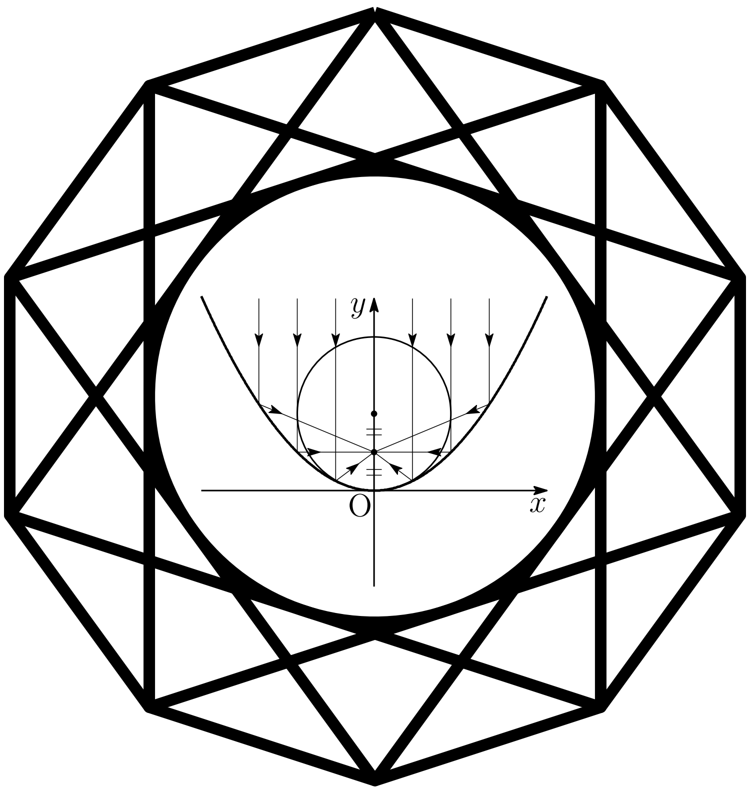
入 試 の 軌 跡

熊 本 大 学　 理 系

2015 − 2021

数　学



2021 年 7 月 10 日

Typed by LaTeX 2ε

序

本書は，熊本大学理系学部 (理，医保健 (放射線，検査)，薬，工学部) 受験者のための入試問題集である．本書には，平成 27 年 (2015 年) 度から令和 3 年 (2021 年) 度までの 2 次試験前期日程の問題 (現行課程) をすべて掲載した．

また，平成 9 年 (1997 年) 度から令和 3 年 (2021 年) 度までの年度ごとの問題および解答については，次のサイトに掲載している．

http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html

本書の編集にあたり，以下の点に留意した．

1. 本書は，電子文書 (PDF) での利用を想定し，問題と解答を相互にハイパーリンクを施した (内部リンクは青，外部リンクは赤)．

2. 本書は，ICT 授業を想定し，スクリーンは，全画面表示 ($\boxed{\text{Ctrl}}$+L) および描画領域に合わせる ($\boxed{\text{Ctrl}}$+3) と見やすくなる．ページスクロールには，($\boxed{\text{Ctrl}}$+▲，$\boxed{\text{Ctrl}}$+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る ($\boxed{\text{Alt}}$+◀)，進む ($\boxed{\text{Alt}}$+▶) も利用できる．なお，全画面表示を解除するには $\boxed{\text{ESC}}$．

3. 平成 13 年 (2001 年) 度から平成 26 年 (2014 年) 度までの旧課程の一般前期試験問題をまとめた『入試の軌跡　熊本大学　理系・医学部　数学』は，次である．

   http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_kiseki_ri_i.pdf

4. また，本書の姉妹版である『入試の軌跡　熊本大学　英語』も次のサイトに掲載しており，併せて活用いただけることを切に願うものである．

   http://kumamoto.s12.xrea.com/lis.html

令和 3 年 7 月　編者

目 次

第 1 章　一般前期問題

数学の試験時間は120分で，数学I・II・III・A・Bの範囲から4題出題され問題冊子(A4で4ページ)は，見開きで $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ が偶数ページ， $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が奇数ページに配置されている．解答用紙は， $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ の番号が書かれたA3用紙(4枚)と白紙(計算用紙)がはさみ込まれている．なお，解答用紙以外は持ち帰ることができる．

一般前期試験における理系数学の出題範囲は「数学I・II・III・A・B」であるが，過去11年の出題傾向をみると，数学IIIの微積分に関する分野からは毎年出題されており，数学Bの「ベクトル」と「数列」も必修分野でもある．近年，ベクトルは「空間ベクトル」からの出題が定着している．数列についても過去7年で6回出題された頻出分野である．

現行課程へ完全移行した5回の試験のうち，現行課程で導入された「複素数平面」の分野から4回出題されていることにも注意したい．

出題分野は限られているが，発想力や計算力を要求される問題が中心で，問題演習を重ねていくことが大切なようだ．

出題分野

2015 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	微分法	3次方程式の実数解の個数
2	標準	数学 B	空間のベクトル	一直線上の3点・垂直条件
3	標準	数学 B	数列	数列の図形への応用
4	標準	数学 B	数列	漸化式を導き一般項を求める
		数学 III	極限	数列の極限
		数学 III	積分法	定積分の計算

2016 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	ベクトルの正四面体への応用
2	標準	数学 A	整数の性質	4で割った余り
		数学 B	数列	総和計算の応用
3	標準	数学 III	複素数平面	極形式，ド・モアブルの定理
4	標準	数学 III	微分法の応用	最大値
		数学 III	積分法の応用	面積，y 軸の周りの回転体の体積

2017 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	内積・球面の方程式
2	標準	数学 III	複素数平面	正三角形の条件，2直線のなす角
3	標準	数学 III	微分法の応用	極値
		数学 III	積分法の応用	曲線と x 軸で囲まれた部分の面積
4	標準	数学 B	数列	曲線・直線への数列の応用

2018 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	四面体の体積
2	標準	数学 B	数列	S_n を用いた漸化式
3	標準	数学 III	積分法の応用	区分求積法
4	標準	数学 III	積分法	定積分で表された関数の最小値

2019 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 B	数列	分数漸化式
2	標準	数学 A	場合の数と確率	サイコロの目と条件式
3	標準	数学 III	積分法の応用	回転体の体積
4	標準	数学 III	積分法の応用	面積

2020 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 A	整数の性質	合同式
2	標準	数学 III	複素数平面	三角形の面積
3	標準	数学 III	積分法の応用	バウムクーヘン型求積法
4	標準	数学 III	式と曲線	楕円

