -\dfrac{a}{5}$

$Q \subset P$ となる事象の個数について D の符号により場合分けを行う．

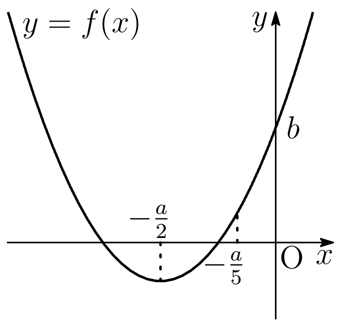
［1］$D<0$ のとき，$Q \subset P$ が成り立ち，(1) の結果により 17 通り

［2］$D \geqq 0$ のとき，$f(x)=x^2+ax+b$ とおくと

$$f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$$

$a>0$ から　$-\dfrac{a}{2}<-\dfrac{a}{5}$

$y=f(x)$ のグラフから，$f(-\frac{a}{5})>0$ を満たせばよいから



$$b-\frac{4a^2}{25}>0$$

$a^2-4b \geqq 0$ に注意して　$\dfrac{4a^2}{25}<b \leqq \dfrac{a^2}{4}$

これをみたす $(a,\ b)$ の組は，次の 7 通り

$$(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4)\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 6)$$

［1］，［2］より，求める確率は　$\dfrac{17+7}{6^2}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

別解　Q は　$x \geqq -\dfrac{a}{5}$

$Q \subset P$ となる事象の個数について D の符号により場合分けを行う．

［1］$D < 0$ のとき，$Q \subset P$ が成り立ち，(1) の結果により 17 通り

［2］$D \geqq 0$ のとき，P は

$$x < \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2},\ \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} < x$$

$Q \subset P$ となるための条件は

$$\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} < -\frac{a}{5} \quad \text{すなわち} \quad 5\sqrt{a^2-4b} < 3a$$

両辺を平方して整理すると　$4a^2 - 25b < 0$

$a^2 - 4b \geqq 0$ に注意して　$\dfrac{4a^2}{25} < b \leqq \dfrac{a^2}{4}$

これをみたす $(a,\ b)$ の組は，次の 7 通り

$$(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4)\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 6)$$

［1］,［2］より，求める確率は　$\dfrac{17+7}{6^2} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

解答 54 (2011 医) 問題 (p.14)

(1)
$$
\begin{aligned}
x^5 - x &= x(x^2+1)(x^2-1) \\
&= x\{(x^2-4)+5\}(x^2-1) \\
&= (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2) + 5(x-1)x(x+1)
\end{aligned}
$$

$(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$ は連続する 5 整数の積で $5!$ の倍数，$5(x-1)x(x+1)$ は $5{\cdot}3!$ の倍数であるから，x^5-x は 30 の倍数である．

別解　2 項定理により

$$
(a+b)^5 - a^5 - b^5 = \sum_{j=1}^{4} {}_5\mathrm{C}_j a^{5-j} b^j
$$

${}_5\mathrm{C}_j$ $(1 \leqq j \leqq 4)$ は 5 の倍数であるから，a，b が整数であるとき，上式は 5 の倍数である．k が整数のとき，$a=k-1$，$b=1$ とし，数列 $\{a_k\}$ を

$$
a_k = k^5 - (k-1)^5 - 1
$$

とおく．この数列の初項から第 n 項までの和を求めると

$$
\sum_{k=1}^{n} a_k = n^5 - n
$$

a_k は 5 の倍数であるから，自然数 n について，n^5-n は 5 の倍数である．

また，負の整数 m について，$m=-n$ とすると

$$
m^5 - m = (-n)^5 - (-n) = -(n^5 - n)
$$

したがって，上式は 5 の倍数である．

$x=0$ のとき，x^5-x が 5 の倍数であることは明らか．以上のことから，x が整数であるとき，x^5-x は 5 の倍数である．次に

$$
x^5 - x = (x-1)x(x+1)(x^2+1)
$$

であるから，上式は連続する 3 数の積を因数にもち，2×3 の倍数である．

よって，x^5-x は $2\times3\times5$，すなわち，30 の倍数である．

(2)
$$
x^5y - xy^5 = y(x^5-x) - x(y^5-y)
$$

(1) の結果により x，y が整数のとき，x^5-x，y^5-y は 30 の倍数であるから，上式は，30 の倍数である．

解答 55 (2012 医) 問題 (p.14)

(1) $(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 を並べる順列の総数であるから

$$\frac{n!}{(n-4)!4!}=\boldsymbol{\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)}\quad(\text{通り})$$

(2) $b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大となるのは，$\{a_n\}$ において -1 が連続して偶数回並ぶ場合であり，このとき，数列 $\{b_n\}$ は $n-2$ 個の 1 と 2 個の -1 からなる．したがって，求める最大値は

$$(n-2)\cdot1+2\cdot(-1)=\boldsymbol{n-4}$$

$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最小となるのは，$\{a_n\}$ において $a_1=a_n=-1$ であり，残りの 2 つの -1 が連続して並ぶ場合であり，このとき，数列 $\{b_n\}$ は $n-2$ 個の -1 と 2 個の 1 からなる．したがって，求める最小値は

$$(n-2)\cdot(-1)+2\cdot1=\boldsymbol{-n+4}$$

(3) $b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大となるのは，$\{a_n\}$ において -1 が連続して偶数回並ぶ場合であるから，連続する 2 つの -1 をひとまとめにしたものを c とする．このとき，$n-4$ 個の 1 と 2 個の c を並べる順列の総数であるから

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)!2!}=\boldsymbol{\frac{1}{2}(n-2)(n-3)}\quad(\text{通り})$$

$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最小となるのは，$\{a_n\}$ において $a_1=a_n=-1$ であり，2 つの -1 が連続して並ぶ場合であるから，連続する 2 つの -1 をひとまとめにしたものを d とする．このとき，$n-4$ 個の 1 と 1 個の d を並べる順列の総数であるから

$$\frac{(n-3)!}{(n-4)!1!}=\boldsymbol{n-3}\quad(\text{通り})$$

解答 56 (2013 医) $\boxed{\text{問題 (p.14)}}$

(1) A 君が k $(1 \leqq k \leqq n)$ 回目に勝つ確率は　$(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}p$

条件より，$0<p<1$，$0<q<1$ であるから　$(1-p)(1-q) \neq 1$

よって，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}p = \boldsymbol{\frac{p\{1-(1-p)^n(1-q)^n\}}{1-(1-p)(1-q)}}$$

(2) B 君が k $(1 \leqq k \leqq n)$ 回目に勝つ確率は　$(1-p)^k(1-q)^{k-1}q$

(1) と同様に，B の勝つ確率は

$$\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k}(1-q)^{k-1}q = \frac{q(1-p)\{1-(1-p)^n(1-q)^n\}}{1-(1-p)(1-q)}$$

A 君の勝つ確率が B 君の勝つ確率よりも大きくなるのは，上式および (1) の結果から

$$p > q(1-p)$$

このとき，$p+q \leqq 1$ に注意して　$\dfrac{q}{1+q} < p \leqq 1-q$

p，q は $\dfrac{j}{6}$ $(j=1,2,3,4,5)$ であるから

(i) $q=\dfrac{1}{6}$ のとき　$\dfrac{1}{7}<p\leqq\dfrac{5}{6}$　ゆえに　$p=\dfrac{1}{6},\ \dfrac{2}{6},\ \dfrac{3}{6},\ \dfrac{4}{6},\ \dfrac{5}{6}$

(ii) $q=\dfrac{2}{6}$ のとき　$\dfrac{1}{4}<p\leqq\dfrac{4}{6}$　ゆえに　$p=\dfrac{2}{6},\ \dfrac{3}{6},\ \dfrac{4}{6}$

(iii) $q=\dfrac{3}{6}$ のとき　$\dfrac{1}{3}<p\leqq\dfrac{3}{6}$　ゆえに　$p=\dfrac{3}{6}$

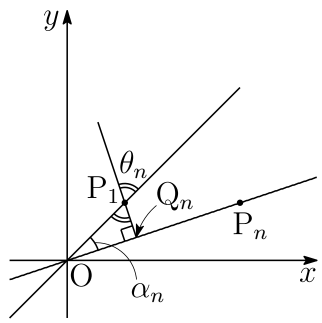
(iv) $q=\dfrac{4}{6}$ のとき　$\dfrac{2}{5}<p\leqq\dfrac{2}{6}$　ゆえに　p は存在しない

(v) $q=\dfrac{5}{6}$ のとき　$\dfrac{5}{11}<p\leqq\dfrac{1}{6}$　ゆえに　p は存在しない

よって，求める $(X,\ Y)$ の組の総数は

$$\begin{aligned}&{}_6\mathrm{C}_1\sum_{k=1}^{5}{}_5\mathrm{C}_k + {}_6\mathrm{C}_2\sum_{k=2}^{4}{}_4\mathrm{C}_k + {}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_3\\ =&6(2^5-1)+15(2^4-1-4)+20\times 1 = \mathbf{371}\end{aligned}$$