2021 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	やや難	数学 B	空間のベクトル	位置ベクトル
2	標準	数学 II	微分法と積分法	接線の方程式
		数学 B	数列	数列の一般項
3	標準	数学 III	複素数平面	図形への応用
4	やや難	数学 III	積分法	はさみうちの原理

出題分野 (2011-2021)

		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
I	数と式		1									
	2 次関数											
	図形と計量											
	データの分析											
II	式と証明											
	複素数と方程式											
	図形と方程式											
	三角関数											
	指数関数と対数関数											
	微分法と積分法					1						2
III	式と曲線	4									4	
	複素数平面						3	2			2	3
	関数											
	極限				3	4						
	微分法とその応用		3	3	2		4	3				
	積分法	3	4	3		4			3·4			4
	積分法の応用			4	4		4	3		3·4	3	
A	場合の数と確率	1								2		
	整数の性質						2				1	
	図形の性質											
B	平面上のベクトル	2										
	空間のベクトル			2	1	2	1	1	1			1
	数列			1		3·4	2	4	2	1		2
	確率分布と統計											
C	行列 (旧課程)		2									

数字は問題番号

1.1　2015 年度

1 $f(x)$ は x の 3 次多項式とし，x^3 の係数は 1，定数項は 0 とする。2 つの異なる実数 α，β に対して $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ が満たされているとする。以下の問いに答えよ。 研

(1) $f(\alpha)$，$f(\beta)$ を α，β を用いて表せ。

(2) 不等式 $\alpha < \beta < 3\alpha$ が成り立つとき，3 次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数を求めよ。

2 p，q，r を実数とする。空間内の 3 点 A$(1,\ p,\ 0)$，B$(q,\ 1,\ 1)$，C$(-1, -1,\ r)$ が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ。ただし，O を原点とする。 研

(1) p は 1 でも -1 でもないことを示せ。

(2) q，r を p を用いて表せ。

(3) p'，q'，r' を実数とし，空間内の 3 点を A$'(1,\ p',\ 0)$，B$'(q',\ 1,\ 1)$，C$'(-1, -1,\ r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとき，p'，q'，r' を p を用いて表せ。

(4) (3) における 3 点 A$'$，B$'$，C$'$ は一直線上にないことを示せ。

3 △ABCにおいて，∠Bと∠Cは鋭角とする。点Aを通り辺BCに直交する直線を引き，辺BCとの交点をX_1とし，線分AX_1の長さを1とする。また，$BX_1 = 1$，$CX_1 = 8$とする．各$n = 1, 2, 3, \cdots$に対して以下の操作を行う。

> 辺BC上の点X_nを通り辺ACに平行な直線を引き，辺ABとの交点をY_nとする。また，点Y_nを通り辺BCに平行な直線を引き，辺ACとの交点をZ_nとする。点Z_nを通り辺BCに直交する直線を引き，辺BCとの交点をX_{n+1}とする。

線分Z_nX_{n+1}の長さをl_nとするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1を求めよ。

(2) l_{n+1}をl_nを用いて表せ。

(3) $l_n > \dfrac{1}{2}$となる最小の奇数nを求めよ。必要ならば，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$を用いてもよい。

4 数列$\{a_n\}$を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1} - a_n$を求めよ。

(2) $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$を求めよ。

1.2　2016 年度

1 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC を考える。$0 < s < \dfrac{1}{2}$ に対し OA を $s : (1-s)$ に内分する点を P とし，$0 < t < 1$ に対し OC を $t : (1-t)$ に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，s，t を用いて表せ。

(2) $\angle\mathrm{BPQ} = 90^\circ$ であるとき，t を s を用いて表せ。

(3) (2) の条件の下で，t の最大値とそのときの s の値を求めよ。

(4) (3) で求めた s，t に対して，PQ^2 を求めよ。

2 自然数 a に対して

$$S(a) = \sum_{k=1}^{a} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 和 $S(a)$ を求めよ。

(2) $S(a)$ が整数となる自然数 a を小さい順に並べた数列を

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n, \cdots$$

とする。一般項 a_n を求めよ。

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ について，a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を 4 で割った余りは 0 か 3 であることを示せ。

(4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と自然数 N に対して和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n}$ を求めよ。

3 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して，$\alpha = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする。ただし，i は虚数単位である。$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$z_n = \alpha^n - 2\alpha^{n-1}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ とするとき，z_n を極形式で表せ。

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| > 500$ となる最小の n を求めよ。

(3) z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ。

4 $x \geqq 1$ で定義された関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

について，以下の問いに答えよ。 研

(1) $x \geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) (1) で求めた x の値を a とする。曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $y = 0$，$x = a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

(3) (2) の図形 D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

1.3　2017 年度

1 原点を O とする座標空間内に 3 点 A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ がある。ただし，$a>0$，$b>0$，$c>0$ とする。$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とし，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。　研

(1) $\cos\theta$，$\sin\theta$ を a，b，c を用いて表せ。

(2) 点 O を中心とする半径 1 の球面上の点を H とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に垂直であるとき，

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$$

が成り立つことを示せ。

(3) (2) の条件のもとで $a=3$ としたとき，面積 S の最小値とそのときの b，c の値を求めよ。

2 $s>0$，$t>0$ とする。原点を O とする複素数平面において，$\alpha=2-i$，$\beta=s+ti$ を表す点をそれぞれ A，B とする。さらに，点 C を直線 OB に関して点 A と反対側にとり，$\triangle\mathrm{OBC}$ が正三角形になるようにする。点 C を表す複素数を z とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) z を s，t を用いて表せ。

(2) α，β が等式 $4\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=0$ を満たすとき，β と z をそれぞれ求めよ。

(3) (2) で求めた β と z に対して，直線 AC と直線 OB の交点を D とし，$\angle\mathrm{CDB}=\theta$ とする。このとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

3 関数 $f(x) = \log_2 x - x + 1\ (x > 0)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。なお，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ を用いてもよい。

(3) 座標平面上の曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 $f(x) = x^2 + x$ とし，j は自然数とする。数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$a_1 = 2$ とする。$a_n\ (n \geqq 1)$ に対して，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $({a_n}^j,\ f({a_n}^j))$ における接線と直線 $y = x$ との交点の x 座標を a_{n+1} とする。ただし，${a_n}^j$ は a_n の j 乗を表す。

以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対し，$a_n > 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $b_n = \log_2 a_n$ とおくとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1.4　2018 年度