解答 57 (2001) 問題 (p.15)



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=(n,\ 1)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=n+1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|^2=n^2+1$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}&=\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}-\frac{\left(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right)}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\\&=(1,\ 1)-\frac{n+1}{n^2+1}(n,\ 1)\\&=\boldsymbol{\left(\frac{1-n}{n^2+1},\ \frac{n^2-n}{n^2+1}\right)}\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}_1$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}_n$ のなす角を α_n とすると

$$\cos\alpha_n=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}_1\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}_n}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}_1||\overrightarrow{\mathrm{OP}}_n|}=\frac{n+1}{\sqrt{2}\sqrt{n^2+1}}$$

また　$\sin^2\alpha_n=1-\cos^2\alpha_n=1-\dfrac{(n+1)^2}{2(n^2+1)}=\dfrac{(n-1)^2}{2(n^2+1)}$

$\sin\alpha_n>0$ であるから　$\sin\alpha_n=\dfrac{n-1}{\sqrt{2(n^2+1)}}$

$\theta_n=90^\circ-\alpha_n$ であるから

$$\cos\theta_n=\cos(90^\circ-\alpha_n)=\sin\alpha_n=\boldsymbol{\frac{n-1}{\sqrt{2(n^2+1)}}}$$

(3)
$$\tan^2\alpha_n=\frac{1}{\cos^2\alpha_n}-1=\frac{2(n^2+1)}{(n+1)^2}-1=\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$$

$0<\alpha_n<90^\circ$ であるから $\tan\alpha_n>0$ より　$\tan\alpha_n=\dfrac{n-1}{n+1}$

$\theta_n=90^\circ-\alpha_n$ であるから

$$\tan\theta_n=\tan(90^\circ-\alpha_n)=\frac{1}{\tan\alpha_n}=\frac{n+1}{n-1}$$

$\tan\theta_n<1.01$ をみたす最小の n は

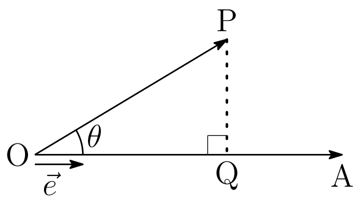
$$\frac{n+1}{n-1}<1.01\quad ゆえに\quad n>201$$

したがって，これをみたす最小の n は　**202**

解説

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ とし，単位ベクトル $\vec{e}$ を

$$\vec{e}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\quad\cdots①$$



とすると，P から OA に下ろした垂線の足 Q について

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta)\vec{e}\quad\cdots②$$

また，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$

これと ① を ② に代入すると　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

解答 58 (2010 理系) 問題 (p.15)

(1) $s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-t\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}\perp t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-s\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ より

$$(s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-t\,\overrightarrow{\mathrm{OX}})\cdot(t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-s\,\overrightarrow{\mathrm{OX}})=0$$

であるから

$$st|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-(s^2+t^2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}+st|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2=0$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|=1$，$\angle\mathrm{POR}=\theta$ より　$s=\cos\theta$，$t=\sin\theta$

これらを上式に代入して

$$\cos\theta\sin\theta\cdot1^2-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\cos\theta\sin\theta\cdot1^2=0$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=2\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{\sin 2\theta}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ のなす角を α とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\cos\alpha=\cos\alpha$$

上式および (1) の結果から　$\cos\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)\quad\cdots①$

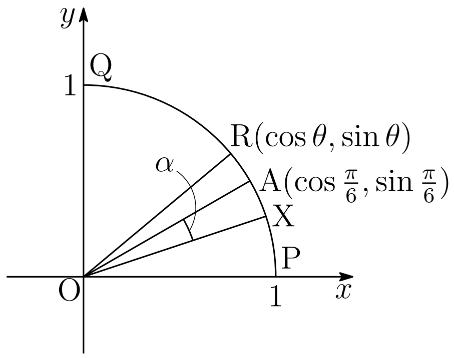
X が弧 AP 上にあるとき $\angle\mathrm{POA} = \dfrac{\pi}{6}$ であるから　$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{6}$　$\cdots$②

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4} \cdots$③ より　　$0 < \dfrac{\pi}{2} - 2\theta < \dfrac{\pi}{2}$

したがって，① から　　$\alpha = \dfrac{\pi}{2} - 2\theta$　$\cdots$④

④ を ② に代入して　　$0 \leqq \dfrac{\pi}{2} - 2\theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$

これを ③ に注意して解くと　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}}$



(3) (2) の結果から　$\angle\mathrm{POX} = \dfrac{\pi}{6} - \alpha = \dfrac{\pi}{6} - \left(\dfrac{\pi}{2} - 2\theta\right) = 2\theta - \dfrac{\pi}{3}$

ゆえに　$\angle\mathrm{ROX} = \angle\mathrm{POR} - \angle\mathrm{POX} = \theta - \left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3} - \theta$

したがって　$\triangle\mathrm{ROX} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OX}\cdot\mathrm{OR}\sin\angle\mathrm{ROX}$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$$

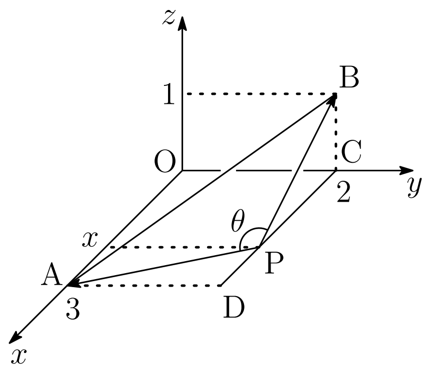
$$= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$$

よって　(2) の結果により　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき　**最大値** $\dfrac{1}{4}$

解答 59 (2005) 問題 (p.15)

(1) P は線分 CD 上の点であるから　　$0 \leqq x \leqq 3$

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (3,\ 0,\ 0) - (x,\ 2,\ 0) = (3-x, -2,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (0,\ 2,\ 1) - (x,\ 2,\ 0) = (-x,\ 0,\ 1)$$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (3-x)\cdot(-x) + (-2)\cdot 0 + 0\cdot 1 = x^2 - 3x$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = \sqrt{(3-x)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = \sqrt{(-x)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 1}$$

よって　　$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|} = \boldsymbol{\dfrac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}\sqrt{x^2 + 1}}}$　　$\boldsymbol{(0 \leqq x \leqq 3)}$

(2) $\triangle$PAB の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x^2 - 6x + 13)(x^2 - 3x) - (x^2 - 3x)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5x^2 - 6x + 13} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{56}{5}} \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 3$ において，S は最小値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{56}{5}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{70}}{5}}$ をとる．

解答 60 (2006) $\boxed{\text{問題 (p.15)}}$

(1) 点 Q は平面 OAC 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (s, t \text{ は実数の定数})$$

とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp$平面 OAC より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$ であるから　$(s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$

$$s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ であるから　$(s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$

$$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$$

上の 2 式に $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\sqrt{3},\ 3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (0,\ 2,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (0,\ 1,\ 0)$ を代入すると

$$12s + 6t - 3 = 0, \quad 6s + 8t - 2 = 0$$

これを解いて　$s = \dfrac{1}{5}$，$t = \dfrac{1}{10}$

したがって，① より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \frac{1}{5}(\sqrt{3},\ 3,\ 0) + \frac{1}{10}(0,\ 2,\ 2) - (0,\ 1,\ 0) \\ &= \boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{3}}{5}, -\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right)}\end{aligned}$$

(2) 点 S は平面 ABC 上の点であり，$\overrightarrow{\mathrm{PS}}\perp$平面 ABC より $\overrightarrow{\mathrm{PS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ は yz 平面上のベクトルである．

ゆえに，点 M(0, 3, 0) をとると，S は直線 CM 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = k\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OM}} \quad (k \text{ は実数の定数})$$

とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PS}} &= \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= k\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= k(0,\ 2,\ 2) + (1-k)(0,\ 3,\ 0) - (0,\ 1,\ 0) \\ &= (0,\ 2-k,\ 2k)\end{aligned}$$

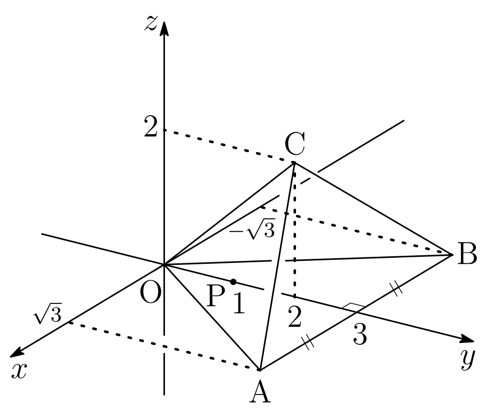
また，$\overrightarrow{\mathrm{PS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (0,\ 3,\ 0) - (0,\ 2,\ 2) = (0,\ 1, -2)$$