1 t を実数とする。空間の 4 点 A(1, 5, 0)，B(4, 2, 0)，C(t, $2t$, $t-1$)，D(1, 6, 1) について，∠BAC が直角であるとき，以下の問いに答えよ。 研

(1) t の値を求めよ。

(2) D から A，B，C を通る平面に垂線を下ろし，A，B，C を通る平面との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{HD}}$ を求めよ。

(3) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

2 初項が 1 である数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。$\{S_n\}$ が

$$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n \quad (n \geqq 1)$$

をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，a_{n+1} を a_n と n を用いて表せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき，a_n を n の式で表せ。

3 n を 2 以上の自然数とする。区間 $[0,\ 1]$ を n 等分して，その両端と分点を順に $0 = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n = 1$ とする。関数 $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a > 0,\ b \geqq 0,\ c > 0)$ に対して，区間 $[x_{k-1},\ x_k]$ を底辺とし，高さが $f(x_k)$ である長方形の面積を L_k とする。ただし，$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ である。すべての n に対して $L_1 + L_n = \dfrac{10}{n} + \dfrac{8}{n^3}$ であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) a，b，c を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} kL_k$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 L_k$ を求めよ。

4 $-3 \leqq x \leqq 0$ に対して，$F(x) = \displaystyle\int_x^{x+3} \sqrt{3t^2 + t^3}\, dt$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $-3 < x < 0$ に対して，$F'(x) = 0$ の解を求めよ。

(2) $F(x)$ の最小値を求めよ。

1.5　2019 年度

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。　研

(1) 自然数 n に対して $a_n \neq 2$ を示せ。

(2) $b_n = \dfrac{3}{a_n - 2} + 1$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $a_n > \dfrac{5}{2}$ を満たす自然数 n を求めよ。

2　1 個のさいころを投げて，出た目の数を a とする。a が偶数のときは $b = \dfrac{1}{2}a$，a が奇数のときは $b = \dfrac{1}{2}(a + 3)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a > b$ となる確率を求めよ。

(2) $\sin\dfrac{\pi}{5} > 0.5$ および $\cos\dfrac{\pi}{5} < 0.9$ を示せ。

(3) $S = \cos\dfrac{\pi}{a} + \sin\dfrac{\pi}{b}$ とおく。$a > b$ であるとき，$S < 1.7$ となる条件付き確率を求めよ。

$\boxed{3}$ 座標平面上の曲線 $C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ および $C_2 : y = x^3 + 1$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ。ただし，$a \neq 0$ とする。

(2) (1) で求めた a に対し，曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{4}$ 座標平面上の曲線 $y = x \sin 3x + 3x^2$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを ℓ とし，その接点の x 座標を a とする。ただし，$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標をすべて求めよ。

(3) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

1.6 2020 年度

1 以下の問いに答えよ。

(1) x が自然数のとき，x^2 を 5 で割ったときの余りは 0，1，4 のいずれかであることを示せ。

(2) 自然数 x，y，z が $x^2+5y=2z^2$ を満たすとき，x，y，z はすべて 5 の倍数であることを示せ。

(3) $x^2+5y^2=2z^2$ を満たす自然数 x，y，z の組は存在しないことを示せ。

2 α，β を複素数とし，複素数平面上の点 O(0)，A(α)，B(β)，C($|\alpha|^2$)，D($\overline{\alpha}\beta$) を考える．3 点 O，A，B は三角形をなすとする。また，複素数 z に対し，$\mathrm{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

(1) △OAB の面積を S_1，△OCD の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(2) △OAB の面積 S_1 は $\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$ で与えられることを示せ。

(3) 実数 a，b に対し，複素数 z を $z=a+bi$ で定める。$1 \leqq a \leqq 2$，$1 \leqq b \leqq 3$ のとき，3 点 O(0)，P(z)，Q$\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする △OPQ の面積の最大値と最小値を求めよ。

3 $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，曲線 $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸，y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$\pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 a} \leqq V(b) - V(a) \leqq \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 b}$$

を示せ。

(2) (1) の不等式を用いて，$\dfrac{d}{dt}V(t) = 2\pi t\dfrac{1}{\cos^2 t}$ を示せ。

(3) $V\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ を求めよ。

4 正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{F}(t,\ 0)$，$\mathrm{F}'(3t,\ 0)$ からの距離の和が $2\sqrt{2}t$ であるような点 P の軌跡を C とする。直線 $y = x - 1$ を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

(1) C と ℓ が相異なる 2 つの共有点をもつような t の範囲を求めよ。

(2) t が (1) で求めた範囲を動くとき，C と ℓ の 2 つの共有点および原点 O を頂点とする三角形の面積の最大値を求めよ。

1.7 2021 年度

1 空間の点 O を通らない平面 α をとる。α 上の 3 点 A，B，C は三角形をなすとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。直線 ℓ は媒介変数 t を用いて

$$\frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$$

と表されるとする。

(1) ℓ は平面 α 上にあることを示せ。

(2) $\triangle$ABC の各辺と直線 ℓ との交点の個数をそれぞれ求めよ。また，交点がある場合，各交点 X について，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。

(3) A，B の中点を D とし，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となる点 E を考える。点 O と ℓ 上の点 Y を通る直線は 2 点 E，C を通る直線と交点をもつとし，その交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

2 曲線 $C : y = x^3 - 2x^2 + x$ 上に点 $\mathrm{P}_1(2,\ 2)$ がある。自然数 n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して点 P_n から点 P_{n+1} を次のように定める。

> 点 P_n を接点とする C の接線を ℓ_n とし，C と ℓ_n の共有点のうち，
> P_n と異なるものを P_{n+1} とする。

点 P_n の x 座標を a_n とする。

(1) P_2 の座標を求めよ。

(2) 接線 ℓ_n の傾きおよび y 切片をそれぞれ a_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3 複素数 w は実部，虚部ともに正であるとする。相異なる複素数 α，β，γ は

$$\{(w+2)\alpha\}^2+(w\beta)^2-(2\gamma)^2=4(w+2)\alpha^2+2w^2\alpha\beta-8\alpha\gamma$$

を満たすとする。α，β，γ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B，C とする。

(1) $\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2$ を w を用いて表せ。

(2) $\triangle$ABC が正三角形であるときの w の値を求めよ。

(3) $\triangle$ABC が正三角形であるとする。$w=\alpha$ かつ $\triangle$ABC の重心が点 $\dfrac{w^2}{2}$ であるとき，β と γ の値を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin x=\sin 2x$ の解を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x-\sin 2x|\,dx$ を求めよ。

(3) n を正の整数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin nx-\sin 2nx|\,dx$ を求めよ。

(4) c を正の数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{c} |\sin nx-\sin 2nx|\,dx$ を求めよ。

第 2 章　一般前期解答

熊大入試の特徴として，計算力を要求する問題が目立つ．特に「微分法と積分法」の分野の問題には煩雑な計算に陥る受験生も少なくないと思われる．

受験参考書等に次の公式が紹介されていることもあり，2016 年 4 番に出題された y 軸の周りの回転体の体積を，理系学部受験者の半数近く，医学部医学科受験者の 7 割が同公式を利用して，簡潔に解答している．熊大は公式の使用に関しては寛容で，減点されないと聞く．

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

2018 年 1 番の空間ベクトルの問題を受験生の中には大学で学ぶ外積 (ベクトル積) を使用して簡単に解答した受験もいたが，間違いではないということで減点はされなかったそうである．

2.1 2015年度

$\boxed{1}$ (1) x の3次式 $f(x)$ の x^3 の係数が1，$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ であるから $\boxed{研}$

$$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)=3x^2-3(\alpha+\beta)x+3\alpha\beta$$

また，$f(x)$ の定数項は0であるから

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)x^2+3\alpha\beta x$$

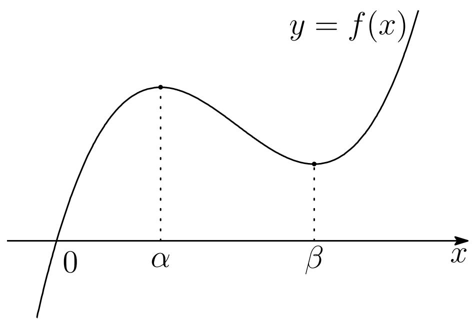
したがって

$$f(\alpha)=\alpha^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\alpha^2+3\alpha^2\beta=\boldsymbol{\frac{\alpha^2(3\beta-\alpha)}{2}}$$
$$f(\beta)=\beta^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\beta^2+3\alpha\beta^2=\boldsymbol{\frac{\beta^2(3\alpha-\beta)}{2}}$$

(2) $f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$

$\alpha<\beta<3\alpha$ より，$0<\alpha<\beta$，$3\alpha-\beta>0$ であるから，$f(\beta)>0$
したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は，次のようになる．



よって，$y=f(x)$ および $y=-1$ のグラフから，3次方程式 $f(x)=-1$ の実数解の個数は**1個**． ■

2　(1) A$(1,\ p,\ 0)$，B$(q,\ 1,\ 1)$，C$(-1, -1,\ r)$ より　研

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (1-q,\ p-1, -1), \qquad \overrightarrow{\mathrm{CA}} = (2,\ p+1, -r),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-q-1, -2,\ r-1), \qquad \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (q+1,\ 2,\ 1-r)$$

3 点 A，B，C が同一直線上にあるから，$p=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の y 成分に注意すると，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{0}$ となり，2 点 A，B が一致する．これら 2 点の z 座標は異なるので，不適．

また，$p=-1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の y 成分に注意すると，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{0}$ となり，2 点 C，A が一致する．これら 2 点の x 座標は異なるので，不適．

よって，$p \neq \pm 1$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CA}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ であるから，これらの x 成分，y 成分により

$$2\cdot 2 - (p+1)(q+1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q = \frac{3-p}{p+1}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから，これらの y 成分，z 成分により

$$(p-1)(r-1) - (-1)(-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r = \frac{p+1}{p-1}}$$

(3) (2) の結果より，A$(1,\ p,\ 0)$，B$\left(\dfrac{3-p}{p+1},\ 1,\ 1\right)$ であるから

$$(p+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2-2p,\ 1-p^2,\ 1+p)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = (1,\ p',\ 0)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$2-2p+p'(1-p^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{p' = -\frac{2}{p+1}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = (q',\ 1,\ 1)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$q'(2-2p)+1-p^2+1+p = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q' = -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = (-1, -1',\ r')$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$-(2-2p)-(1-p^2)+r'(1+p) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r' = -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}}$$

(4) (3) の結果から $\quad \mathrm{A}'\left(1, -\dfrac{2}{p+1},\ 0\right),$

$$\mathrm{B}'\left(-\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)},\ 1,\ 1\right),$$

$$\mathrm{C}'\left(-1, -1, -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}\right)$$

したがって $\quad \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = \left(\dfrac{-p^2-p+4}{2(p-1)},\ \dfrac{p+3}{p+1},\ 1\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{C}'} = \left(-2,\ \frac{-p+1}{p+1}, -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{C}'}$ であるとき，これらの x 成分，y 成分から

$$\frac{-p^2-p+4}{2(p-1)}\cdot\frac{-p+1}{p+1} - \frac{p+3}{p+1}\cdot(-2) = 0$$

整理すると $\quad p^2+5p+8=0 \quad \cdots(*)$

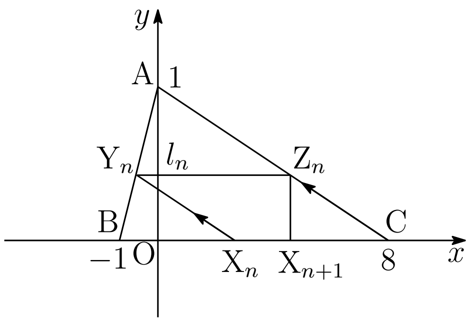
この方程式の判別式を D とすると

$$D = 5^2 - 4\cdot1\cdot8 = -7 < 0$$

したがって，方程式 $(*)$ は実数解をもたない．

よって，3 点 A'，B'，C' は一直線上にない． ■

3 (1) 座標平面上に点 A$(0,\ 1)$，B$(-1,\ 0)$，C$(8,\ 0)$，X$_n(x_n,\ 0)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をとる．直線 AB の方程式は



$$y=x+1 \quad \cdots ①$$

直線 AC の方程式は

$$y=-\frac{1}{8}x+1 \quad \cdots ②$$

直線 X$_n$Y$_n$ は点 $(x_n,\ 0)$ を通り，傾き $-\frac{1}{8}$ の直線であるから

$$y=-\frac{1}{8}(x-x_n) \quad \cdots ③$$

点 Y$_n$ の y 座標 l_n は，①，③ を解いて　$l_n=\dfrac{1+x_n}{9}$　$\cdots$ ④

このとき，$x_1=0$ であるから　$\boldsymbol{l_1=\dfrac{1}{9}}$

(2) 点 Z_n の y 座標が l_n であるから，その x 座標は，② より

$$l_n=-\frac{x}{8}+1 \quad これを解いて \quad x=8(1-l_n)$$

これが点 X$_{n+1}$ の x 座標であるから　$x_{n+1}=8(1-l_n)$

したがって，上式および ④ から

$$l_{n+1}=\frac{1+x_{n+1}}{9}=\frac{1+8(1-l_n)}{9}=\boldsymbol{-\frac{8}{9}l_n+1}$$