これらを $\overrightarrow{\mathrm{PS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}} = 0$ に代入すると

$$0\cdot 0 + (2-k)\cdot 1 + 2k\cdot(-2) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{2}{5}$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \left(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\frac{8}{5}},\ \boldsymbol{\frac{4}{5}}\right)$



(3) (1) より $\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

$$=(0,\ 1,\ 0)+\left(\frac{\sqrt{3}}{5},-\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

(2) より $\quad \overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PS}}$

$$=(0,\ 1,\ 0)+\left(0,\ \frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

$$=\left(0,\ \frac{13}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

四面体 OABC は yz 平面に関して対称である．点 Q と点 R は yz 平面に関して対称であるから

$$\mathrm{R}\left(-\frac{\sqrt{3}}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

△QRS は，QS = RS の二等辺三角形であり，QR の中点を T とすると

$$\mathrm{T}\left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

であるから

$$\mathrm{ST}=\sqrt{(0-0)^2+\left(\frac{4}{5}-\frac{13}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$\mathrm{QR}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

したがって，求める △QRS の面積は

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{QR}\times\mathrm{ST}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{5}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{30}}{25}}$$

解答 61 (2010 医) 問題 (p.16)

(1) P は BC を $t:(1-t)$ に内分する点であるから $(0<t<1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

ゆえに
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-t)(1,\ 2,\ 0)+t(2,\ 1,\ 2)\\&=(1+t,\ 2-t,\ 2t)\end{aligned}$$

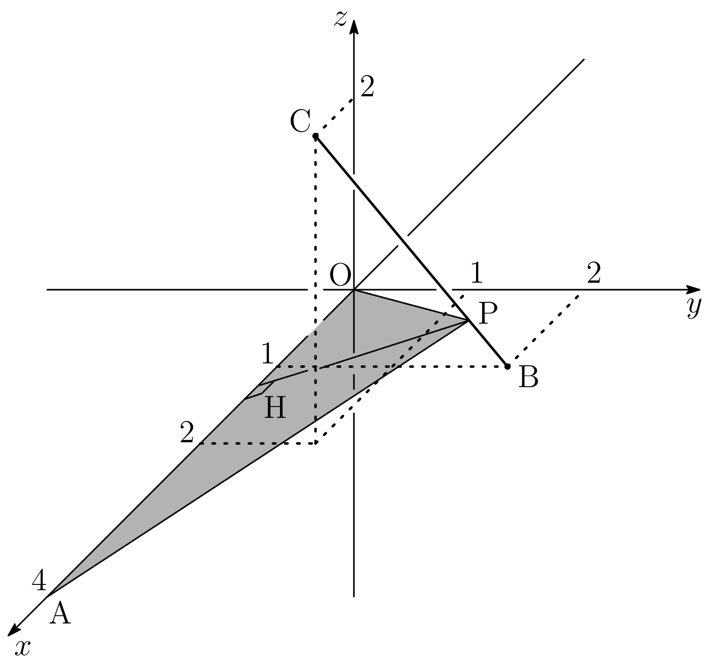
OA 上に $\mathrm{H}(1+t,\ 0,\ 0)$ をとると　$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=(0,\ 2-t,\ 2t)$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{HP}}$　ゆえに　$\triangle\mathrm{OAP}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{HP}$

したがって，HP が最小のとき，△OAP は最小となる．

$$\mathrm{HP}^2=(2-t)^2+(2t)^2=5t^2-4t+4=5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{16}{5}$$

よって，求める t の値は，$0<t<1$ に注意して　$\boldsymbol{t=\dfrac{2}{5}}$



補足

一般に，2 直線 ℓ_1，ℓ_2 がねじれの位置にあり，ℓ_1 上の点 P と ℓ_2 上の点 Q を結ぶ線分 PQ が最小となるとき，$\mathrm{PQ}\perp\ell_1$，$\mathrm{PQ}\perp\ell_2$ である．
ここでは，2 直線 OA，BC がねじれの位置にあり，このとき $\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ を解いて t の値を求めることができる．

(2) D は xy 平面上の点であるから，その座標を $(a,\ b,\ 0)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (a,\ b,\ 0) - (2,\ 1,\ 2) = (a-2,\ b-1, -2)$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ より　$4(a-2) + 0(b-1) + 0 \cdot (-2) = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ より　$(1+t)(a-2) + (2-t)(b-1) + 2t \cdot (-2) = 0$

$2 - t \neq 0$ であるから上の 2 式より　　$a = 2$，$b = \dfrac{2+3t}{2-t}$

したがって　　$\mathrm{D}\left(2,\ \dfrac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$

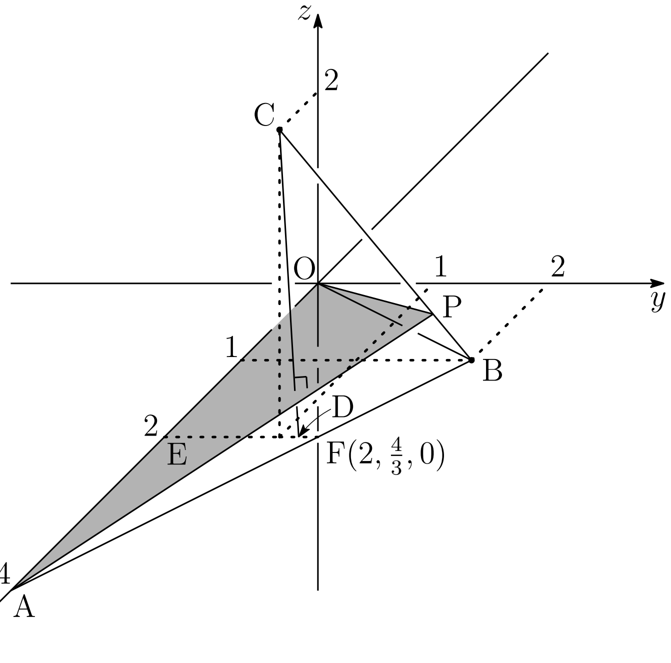
点 E を $(2,\ 0,\ 0)$，AB 上の x 座標が 2 である点を F とすると，3 点 A，F，B の x 座標から F は線分 AB を $2:1$ に内分する点であるから，その座標は

$$\left(\frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{2+1},\ \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 2}{2+1},\ \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 0}{2+1}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(2,\ \frac{4}{3},\ 0\right)$$

D が $\triangle$OAB の内部にあるためには，D は EF 間にあればよいので

$$0 < \frac{2+3t}{2-t} < \frac{4}{3}$$

$0 < t < 1$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{0 < t < \dfrac{2}{13}}$



解答 62 (2011 理系・医) 問題 (p.16)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AN}}$

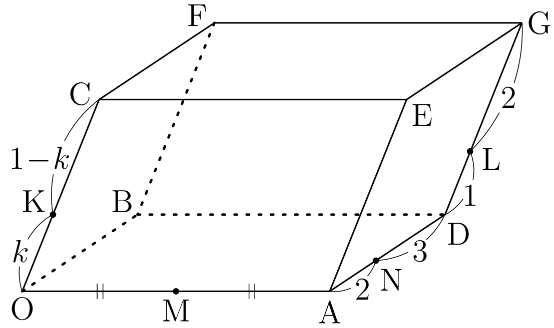
$= \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\vec{a}} + \dfrac{2}{5}\boldsymbol{\vec{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{ML}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DL}}$

$= \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\vec{a}} + \boldsymbol{\vec{b}} + \dfrac{1}{3}\boldsymbol{\vec{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{MK}} = \overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{OK}}$

$= -\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\vec{a}} + \boldsymbol{k\vec{c}}$



(2) 3 点 M，N，K を通る平面を α とする．α 上の点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は，(1) の結果から，実数 s，t を用いて

$$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + s\overrightarrow{\mathrm{MN}} + t\overrightarrow{\mathrm{MK}}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) + t\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(1+s-t)\vec{a} + \frac{2}{5}s\vec{b} + tk\vec{c} \quad \cdots (*)$$

点 L の位置ベクトルは，$\vec{a} + \vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$ であるから，L が α 上の点であるとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$\frac{1}{2}(1+s-t) = 1, \quad \frac{2}{5}s = 1, \quad tk = \frac{1}{3}$$

これを解いて　$s = \dfrac{5}{2}$，$t = \dfrac{3}{2}$，$\boldsymbol{k = \dfrac{2}{9}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \vec{b} + \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{FG}} = \vec{a}$ より，辺 GF 上の点の位置ベクトルは実数 x を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} + x\overrightarrow{\mathrm{FG}} = x\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