(3) (1)，(2) の結果から　$l_{n+1}=-\dfrac{8}{9}l_n+1$，$l_1=\dfrac{1}{9}$

この漸化式から　$l_n=\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n$

$l_n>\dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$

n は奇数であるから　$(-1)^n\left(\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$　ゆえに　$\left(\dfrac{8}{9}\right)^n<\dfrac{1}{16}$

したがって　$n>\dfrac{4}{\log_2 9-3}$

このとき，$3.169<\log_2 9<3.17$ より

$$23.5\cdots=\frac{4}{3.17-3}<\frac{4}{\log_2 9-3}<\frac{4}{3.169-3}=23.6\cdots$$

よって，求める最小の奇数 n は　$\boldsymbol{n=25}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $a_{n+1} - a_n = \displaystyle\int_0^{(n+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx - \int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx$

$$= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$$

$t = x - n\pi$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = 1$,

x	$n\pi \longrightarrow (n+1)\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \int_0^{\pi} e^{-(n\pi+t)}|\sin(t+n\pi)|\,dt \\ &= e^{-n\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt = e^{-n\pi}a_1 \\ &= e^{-n\pi}\left[-\frac{e^{-t}}{2}(\sin t + \cos t)\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-n\pi}} \end{aligned}$$

(2) $a_{n+1} - a_n = e^{-n\pi}a_1$, $a_1 = \dfrac{e^{-\pi}+1}{2}$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) &= a_1\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k\pi} \\ a_n &= a_1\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k\pi} = a_1 \times \frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}} \\ &= \frac{e^{-\pi}+1}{2} \times \frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}} = \frac{(1+e^{-\pi})(1-e^{-n\pi})}{2(1-e^{-\pi})} \end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから

$$a_n = \boldsymbol{\frac{(1+e^{-\pi})(1-e^{-n\pi})}{2(1-e^{-\pi})}}$$

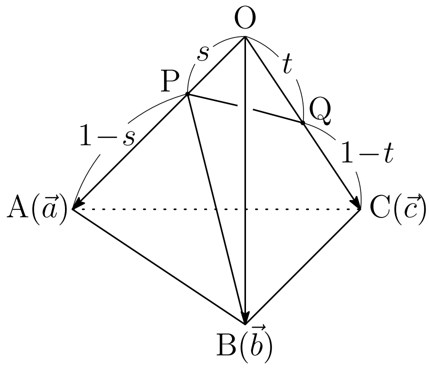
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-n\pi} = 0$ であるから

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}}$$

■

2.2　2016 年度

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\vec{c}$ であるから



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \boldsymbol{\vec{b} - s\vec{a}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \boldsymbol{t\vec{c} - s\vec{a}}\end{aligned}$$

(2) $\angle\mathrm{BPQ} = 90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$ であるから，(1) の結果から

$$(\vec{b} - s\vec{a})\cdot(t\vec{c} - s\vec{a}) = 0 \quad \text{整理すると} \quad t\vec{b}\cdot\vec{c} - s\vec{a}\cdot\vec{b} - st\vec{c}\cdot\vec{a} + s^2|\vec{a}|^2 = 0$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot1\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$，$|\vec{a}| = 1$ であるから

$$\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}st + s^2\cdot1^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (1-s)t = s(1-2s)$$

このとき，$0 < s < \dfrac{1}{2}$ に注意して　$\boldsymbol{t = \dfrac{s(1-2s)}{1-s}}$

(3) (2) の結果から

$$t = \frac{s(1-2s)}{1-s} = 2s + 1 - \frac{1}{1-s} = 3 - \left\{2(1-s) + \frac{1}{1-s}\right\} \quad \cdots①$$

$0 < s < \dfrac{1}{2}$ より $1 - s > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$2(1-s) + \frac{1}{1-s} \geqq 2\sqrt{2(1-s)\cdot\frac{1}{1-s}} = 2\sqrt{2} \quad \cdots②$$

上式で等号が成立するとき，$0 < s < \dfrac{1}{2}$ に注意して

$$2(1-s) = \frac{1}{1-s} \quad \text{すなわち} \quad s = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

このとき，①，② より t の最大値は　$\boldsymbol{3 - 2\sqrt{2}}$

(4) (1)，(3) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = |t\vec{c} - s\vec{a}|^2 = t^2|\vec{c}|^2 - 2st\vec{c}\cdot\vec{a} + s^2|\vec{a}|^2 \\ &= s^2 - st + t^2 \\ &= \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(3-2\sqrt{2}\right) + \left(3-2\sqrt{2}\right)^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{27-19\sqrt{2}}{2}}\end{aligned}$$

■

2　(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{a}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \boldsymbol{\sqrt{a+1}-1}$

(2) $S(a)$ が整数 $n \geqq 1$ に等しいとき，(1) の結果から

$$\sqrt{a+1}-1 = n \quad \text{ゆえに} \quad a = n(n+2)$$

よって，求める数列の一般項は　　$\boldsymbol{a_n = n(n+2)}$

(3) $n = 2m-1$ のとき (m は整数)

$$\begin{aligned}a_n &= (2m-1)\{(2m-1)+2\} = (2m-1)(2m+1) \\ &= 4m^2 - 1 = 4(m^2-1)+3\end{aligned}$$

$n = 2m$ のとき (m は整数)

$$a_n = 2m(2m+2) = 4m(m+1)$$

よって，a_n を 4 で割った余りは 0 か 3 である．

(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{N(3N+5)}{4(N+1)(N+2)}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\alpha = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ より

$$\begin{aligned} z_n &= \alpha^n - 2\alpha^{n-1} = \{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n - 2\{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{n-1} \\ &= 2^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) - 2^n\{\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta\} \\ &= 2^n\{\cos n\theta - \cos(n-1)\theta\} + 2^n i\{\sin n\theta - \sin(n-1)\theta\} \\ &= -2^{n+1}\sin\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} + 2^{n+1}i\cos\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} \qquad \cdots(*) \end{aligned}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} z_n &= -2^{n+1}\sin\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6} + 2^{n+1}i\cos\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6} \\ &= -2^n\sin\left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 2^n i\cos\left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \boldsymbol{2^n\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi + i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)} \end{aligned}$$

補足 $z_n = -2^n\sin\dfrac{2n-1}{6}\pi + 2^n i\cos\dfrac{2n-1}{6}\pi = 2^n i\left(\cos\dfrac{2n-1}{6}\pi + i\sin\dfrac{2n-1}{6}\pi\right)$

$$\begin{aligned} &= 2^n\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{2n-1}{6}\pi + i\sin\frac{2n-1}{6}\pi\right) \\ &= 2^n\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi + i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

別解 $z_n = \alpha^n - 2\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(\alpha - 2) \qquad \cdots①$

$$\begin{aligned} \alpha - 2 &= 2(\cos\theta + i\sin\theta) - 2 = 2(\cos\theta - 1 + i\sin\theta) \\ &= 4\left(-\sin^2\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) = 4i\sin\frac{\theta}{2}\left(i\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta+\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

上式および ① から

$$\begin{aligned} z_n &= 2^{n-1}\{\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\}\cdot 4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta+\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+\pi}{2}\right) \\ &= 2^{n+1}\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{(2n-1)\theta+\pi}{2} + i\sin\frac{(2n-1)\theta+\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

これに $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ を代入すると　$z_n = 2^n\left(\cos\dfrac{n+1}{3}\pi + i\sin\dfrac{n+1}{3}\pi\right)$

(2) (1) の結果より，$|z_k| = 2^k$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2(2^n - 1)}{2-1} = 2(2^n - 1)$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| > 500$ のとき　$2(2^n - 1) > 500$　ゆえに　$2^n > 251$

これを満たす最小の整数 n は　**8**

(3) $(*)$ より　$z_{1000} = -2^{1001} \sin \dfrac{1999}{2}\theta \sin \dfrac{\theta}{2} + 2^{1001} i \cos \dfrac{1999}{2}\theta \sin \dfrac{\theta}{2}$

z_{1000} が実数であるとき，自然数 j を用いて

$$\frac{1999}{2}\theta = \frac{2j-1}{2}\pi \quad ゆえに \quad \theta = \frac{2j-1}{1999}\pi$$

このとき，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$1 \leqq j \leqq 500$

よって，求める θ の個数は　**500** (個)　■

4 (1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ を微分すると　研

$$f'(x) = (\log x)'\frac{1}{x^2} + \log x\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2} + \log x\left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{1-2\log x}{x^3}$$

$f'(x) = 0$ とすると　　$x = \sqrt{e}$

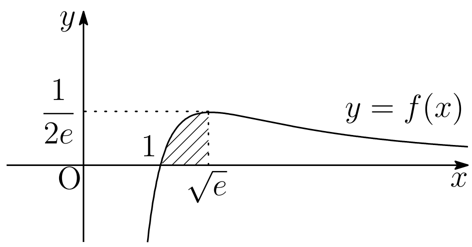
$f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ $(x \geqq 1)$ の増減表は，次のようになる．

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，求める最大値は　　$\boldsymbol{f(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2e}}$

(2) 求める面積を S とすると，(1) の結果から

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x^2}\,dx = -\int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx \\ &= -\left[\,\frac{1}{x}\log x\,\right]_1^{\sqrt{e}} + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= -\left[\,\frac{1}{x}(\log x + 1)\,\right]_1^{\sqrt{e}} = \boldsymbol{1 - \frac{3}{2\sqrt{e}}} \end{aligned}$$



(3) 求める立体の体積を V とすると

$$V = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} x\cdot\frac{\log x}{x^2}\,dx = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)(\log x)'\,dx = \pi\Big[\,(\log x)^2\,\Big]_1^{\sqrt{e}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

2.3　2017 年度

1　(1) A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ より　研

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-a,\ b,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-a,\ 0,\ c)$$

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角が θ であるから

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}}=\boldsymbol{\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}}$$

また，$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}=\boldsymbol{\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}}$$

(2) H$(x,\ y,\ z)$ とおくと，H は原点 O を中心とする半径 1 の球面上の点であるから

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \cdots(*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{HA}}=(a-x,-y,-z)$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=(-x,\ b-y,-z)$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}=(-x,-y,\ c-z)$ がいずれも $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x,\ y,\ z)$ に垂直であるから

$$\begin{aligned}(a-x)x-y^2-z^2&=0\\ -x^2+(b-y)y-z^2&=0\\ -x^2-y^2+(c-z)z&=0\end{aligned}$$

$(*)$ に注意してこれらを整理すると　$ax=1,\quad by=1,\quad cz=1$

上の 3 式から，$x=\dfrac{1}{a}$，$y=\dfrac{1}{b}$，$z=\dfrac{1}{c}$ を ① に代入して　$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=1$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta\\ &=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}\times\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\end{aligned}$$

上式および (2) の結果により

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}=\frac{1}{2}abc \quad \cdots(**)$$

(2) の結果および $(**)$ に $a=3$ を代入することにより

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{8}{9} \quad \cdots ①$$
$$S=\frac{3}{2}bc$$

2 数 $\dfrac{1}{b^2}$，$\dfrac{1}{c^2}>0$ について相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{8}{9}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^2}}=\frac{2}{bc} \quad \text{すなわち} \quad bc\geqq\frac{9}{4}$$

したがって　　$S=\dfrac{3}{2}bc\geqq\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{9}{4}=\dfrac{27}{8}$

上式において，等号が成立するのは，$\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{c^2}$ のときであるから，① より

$\boldsymbol{b=c=\dfrac{3}{2}}$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{27}{8}}$ をとる．

補足　a を $a>1$ を満たす定数とする．

$\dfrac{1}{b^2}$ と $\dfrac{1}{c^2}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$1-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^2}} \quad \text{ゆえに} \quad bc\geqq\frac{2a^2}{a^2-1}$$

したがって，$S=\dfrac{1}{2}abc$ より　　$S\geqq\dfrac{a^3}{a^2-1}$　■

$\boxed{2}$ (1) 点 C は直線 OB に関して点 A と反対側にあり，△OBC が正三角形であるから

$$z = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\beta = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(s+ti)$$
$$= \boldsymbol{\frac{s-\sqrt{3}t}{2} + \frac{\sqrt{3}s+t}{2}i}$$

(2) $4\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0$ より　$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) + 4 = 0$