α と辺 GF が交点をもつとき，上式および $(*)$ から

$$\frac{1}{2}(1+s-t) = x, \quad \frac{2}{5}s = 1, \quad tk = 1$$

第 1 式および第 2 式から　$t = \dfrac{7}{2} - 2x$

$0 \leqq x \leqq 1$ であるから　$\dfrac{3}{2} \leqq t \leqq \dfrac{7}{2}$

$0 < k < 1$ に注意しながら，これと第 3 式により　$\boldsymbol{\dfrac{2}{7} \leqq k \leqq \dfrac{2}{3}}$

解答 63 (2012 医) 問題 (p.16)

(1) 与えられた条件により $\quad \overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{1}{2}\vec{c},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \ \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$

3 点 L，M，N を通る平面上の位置ベクトルは，実数 s，t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OL}}+s\overrightarrow{\mathrm{LM}}+t\overrightarrow{\mathrm{LN}}&=\frac{1}{2}\vec{c}+s\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)+t\left(\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)\\&=\frac{s}{2}\vec{a}+\left(\frac{s}{2}+\frac{2}{3}t\right)\vec{b}+\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{6}\right)\vec{c}\end{aligned}$$

この平面と直線 OA の交点 D の位置ベクトルは

$$\frac{s}{2}+\frac{2}{3}t=0,\ \ \frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{6}=0 \quad \text{ゆえに} \quad s=\frac{4}{3},\ \ t=-1$$

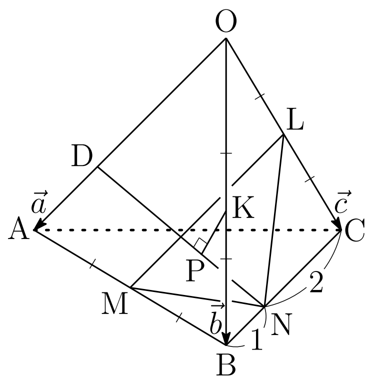
したがって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}}$

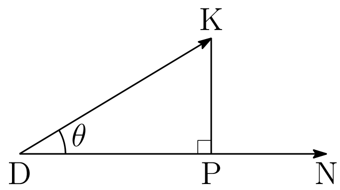
(2) 与えられた条件により $\quad |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1$

$\overrightarrow{\mathrm{DK}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}-\dfrac{2}{3}\vec{a}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}}&=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2+\frac{1}{3}|\vec{b}|^2-\frac{7}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{2}{9}\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{13}{18}\\|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|^2&=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2+\frac{1}{9}|\vec{c}|^2-\frac{8}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{4}{9}\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{10}{9}\\\overrightarrow{\mathrm{DP}}&=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}})}{|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\frac{13}{20}\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}\right)\end{aligned}$$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\boldsymbol{\dfrac{7}{30}\vec{a}+\dfrac{13}{30}\vec{b}+\dfrac{13}{60}\vec{c}}$





解答 64 (2013 理系) $\boxed{\text{問題 (p.17)}}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 1,-2)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=3,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=9,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-3$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\{k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\\&=k|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=k\cdot3+(1-k)\cdot(-3)=6k-3\\\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\{k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\\&=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-k)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=k\cdot(-3)+(1-k)\cdot9=-12k+9\end{aligned}$$

Q は D 上の点より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\geqq0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\geqq0$ であるから

$$\begin{cases}6k-3\geqq0\\-12k+9\geqq0\end{cases}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{\frac{1}{2}\leqq k\leqq\frac{3}{4}}$$

(2) D 内の点 P について，x，y を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots①$$

とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=x|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+y\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=x\cdot3+y\cdot(-3)=3(x-y)\\\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+y|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=x\cdot(-3)+y\cdot9=3(-x+3y)\end{aligned}$$

与えられた条件により，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq0$ であるから

$$x-y=\alpha,\quad -x+3y=\beta$$

とおくと，$\alpha\geqq0$，$\beta\geqq0$．また上の 2 式から

$$x=\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta,\quad y=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\quad\cdots②$$

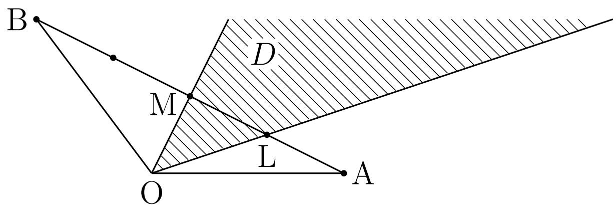
② を ① に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \left(\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \frac{1}{2}\alpha(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\frac{1}{2}\beta(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ &= 2\alpha\times\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}+\beta\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\end{aligned}$$

線分 AB を 1 : 3 に内分する点を L，中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2\alpha\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OM}} \quad (\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0)$$

ゆえに，P の表す領域 D は，次の図の斜線部分で，境界線を含む．



$s+t=\lambda$ とおくと　　$1 \leqq \lambda \leqq 2$

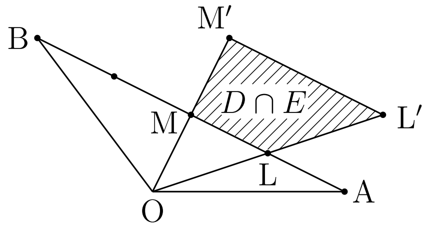
さらに $s'=\dfrac{s}{\lambda}$，$t'=\dfrac{t}{\lambda}$ とおくと　　$s'+t'=1$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である 2 点 A′，B′ をとると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \frac{s}{\lambda}\cdot\lambda\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t}{\lambda}\cdot\lambda\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}} \qquad (s'+t'=1)\end{aligned}$$

したがって，R は直線 A′B′ 上の点である．

$\overrightarrow{\mathrm{OL'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ である 2 点 L′，M′ をとると，$1 \leqq \lambda \leqq 2$ により，領域 $D \cap E$ は，四角形 LMM′L′ の内部とその周上である．



求める面積を S とすると

$$S=(2^2-1)\times\triangle\mathrm{OLM},\quad \triangle\mathrm{OLM}=\frac{1}{4}\times\triangle\mathrm{OAB}$$

ゆえに $\qquad S=\frac{3}{4}\times\triangle\mathrm{OAB}$

$\triangle$OAB の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OAB}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{3\times9-(-3)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって $\qquad S=\frac{3}{4}\times\triangle\mathrm{OAB}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}\sqrt{2}=\boldsymbol{\frac{9}{8}\sqrt{2}}$

解答 65 (2013 医) $\boxed{\text{問題 (p.17)}}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 1,-2)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=3,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=9,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-3$$

したがって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\{k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\\
&=k|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\
&=k\cdot 3+(1-k)\cdot(-3)=6k-3\\
\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\{k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\\
&=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-k)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\
&=k\cdot(-3)+(1-k)\cdot 9=-12k+9
\end{aligned}$$

Q は D 上の点より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\geqq 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\geqq 0$ であるから

$$\left\{\begin{array}{l}6k-3\geqq 0\\ -12k+9\geqq 0\end{array}\right.\qquad \text{ゆえに}\qquad \boldsymbol{\frac{1}{2}\leqq k\leqq\frac{3}{4}}$$

(2) D 内の点 P について，s，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots①$$

とすると

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\
&=s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\
&=s\cdot 3+t\cdot(-3)=3(s-t)\\
\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\
&=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\
&=s\cdot(-3)+t\cdot 9=3(-s+3t)
\end{aligned}$$

与えられた条件により，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ であるから

$$s-t=\alpha,\quad -s+3t=\beta$$

とおくと，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$．また上の 2 式から

$$s=\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta,\quad t=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\quad\cdots②$$

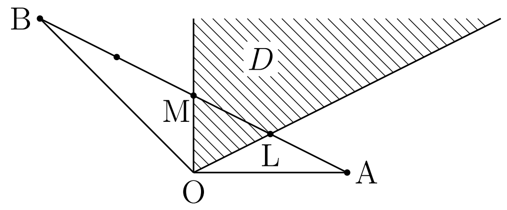
② を ① に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \left(\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \frac{1}{2}\alpha(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\frac{1}{2}\beta(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ &= 2\alpha\times\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}+\beta\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\end{aligned}$$

線分 AB を 1 : 3 に内分する点を L，中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2\alpha\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OM}} \quad (\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0)$$

ゆえに，P の表す領域 D は，次の図の斜線部分で，境界線を含む．



$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4} = \frac{1}{4}(-1,\ 4,\ 1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2} = \frac{1}{2}(1,\ 2,-1)$$

$\overrightarrow{\ell} = (-1,\ 4,\ 1)$，$\overrightarrow{m} = (1,\ 2,-1)$ とおくと

$$|\overrightarrow{\ell}| = \sqrt{18},\ \ |\overrightarrow{m}| = \sqrt{6} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\ell}| : |\overrightarrow{m}| = \sqrt{3} : 1$$

ここで，D 上の点 H を

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\ell}+\sqrt{3}\overrightarrow{m} = (-1+\sqrt{3},\ 4+2\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$$

とすると，H は ∠LOM の二等分線上にある．また

$$|\overrightarrow{m}|^2\overrightarrow{\ell}-(\overrightarrow{\ell}\cdot\overrightarrow{m})\overrightarrow{m} = 6(-1,\ 4,\ 1)-6(1,\ 2,-1) = 12(-1,\ 1,\ 1)$$