2 点 A，B の位置関係に注意してこれを解くと

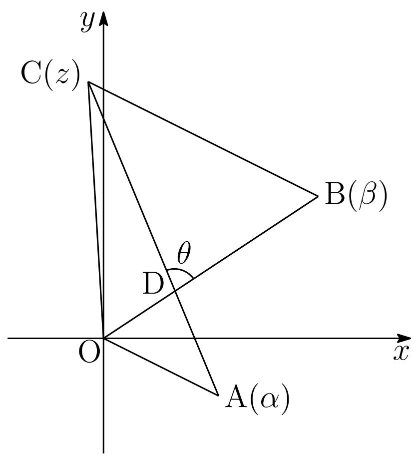
$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$w = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とおくと，$\dfrac{\beta}{\alpha} = 2w$，$\dfrac{z}{\beta} = w$ より

$$\beta = 2w\alpha = (1+\sqrt{3}i)(2-i) = \boldsymbol{2+\sqrt{3}+(-1+2\sqrt{3})i}$$
$$z = 2w^2\alpha = (-1+\sqrt{3}i)(2-i) = \boldsymbol{-2+\sqrt{3}+(1+2\sqrt{3})i}$$

(3) (2) の結果から

$$\frac{z-\alpha}{\beta} = \frac{2w^2\alpha - \alpha}{2w\alpha}$$
$$= \frac{2w^2-1}{2w} = \frac{1}{2}\left(2w - \frac{1}{w}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}(1+3\sqrt{3}i)$$



上の図から，$\theta = \arg\dfrac{z-\alpha}{\beta}$ であるから

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1^2+(3\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{14}}$$

■

3 (1) $f(x)=\log_2 x - x + 1$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{1}{x\log 2}-1=\frac{1}{\log 2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\log_2 e}\right)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$\log_2 e$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

極大値　$f(\log_2 e)=\log_2(\log_2 e)-\log_2 e+1=\boldsymbol{\log_2\left(\dfrac{2\log_2 e}{e}\right)}$

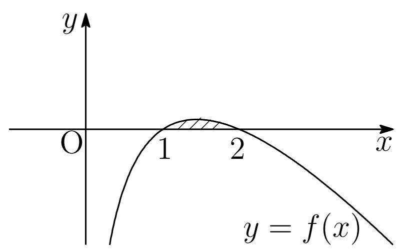
(2) (1) で示した増減表により，$f(x)=0$ の解の個数は高々2個.

$$f(1)=0,\quad f(2)=0$$

よって，求める解は　$\boldsymbol{x=1,\ 2}$

補足 $\log_2 x - x + 1 = 0$ の解は，$y=\log_2 x$ と $y=x-1$ の交点の x 座標.
凸関数のグラフと直線の共有点は高々2個.

(3) (1),(2) の結果から，求める面積は，右の図の斜線部分で，その面積を S とすると



$$\begin{aligned}S&=\int_1^2\left(\frac{\log x}{\log 2}-x+1\right)dx\\&=\left[\frac{x(\log x-1)}{\log 2}-\frac{1}{2}(x-1)^2\right]_1^2\\&=\boldsymbol{\frac{3}{2}-\frac{1}{\log 2}}\end{aligned}$$

■

4 (1) $f(x)=x^2+x$ を微分すると $f'(x)=2x+1$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)$$

すなわち $$y=(2t+1)x-t^2$$

これと直線 $y=x$ の方程式から y を消去すると

$$(2t+1)x-t^2=x \quad \text{ゆえに} \quad 2t\left(x-\frac{1}{2}t\right)=0$$

$t={a_n}^j$ とすると，$a_n>0$ のとき，$t\neq 0$ であるから

$$x=\frac{1}{2}t \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1}=\frac{1}{2}{a_n}^j>0$$

$a_1=2>0$ により，すべての自然数 n に対して $a_n>0$

(2) $a_n>0$ より $(n\geqq 1)$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}{a_n}^j$ の両辺を 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2\frac{1}{2}{a_n}^j \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 a_{n+1}=j\log_2 a_n-1$$

$b_n=\log_2 a_n\cdots$① であるから $\boldsymbol{b_{n+1}=jb_n-1}$

(3) $b_1=\log_2 a_1=\log_2 2=1$，① から $a_n=2^{b_n}\quad\cdots$②

(i) $j=1$ のとき，(2) の結果から $b_{n+1}=b_n-1$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 1，公差 -1 の等差数列であるから

$$b_n=1+(-1)(n-1) \quad \text{すなわち} \quad b_n=2-n$$

② から $\boldsymbol{a_n=2^{2-n}}$

(ii) $j\geqq 2$ のとき，(2) の結果から $b_{n+1}-\dfrac{1}{j-1}=j\left(b_n-\dfrac{1}{j-1}\right)$

数列 $\left\{b_n-\dfrac{1}{j-1}\right\}$ は，初項 $b_1-\dfrac{1}{j-1}$，公比 j の等比数列であるから

$$b_n-\frac{1}{j-1}=\left(b_1-\frac{1}{j-1}\right)j^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad b_n=\frac{(j-2)j^{n-1}+1}{j-1}$$

② から $\boldsymbol{a_n=2^{\frac{(j-2)j^{n-1}+1}{j-1}}}$ ■

2.4　2018 年度

1　(1) A(1, 5, 0)，B(4, 2, 0)，C$(t,\ 2t,\ t-1)$ より　研

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t-1,\ 2t-5,\ t-1)$$

$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$$3(t-1)-3(2t-5)+0(t-1)=0\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{t=4}$$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1,\ 6,\ 1)-(1,\ 5,\ 0)=(0,\ 1,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=(1,\ 1,-2)$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=k\vec{n}$ であるから (k は実数)，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+k\vec{n}$$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であるから　　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k|\vec{n}|^2$

したがって　$-1=6k$　　ゆえに　$k=-\dfrac{1}{6}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{HD}}=-\dfrac{1}{6}\vec{n}=\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{6},-\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{3}}\right)$

別解　(1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$

$\vec{e}_1=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$，$\vec{e}_2=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}$ とおくと，$\vec{e}_1\perp\vec{e}_2$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HD}}&=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1-(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2\\&=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1,\ 6,\ 1)-(1,\ 5,\ 0)=(0,\ 1,\ 1)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-3$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=18$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=27$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{HD}}=(0,\ 1,\ 1)+\frac{1}{6}(3,-3,0)-\frac{2}{9}(3,\ 3,\ 3)=\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\ \frac{1}{3}\right)$$