は平面 OLM に平行で，$\overrightarrow{m}$ に垂直．これと平行な単位ベクトルの 1 つを

$$\overrightarrow{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,\ 1,\ 1)$$

とおく．

H から直線 OM に下ろした垂線の長さは

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{e}\,| = 2\sqrt{3}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ が最小となる点 C の位置ベクトルは，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ の向きが同じであることに注意して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\sqrt{3},\ 4+2\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})\\ &= \left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},\ 2\sqrt{2}+\sqrt{6},\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)\end{aligned}$$

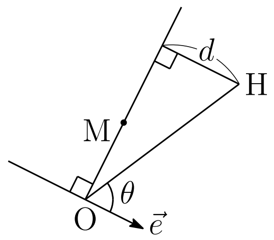
よって，求める C の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},\ 2\sqrt{2}+\sqrt{6},\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)}$$

注意 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{m}$ に気付けば，$\overrightarrow{e}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と平行な単位ベクトルに定めればよい．

補足

平面 HOM 上のベクトルで，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{e}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とすると，H から直線 OM に下ろした垂線の長さ d は



$$d = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}||\cos\theta|$$

また　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{e} = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}||\vec{e}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\cos\theta$

上の 2 式より　　$d = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{e}|$

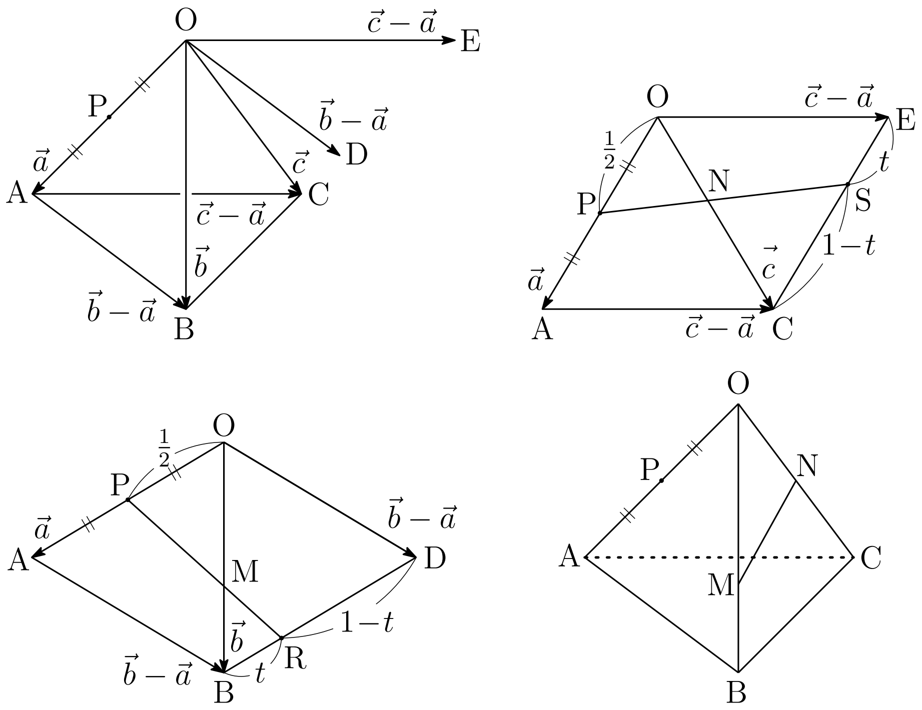
解答 66 (2014 理系) $\boxed{\text{問題 (p.17)}}$

(1) △OPM ∽ △BRM，△OPN ∽ △CSN であるから，

これらの相似比から

$$\mathrm{OM}:\mathrm{MB}=\frac{1}{2}:t,\quad \mathrm{ON}:\mathrm{NC}=\frac{1}{2}:(1-t)$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{1+2t}\vec{b}},\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3-2t}\vec{c}}$



(2) $|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ であるから，(1) の結果から　$\mathrm{OM}=\dfrac{1}{1+2t}$，$\mathrm{ON}=\dfrac{1}{3-2t}$

よって
$$\triangle\mathrm{OMN}=\frac{1}{2}\mathrm{OM}\cdot\mathrm{ON}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+2t}\times\frac{1}{3-2t}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4(1+2t)(3-2t)}}$$

(3) $f(t)=(1+2t)(3-2t)$ とおくと $(0<t<1)$

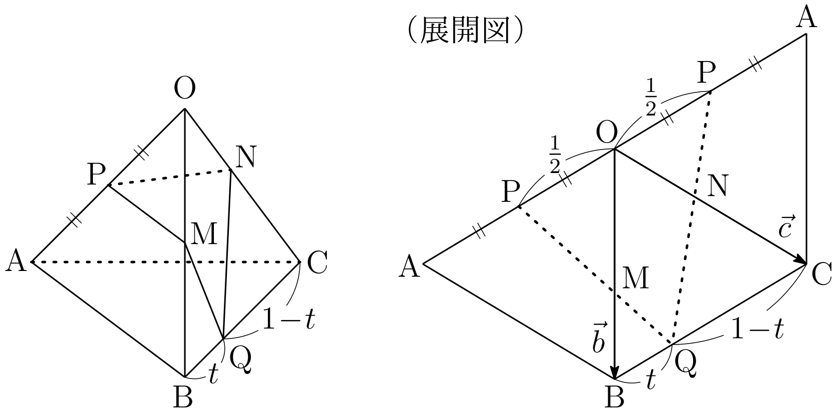
$$f(t)=-4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+4 \quad ゆえに \quad 3<f(t)\leqq 4$$

$\triangle\mathrm{OMN}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{1}{f(t)}$ であるから，$\triangle\mathrm{OMN}$ の面積の最小値は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{16}}$$

解答 67 (2014 医) 問題 (p.17)

(1) 正四面体 OABC(左図) において PM + MQ が最小となる OB 上の点 M は，その展開図 (右図) において，線分 PQ と OB の交点である．また，点 N は展開図において，線分 PQ と OC の交点である．



展開図において，$\triangle\mathrm{OPM}\backsim\triangle\mathrm{BQM}$，$\triangle\mathrm{OPN}\backsim\triangle\mathrm{CQN}$ であるから，これらの相似比から

$$\mathrm{OM}:\mathrm{MB}=\frac{1}{2}:t,\quad \mathrm{ON}:\mathrm{NC}=\frac{1}{2}:(1-t)$$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{1+2t}\vec{b}},\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3-2t}\vec{c}}$

(2) (1) で示した相似比から

$$\begin{aligned}
\frac{\triangle\mathrm{OMN}}{\triangle\mathrm{OBC}} &= \frac{1}{1+2t}\times\frac{1}{3-2t} = \frac{1}{(1+2t)(3-2t)} \\
\frac{\triangle\mathrm{BQM}}{\triangle\mathrm{OBC}} &= \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{OB}}\times\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{BC}} = \frac{t}{\frac{1}{2}+t}\times t = \frac{2t^2}{1+2t} \\
\frac{\triangle\mathrm{CQN}}{\triangle\mathrm{OBC}} &= \frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{OC}}\times\frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{BC}} = \frac{1-t}{\frac{1}{2}+(1-t)}\times(1-t) = \frac{2(1-t)^2}{3-2t}
\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{OMN}+\triangle\mathrm{BQM}+\triangle\mathrm{CQN} = \triangle\mathrm{OBC}-\triangle\mathrm{QMN}$ であるから，上の 3 式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}
1-\frac{\triangle\mathrm{QMN}}{\triangle\mathrm{OBC}} &= \frac{1}{(1+2t)(3-2t)}+\frac{2t^2}{1+2t}+\frac{2(1-t)^2}{3-2t} \\
&= \frac{1+2t^2(3-2t)+2(1-t)^2(1+2t)}{(1+2t)(3-2t)} \\
&= \frac{3}{(1+2t)(3-2t)}
\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{OBC} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{QMN} &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1-\frac{3}{(1+2t)(3-2t)}\right\} \quad \cdots ① \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}t(1-t)}{(1+2t)(3-2t)}}
\end{aligned}$$

(3) ① から

$$\triangle\mathrm{QMN} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1-\frac{3}{4-(2t-1)^2}\right\}$$

$0<t<1$ であるから，$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{16}}$ をとる．

参考 (行列を使った解法)

$\vec{b}$，$\vec{c}$ を (1) の展開図における平面のベクトルとする．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

したがって，上式および (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{QM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{1+2t}\vec{b} - \{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} = \frac{2t(t-1)}{1+2t}\vec{b} - t\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QN}} = \overrightarrow{\mathrm{ON}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{3-2t}\vec{c} - \{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} = (t-1)\vec{b} + \frac{(t-1)(2t-1)}{3-2t}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{QM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QN}}$ から，2 次の正方行列を考えると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{QM}} & \overrightarrow{\mathrm{QN}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2t(t-1)}{1+2t}\vec{b} - t\vec{c} & (t-1)\vec{b} + \frac{(t-1)(2t-1)}{3-2t}\vec{c} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{t(2t-1)}{1+2t} & t-1 \\ -t & \frac{(t-1)(2t-1)}{3-2t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$X = \begin{pmatrix} \frac{t(2t-1)}{1+2t} & t-1 \\ -t & \frac{(t-1)(2t-1)}{3-2t} \end{pmatrix}$ とおくと

$$\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{QM}} & \overrightarrow{\mathrm{QN}} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} \det X \quad \cdots (*)$$

また

$$\begin{aligned}\det X &= t(t-1)\det \begin{pmatrix} \frac{2t-1}{1+2t} & 1 \\ -1 & \frac{2t-1}{3-2t} \end{pmatrix} \\ &= t(t-1)\left\{\frac{2t-1}{1+2t} \times \frac{2t-1}{3-2t} - 1 \times (-1)\right\} \\ &= t(t-1) \times \frac{4}{(1+2t)(3-2t)}\end{aligned}$$

$0 < t < 1$ より

$$|\det X| = t(1-t) \times \frac{4}{(1+2t)(3-2t)} = \frac{4t(1-t)}{(1+2t)(3-2t)}$$

$$\left|\det \begin{pmatrix} \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2 - (\vec{b}\cdot\vec{c})^2} = \sqrt{1^2\cdot 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$(*)$ および上の 2 式から

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{QMN} &= \frac{1}{2}\left|\det \begin{pmatrix} \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}\right| |\det X| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4t(1-t)}{(1+2t)(3-2t)} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}t(1-t)}{(1+2t)(3-2t)}}\end{aligned}$$

解答 68 (2001) 問題 (p.18)

$f(t) = t^3 - at^2$ とおくと，$x_n = f(n)$　$f'(t) = 3t^2 - 2at$

［1］$a \leqq 0$ のとき，$t > 0$ において，$f'(t) > 0$ であるから

$$f(1) < f(2) < \cdots \quad \text{すなわち} \quad x_1 < x_2 < \cdots$$

これは条件に反する．

［2］$a > 0$ のとき，$f(t)$ の増減は次のようなる．

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

条件を満たすとき

$$14 < \frac{2}{3}a < 16, \quad f(14) > f(15), \quad f(15) < f(16)$$

第 1 式から　$21 < a < 24$　$\cdots$①

第 2 式から

$$\begin{aligned} 14^3 - a{\cdot}14^2 &> 15^3 - a{\cdot}15^2 \\ (15^2 - 14^2)a &> 15^3 - 14^3 \\ (15 + 14)a &> 15^2 + 15{\cdot}14 + 14^2 \\ a &> 21\frac{22}{29} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

第 3 式から

$$\begin{aligned} 15^3 - a{\cdot}15^2 &< 16^3 - a{\cdot}16^2 \\ (16^2 - 15^2)a &< 16^3 - 15^3 \\ (16 + 15)a &< 16^2 + 16{\cdot}15 + 15^2 \\ a &< 23\frac{8}{31} \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

①，②，③ の共通範囲にある整数を求めて　$\boldsymbol{a = 22,\ 23}$

別解　$x_n = n^3 - an^2$ より

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \{(n+1)^3 - a(n+1)^2\} - (n^3 - an^2) \\ &= 3n^2 - (2a-3)n - (a-1) \end{aligned}$$

$f(n) = 3n^2 - (2a-3)n - (a-1)$ とすると，条件により

$n = 1, 2, 3, \cdots, 14$ のとき　$f(n) < 0$

$n = 15, 16, \cdots$ のとき　$f(n) > 0$

$y = f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線であるから，次式を満たせばよい．

$$f(1) < 0,\ f(14) < 0,\ f(15) > 0$$

ゆえに　$7 - 3a < 0$，$631 - 29a < 0$，$721 - 31a > 0$

すなわち　$\dfrac{7}{3} < a$，$21\dfrac{22}{29} < a$，$a < 23\dfrac{8}{31}$

したがって　$21\dfrac{22}{29} < a < 23\dfrac{8}{31}$

よって，求める整数 a の値は　**22，23**

解答 69 (2008) 問題 (p.18)

(1) $a_n = b_n - n$ であるから，これを数列 $\{a_n\}$ の漸化式に代入すると

$$
\begin{aligned}
b_n - n &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - k) \\
b_n &= n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}
$$

したがって　　$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \cdots ①$

(2) ① により　　$b_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \cdots ②$

② − ① から　　$b_{n+1} - b_n = b_n$　ゆえに　$b_{n+1} = 2b_n$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は

$$b_1 = 1 + a_1 = 1 + 0 = 1$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　　$b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

(3) $a_n = b_n - n$ により，(2) の結果から　　$\boldsymbol{a_n = 2^{n-1} - n}$

(4) (3) の結果から

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}(2^{k-1} - k) \\
&= \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} - \frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \boldsymbol{2^n - 1 - \frac{1}{2}n(n+1)}
\end{aligned}
$$

解答 70 (2009 医) 問題 (p.19)

(1) $a_n - a_{n-1} = b_n - b_{n-1} + 1$ より

$$a_n - b_n = a_{n-1} - b_{n-1} + 1, \qquad a_1 - b_1 = 3 - 1 = 2$$

よって，$\{a_n - b_n\}$ は初項 2，公差 1 の等差数列であるから

$$a_n - b_n = 2 + (n-1)\cdot 1 = \boldsymbol{n+1} \quad \cdots ①$$

(2) (1) の結果から　$a_n = b_n + n + 1 \quad \cdots ①'$

これを $(a_{n-1} + b_n)(b_n - b_{n-1}) = 2pn + 3 - b_n$ に代入すると

$$(b_{n-1} + n + b_n)(b_n - b_{n-1}) = 2pn + 3 - b_n$$
$$\{b_n + (n+1)\}b_n - (b_{n-1} + n)b_{n-1} = 2pn + 3$$

①′ から　$a_n b_n - a_{n-1} b_{n-1} = 2pn + 3$

ゆえに　$a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n = 2p(n+1) + 3$
$$= 2pn + (2p+3)$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n b_n = a_1 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\{2pk + (2p+3)\}$$
$$= 3\cdot 1 + 2p \times \frac{1}{2}n(n-1) + (2p+3)(n-1)$$
$$= pn^2 + (p+3)n - 2p$$

$3\cdot 1 = p\cdot 1^2 + (p+3)\cdot 1 - 2p$ なので，上式は $n = 1$ のときにも成り立つ．

したがって　$\boldsymbol{a_n b_n = pn^2 + (p+3)n - 2p} \quad \cdots ②$

(3) ①′ を ② に代入して，整理すると

$$b_n{}^2 + (n+1)b_n - pn^2 - (p+3)n + 2p = 0$$

$p > 0$，$b_n > 0$ に注意して，b_n について解くと

$$b_n = \frac{-(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 + 4p(n-1)(n+2) + 12n}}{2}$$

これを ①′ に代入して

$$a_n = \frac{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 + 4p(n-1)(n+2) + 12n}}{2}$$

上の 2 式から

$$a_n + b_n = \sqrt{(n+1)^2 + 4p(n-1)(n+2) + 12n} \quad \cdots ③$$

したがって

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^3 + {b_n}^3}{{a_n}^3 - {b_n}^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n + b_n)\{(a_n - b_n)^2 + a_n b_n\}}{(a_n - b_n)\{(a_n - b_n)^2 + 3a_n b_n\}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{a_n + b_n}{n}\left\{\left(\dfrac{a_n - b_n}{n}\right)^2 + \dfrac{a_n b_n}{n^2}\right\}}{\dfrac{a_n - b_n}{n}\left\{\left(\dfrac{a_n - b_n}{n}\right)^2 + 3\dfrac{a_n b_n}{n^2}\right\}}
\end{aligned}$$

ここで，①，②，③ より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - b_n}{n} = 1,\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{n^2} = p,\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{n} = \sqrt{1+4p}$$

であるから

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^3 + {b_n}^3}{{a_n}^3 - {b_n}^3} = \frac{(1+p)\sqrt{1+4p}}{1+3p}$$

よって

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0} \frac{1}{p} \log f(p) &= \lim_{p\to 0} \frac{1}{p} \log \frac{(1+p)\sqrt{1+4p}}{1+3p} \\
&= \lim_{p\to 0} \log \frac{(1+p)^{\frac{1}{p}}(1+4p)^{\frac{1}{2p}}}{(1+3p)^{\frac{1}{p}}} \\
&= \lim_{p\to 0} \log \frac{(1+p)^{\frac{1}{p}}\left\{(1+4p)^{\frac{1}{4p}}\right\}^2}{\left\{(1+3p)^{\frac{1}{3p}}\right\}^3} \\
&= \log \frac{e \cdot e^2}{e^3} = \log 1 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

解答 71 (2013 理系) $\boxed{\text{問題 (p.19)}}$

(1) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ より

$$a_{n+1} = \{2a_{n+1} + (n+1)^2\} - (2a_n + n^2)$$

ゆえに $\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n - 2n - 1} \quad \cdots ①$

(2) 初項 a_1 は $\quad S_1 = 2a_1 + 1^2$

$S_1 = a_1$ より $\quad a_1 = -1$

① に対して，次の等式をみたす n の 1 次式 $f(n)$ を考える．

$$f(n+1) = 2f(n) - 2n - 1 \quad \cdots ②$$

$f(n) = pn + q$ とおくと $\quad p(n+1) + q = 2(pn+q) - 2n - 1$

n に関する恒等式であるから $\quad p = 2，q = 3$

ゆえに $\quad f(n) = 2n + 3 \quad \cdots ③$

① − ② から $\quad a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$

したがって $\quad a_n - f(n) = 2^{n-1}\{a_1 - f(1)\}$

$a_1 = -1$，③ より $\quad a_n - (2n+3) = 2^{n-1}(-1-5)$

よって $\quad \boldsymbol{a_n = 2n + 3 - 3{\cdot}2^n}$

解答 72 (2008) $\boxed{\text{問題 (p.19)}}$

(1) 直線 $l : y = 2x + 1$ 上の任意の点 $(t,\ 2t+1)$ の A による像は

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+2a)t+a \\ (b+2c)t+c \end{pmatrix}$$

また，点 $((2+2a)t+a,\ (b+2c)t+c)$ も l 上にあるから

$$\begin{aligned}(b+2c)t+c &= 2\{(2+2a)t+a\}+1 \\ &= (4+4a)t+2a+1\end{aligned}$$

これがすべての実数 t について成り立つから

$$b+2c = 4+4a,\ c = 2a+1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b = 2,\ c = 2a+1}$$

別解　l 上の 2 点 P(0, 1)，Q(1, 3) の位置ベクトルを $\vec{p}$，$\vec{q}$ とする．

これら 2 点の A による像 $A\vec{p}$，$A\vec{q}$ が l 上にあれば，A による l 上の任意の点 $(1-s)\vec{p}+s\vec{q}$ (s は実数) の像

$$A((1-s)\vec{p}+s\vec{q}) = (1-s)A\vec{p}+sA\vec{q}$$

も l 上にある．ゆえに，$A\vec{p}$，$A\vec{q}$ が l 上の点であることを満たせばよい．

A による 2 点 P(0, 1)，Q(1, 3) の像は，それぞれ

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3a \\ b+3c \end{pmatrix}$$

であり，これらが共に l 上にあるから

$$c = 2a+1,\quad b+3c = 2(2+3a)+1$$

上の第 1 式を第 2 式に代入して，$b = 2$ を得る．

したがって　　$\boldsymbol{b = 2,\ \ c = 2a+1}$

(2) l 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 2t+1)$ で，A により自分自身に移るものが存在するとき，(1) の結果により

$$\begin{cases} (2+2a)t+a=t \\ (b+2c)t+c=2t+1 \end{cases} \qquad \text{すなわち} \quad (2a+1)t+a=0$$

よって，$a \neq -\dfrac{1}{2}$ のとき，$t=-\dfrac{a}{2a+1}$ に対応する点 P が A によって自分自身に移る．

別解　不動点の表す図形と直線 l の交点が存在することを示せばよい．

解説

座標平面上の点 $\mathrm{V}(\vec{v})$ に対して，$A\vec{v}=\vec{v}$ を満たすとき，点 $\mathrm{V}(\vec{v})$ は A による**不動点**という．このとき，$A(k\vec{v})=k\vec{v}$ (k は実数) であるから，原点 O と V を通る直線上のすべての点が不動点である．

$A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 2a+1 \end{pmatrix}$ による不動点を $\mathrm{V}(\vec{v})$ とすると

$A\vec{v}=\vec{v}$ により　　$(A-E)\vec{v}=\vec{0}$

ゆえに　　$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 2a \end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0}$

よって，不動点の表す図形は，法線ベクトルが $(1,\ a)$ で原点を通る直線

$$x+ay=0$$

である．これと l は，$a \neq -\dfrac{1}{2}$ のとき，交点 $\left(-\dfrac{a}{2a+1},\ \dfrac{1}{2a+1}\right)$ をもち，これが，示す l 上の不動点の座標である．

(3) (2) で示した

「$a \neq -\dfrac{1}{2} \implies l$ 上の点で自分自身に移る点 P が存在する」

したがって，この命題の対偶を考えて　$a=-\dfrac{1}{2}$

これを (1) の結果に代入して　$c=0$

よって　　$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{2},\ c=0}$

別解 1 不動点を表す直線と l が共有点を持たなければよいので，2 直線

$$x + ay = 0,\quad y = 2x + 1$$

が平行であればよい．

したがって　$\boldsymbol{a = -\frac{1}{2}}$　これを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{c = 0}$

別解 2 l 上の点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ の位置ベクトルを $\vec{p}$，l の方向ベクトルを $\vec{u} = (1,\ 2)$ とする．

A により $\mathrm{P}(\vec{p})$ は，P と異なる l 上の点に移るので

$$A\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 2a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a+1 \end{pmatrix} = \vec{p} + a\vec{u} \quad (a \neq 0)$$

また，A により $\vec{u}$ は

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 2a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2 \\ 4a+4 \end{pmatrix} = (2a+2)\vec{u}$$

l は媒介変数 t を用いて $\vec{p} + t\vec{u}$ と表される．ゆえに，A による $\vec{p} + t\vec{u}$ の像は，

$$\begin{aligned} A(\vec{p} + t\vec{u}) &= A\vec{p} + tA\vec{u} \\ &= \vec{p} + a\vec{u} + t(2a+2)\vec{u} \\ &= \vec{p} + \{a + (2a+2)t\}\vec{u} \end{aligned}$$

このとき，すべての実数 t に対して　$a + (2a+2)t \neq t$

すなわち，すべての実数 t に対して　$a + (2a+1)t \neq 0 \quad \cdots (*)$

$2a + 1 \neq 0$ ならば，$t = -\dfrac{a}{2a+1}$ のとき $(*)$ を満たさない．

よって，$2a + 1 = 0$ のとき，$a \neq 0$ であるから $(*)$ を満たす．

ゆえに　$\boldsymbol{a = -\frac{1}{2}}$　これを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{c = 0}$

解答 73 (2009 医) $\boxed{\text{問題 (p.20)}}$

(1) 2 点 $(0,\ 1)$，$(1,\ t)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$y = (t-1)x + 1 \quad \cdots ①$$

2 点 $(0,\ 1)$，$(1,\ t)$ の $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ による像は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ -2+t \end{pmatrix}$$

2 点 $(2,\ 1)$，$(1+2t, -2+t)$ を通る直線 m の方程式は

$$(t-3)x - (2t-1)y + 5 = 0 \quad \cdots ②$$

P は ℓ と m の交点であるから，① を ② に代入して，整理すると

$$(t^2-2t+2)x = -t+3$$

$t^2-2t+2 = (t-1)^2+1 \neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{x = \frac{-t+3}{t^2-2t+2}}$$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{y = \dfrac{2t-1}{t^2-2t+2}}$

(2) $t = 1+\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおいて (1) の結果に代入すると

$$x = \frac{2-\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = 2\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta = \cos 2\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + 1$$

$$y = \frac{1+2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}$$

$x-1 = \cos 2\theta - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$，$y - \dfrac{1}{2} = \sin 2\theta + \dfrac{1}{2}\cos 2\theta$ $(-\pi < 2\theta < \pi)$

であるから，P は円

$$\boldsymbol{(x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4},\quad (x,\ y) \neq (0,\ 0)}$$

の周上を動く.

(2) の別解を与える前に，次の準備を行う．

準備 問題に t の値により，P が円周上を動くとあるので，適当な t の値をとって円の方程式を予想することができる．たとえば

$$\begin{array}{ll} t=0\text{ のとき} & \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \\ t=1\text{ のとき} & (2,\ 1) \\ t=2\text{ のとき} & \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right) \end{array}$$

よって，この 3 点を通る円の方程式は　$x^2+y^2-2x-y=0$

別解 (1) の結果を x^2+y^2-2x-y に代入すると

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x-y &= \left(\frac{-t+3}{t^2-2t+2}\right)^2+\left(\frac{2t-1}{t^2-2t+2}\right)^2 \\ &\qquad -2\times\frac{-t+3}{t^2-2t+2}-\frac{2t-1}{t^2-2t+2} \\ &= \frac{(-t+3)^2+(2t-1)^2}{(t^2-2t+2)^2}-\frac{2(-t+3)+(2t-1)}{t^2-2t+2} \\ &= \frac{5(t^2-2t+2)}{(t^2-2t+2)^2}-\frac{5}{t^2-2t+2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって，P は円

$$\boldsymbol{(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}}$$

の周上を動く．

補足 問題に「点 P はある円周上を動くことを示せ」とあるので，この解答でよい．問題に「点 P の軌跡を求めよ」とあれば，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ も必要である．■ (2009 医)

解答 74 (2012 理系) $\boxed{\text{問題 (p.20)}}$

(1) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}$，$\sin\theta = \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ とおくと

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1+c^2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}} & -\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \\ \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}} \end{pmatrix}$$
$$= \sqrt{1+c^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

T は，原点を中心に θ だけ回転する回転移動と原点を中心に $\sqrt{1+c^2}$ だけ拡大する相似変換との合成変換である．

(2) 3 点 P，Q，R の原点 O に関する位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ とし，また 3 点 P$'$，Q$'$，R$'$ の原点 O に関する位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p'}$，$\vec{q'}$，$\vec{r'}$ とする．△PQR の面積 S は，$\vec{u} = \vec{q} - \vec{p}$，$\vec{v} = \vec{r} - \vec{p}$ とおくと

$$S = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{u}\ \vec{v})\right|$$

$\vec{p'} = A\vec{p}$，$\vec{q'} = A\vec{q}$，$\vec{r'} = A\vec{r}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}} = \vec{q'} - \vec{p'} = A\vec{q} - A\vec{p} = A(\vec{q} - \vec{p}) = A\vec{u}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{P'R'}} = \vec{r'} - \vec{p'} = A\vec{r} - A\vec{p} = A(\vec{r} - \vec{p}) = A\vec{v}$$

△P$'$Q$'$R$'$ の面積 S' は

$$S' = \frac{1}{2}\left|\det(A\vec{u}\ A\vec{v})\right| = \frac{1}{2}\left|\det(A(\vec{u}\ \vec{v}))\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\det A\det(\vec{u}\ \vec{v})\right| = \frac{1}{2}\left|\det A\right|\left|\det(\vec{u}\ \vec{v})\right|$$

したがって　　$S' = |\det A|S$

条件により，$|\det A| = 2$ であるから　$|1+c^2| = 2$　よって　$\boldsymbol{c = \pm 1}$

(3) $c = 2$ のとき，(1) の結果から，E と E' の相似比は $1 : \sqrt{5}$ である．

楕円の中心から楕円上の点の距離は長軸上で最大となり，短軸上で最小となるので，原点から，E，E' までの距離をそれぞれ d，d' とすると

$$1 \leqq d \leqq 2, \quad \sqrt{5} \leqq d' \leqq 2\sqrt{5}$$

よって，E は E' の内部にある．また，求める面積は

$$\{(\sqrt{5})^2 - 1\}\pi 2\cdot 1 = \boldsymbol{8\pi}$$

解答 75 (2012 医) $\boxed{\text{解答 (p.20)}}$

(1) 3点P，Q，Rの原点Oに関する位置ベクトルをそれぞれ$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$とし，また3点P$'$，Q$'$，R$'$の原点Oに関する位置ベクトルをそれぞれ$\vec{p'}$，$\vec{q'}$，$\vec{r'}$とする．△PQRの面積Sは，$\vec{u}=\vec{q}-\vec{p}$，$\vec{v}=\vec{r}-\vec{p}$とおくと

$$S=\frac{1}{2}\left|\det(\vec{u}\ \vec{v})\right|$$

$\vec{p'}=A\vec{p}$，$\vec{q'}=A\vec{q}$，$\vec{r'}=A\vec{r}$であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}&=\vec{q'}-\vec{p'}=A\vec{q}-A\vec{p}=A(\vec{q}-\vec{p})=A\vec{u}\\ \overrightarrow{\mathrm{P'R'}}&=\vec{r'}-\vec{p'}=A\vec{r}-A\vec{p}=A(\vec{r}-\vec{p})=A\vec{v}\end{aligned}$$

△P$'$Q$'$R$'$の面積S'は

$$\begin{aligned}S'&=\frac{1}{2}\left|\det(A\vec{u}\ A\vec{v})\right|=\frac{1}{2}\left|\det(A(\vec{u}\ \vec{v}))\right|\\ &=\frac{1}{2}\left|\det A\det(\vec{u}\ \vec{v})\right|=\frac{1}{2}\left|\det A\right|\left|\det(\vec{u}\ \vec{v})\right|\end{aligned}$$

したがって　　$S'=|\det A|S$

条件により，$k=|\det A|$であるから

$$k=|1+c^2|\quad\text{ゆえに}\quad c^2=k-1$$

$k\geqq 1$に注意して　　$\boldsymbol{c=\pm\sqrt{k-1}}$

補足

正方行列A，Bについて，$\mathbf{det}(\boldsymbol{AB})=\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}\,\mathbf{det}\,\boldsymbol{B}$が成り立つ．

(2) E 上の点 $(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ の T による像は $(0 \leqq \theta < 2\pi)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta - c\sin\theta \\ 2c\cos\theta + \sin\theta \end{pmatrix}$$

これが楕円 E の周上または外部にあるから

$$\frac{(2\cos\theta - c\sin\theta)^2}{4} + (2c\cos\theta + \sin\theta)^2 \geqq 1$$

整理すると $\quad \dfrac{c^2}{4}\sin^2\theta + 3c\sin\theta\cos\theta + 4c^2\cos^2\theta \geqq 0$

ゆえに $\qquad 12c\sin 2\theta + 15c^2\cos 2\theta + 17c^2 \geqq 0$

$c = 0$ はこの不等式を満たす．$c \neq 0$ のとき，上式より

$$\frac{4}{c}\sin 2\theta + 5\cos 2\theta + \frac{17}{3} \geqq 0 \quad \cdots (*)$$

ここで $\qquad \dfrac{4}{c}\sin 2\theta + 5\cos 2\theta \geqq -\sqrt{\left(\dfrac{4}{c}\right)^2 + 5^2}$

したがって，$(*)$ が常に成立するには，次式を満たせばよい．

$$-\sqrt{\left(\frac{4}{c}\right)^2 + 5^2} + \frac{17}{3} \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{\left(\frac{4}{c}\right)^2 + 5^2} \leqq \frac{17}{3}$$

両辺を平方して整理すると

$$\frac{16}{c^2} \leqq \left(\frac{17}{3} + 5\right)\left(\frac{17}{3} - 5\right) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{c^2} \leqq \frac{4}{9}$$

したがって $\qquad c^2 \geqq \dfrac{9}{4} \quad$ これを解いて $\quad c \leqq -\dfrac{3}{2},\ \ \dfrac{3}{2} \leqq c$

よって，求める c の値の範囲は $\quad \boldsymbol{c \leqq -\dfrac{3}{2},\ \ c = 0,\ \ \dfrac{3}{2} \leqq c}$

別解

E 上の点 $(x,\ y)$ の T による像は

$$\begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-cy \\ cx+y \end{pmatrix}$$

これが楕円 E の周上または外部にあるから

$$\frac{(x-cy)^2}{4} + (cx+y)^2 \geqq 1$$

$\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ により $\qquad 4c^2x^2 + 6cxy + c^2y^2 \geqq 0 \qquad \cdots(*)$

また $\qquad 4c^2x^2 + 6cxy + c^2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4c^2 & 3c \\ 3c & c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

まず，$c=0$ は $(*)$ を満たす．

次に，$c \neq 0$ のとき，対称行列 $A = \begin{pmatrix} 4c^2 & 3c \\ 3c & c^2 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1，λ_2 とし，それぞれの単位固有ベクトルを $\vec{u}_1$，$\vec{u}_2$ とする $(\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2)$．このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{u}_1 \\ {}^t\vec{u}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと (計算の詳細は，九大 2010 年一般前期理系数学 $\boxed{\mathbf{5}}$ の解説を参照[4])

$$4c^2x^2 + 6cxy + c^2y^2 = \lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 \qquad \cdots(**)$$

E 上の点 P，Q を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\vec{u}_1$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \beta\vec{u}_2$ とすると $(\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{u}_1 \\ {}^t\vec{u}_2 \end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{u}_1 \\ {}^t\vec{u}_2 \end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

$(**)$ は P，Q それぞれについて $\lambda_1\alpha^2$，$\lambda_2\beta^2$ であるから，$(*)$ より

$$\lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda_1 + \lambda_2 \geqq 0,\quad \lambda_1\lambda_2 \geqq 0$$

ここで，対角和 $\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2$，行列式 $\det A = \lambda_1\lambda_2$ であるから

$$4c^2 + c^2 \geqq 0,\quad 4c^2 \cdot c^2 - 3c \cdot 3c \geqq 0$$

以上の結果から $\qquad \boldsymbol{c \leqq -\dfrac{3}{2},\quad c = 0,\quad \dfrac{3}{2} \leqq c}$

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2010.pdf