(3)　よって，求める四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{HD}}| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{HD}}|$$
$$= \frac{1}{6}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

別解　D から平面 ABC に下ろした垂線の長さを h，$\vec{e} = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ とおくと

$$h = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

よって，求める四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|h = \frac{3}{2}$$

補足　2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a}} \times \boldsymbol{\vec{b}}$ で表す[1]．本題において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3, -3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (3,\ 3,\ 3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-9, -9,\ 18)$$

四面体 ABCD の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (0,\ 1,\ 1)$ より

$$V = \frac{1}{6}|9| = \frac{3}{2}$$

ベクトル積 (外積) は高校数学の範囲外であるが，検算として利用できる．

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

2 (1) $S_1 = a_1 = 1$，$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n \quad \cdots (*)$

$(*)$ に $n = 1,\ 2$ を代入すると

$$S_2 = 2S_1 + 1^2 + 2{\cdot}1 = 5$$
$$S_3 = 2S_2 + 2^2 + 2{\cdot}2 = 18$$

よって　$a_2 = S_2 - S_1 = 5 - 1 = \mathbf{4}$，　$a_3 = S_3 - S_2 = 18 - 5 = \mathbf{13}$

(2) $(*)$ より　$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n$

$$S_n = 2S_{n-1} + (n-1)^2 + 2(n-1)$$

上の 2 式の辺々を引くと　$\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1}$

(3) 1 次関数 $f(n) = pn + q$ が，すべての n について，次式を満たすとき

$$f(n+1) = 2f(n) + 2n + 1 \quad \cdots ①$$

したがって　$p(n+1) + q = 2(pn + q) + 2n + 1$

整理すると　$pn + p + q = (2p + 2)n + 2q + 1$

上式は，n に関する恒等式であるから

$p = 2p + 2,\ \ p + q = 2q + 1$　これを解いて　$p = -2,\ \ q = -3$

ゆえに　$f(n) = -2n - 3 \quad \cdots ②$

(2) の結果と ① の辺々を引くと

$$a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$$

$f(2) = -2{\cdot}2 - 3 = -7$ であるから，$a_2 - f(2) = 4 - (-7) = 11$ より

$a_n - f(n) = 11{\cdot}2^{n-2}$　ゆえに　$a_n = 11{\cdot}2^{n-2} + f(n)$

これに ② を代入して　$\boldsymbol{a_n = 11{\cdot}2^{n-2} - 2n - 3}$　$(n \geqq 2)$　■

$\boxed{3}$ (1) $f(x) = ax^2 + bx + c$，$x_k = \dfrac{k}{n}$，$L_k = \dfrac{1}{n}f(x_k)$ より

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left\{a\left(\frac{1}{n}\right)^2 + b\left(\frac{1}{n}\right) + c\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{a}{n^2} + \frac{b}{n} + c\right), \\
L_n &= \frac{1}{n}f(1) = \frac{1}{n}(a+b+c)
\end{aligned}
$$

したがって　$L_1 + L_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a}{n^2} + \dfrac{b}{n} + a + b + 2c\right)$

条件式から　$L_1 + L_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{8}{n^2} + 10\right)$

上の 2 式から　$\boldsymbol{a = 8}$, $\boldsymbol{b = 0}$, $a + b + 2c = 10$　ゆえに　$\boldsymbol{c = 1}$

(2) $kL_k = k\cdot\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \dfrac{k}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$　$\cdots(*)$

(1) の結果より，$f(x) = 8x^2 + 1$ であるから

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kL_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 xf(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x(8x^2+1)\,dx = \left[\,2x^4 + \frac{x^2}{2}\,\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{5}{2}}
\end{aligned}
$$

(3) $(*)$ に $\dfrac{k}{n}$ を掛けると　$\dfrac{k^2}{n}L_k = \left(\dfrac{k}{n}\right)^2 f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2L_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}L_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2(8x^2+1)\,dx \\
&= \left[\,\frac{8}{5}x^5 + \frac{x^3}{3}\,\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{29}{15}}
\end{aligned}
$$

■

4 (1) $f(t)=\sqrt{3t^2+t^3}$ とおくと，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ より $(-3 \leqq x \leqq 0)$

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x+3)-f(x) = \frac{\{f(x+3)\}^2-\{f(x)\}^2}{f(x+3)+f(x)} \\ &= \frac{3(x+3)^2+(x+3)^3-(3x^2+x^3)}{f(x+3)+f(x)} = \frac{9(x+3)(x+2)}{f(x+3)+f(x)} \end{aligned}$$

よって，$-3<x<0$ における $F'(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=-2}$

(2) (1) で求めた $F'(x)$ により，$F(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$f(x)=|x|\sqrt{x+3}$，$-3 \leqq x \leqq 0$ に注意して，$F(x)$ を求める．

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^{x+3} f(t)\,dt \\ &= \int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt + \int_0^{x+3} t\sqrt{t+3}\,dt \quad \cdots ① \end{aligned}$$

まず
$$\begin{aligned} \int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt &= \int_0^x \left\{(t+3)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{t+3}\right\}dt \\ &= \left[\frac{2}{5}(t+3)^{\frac{5}{2}}-2(t+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x \\ &= \left[\frac{2}{5}(t-2)(t+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x \\ &= \frac{2}{5}(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}}+\frac{12}{5}\sqrt{3} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，② より

$$F(x)=\frac{2}{5}\{(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}}+(x+1)(x+6)^{\frac{3}{2}}\}+\frac{24}{5}\sqrt{3}$$

増減表から，求める最小値は

$$F(-2)=\frac{2}{5}(-4-4^{\frac{3}{2}})+\frac{24}{5}\sqrt{3}=\boldsymbol{\frac{24}{5}(\sqrt{3}-1)}$$

■

2.5　2019年度

$\boxed{1}$ (1) $a_1 \neq 2$ であるから，第 $m+1$ 項で初めて $a_{m+1}=2$ になると仮定すると，漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n}+1\cdots(*)$ に $n=m$ を代入すると　$\boxed{研}$

$$2=\frac{2}{a_m}+1 \quad すなわち \quad a_m=2$$

第 m 項ですでに $a_m=2$ となり，矛盾を生じる．

よって，すべての自然数 n に対して　$a_n \neq 2$

(2) $b_n=\dfrac{3}{a_n-2}+1\cdots(**)$ より　$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-2}$　これと $(*)$ により

$$a_{n+1}+1=\frac{2}{a_n}+2=\frac{2(a_n+1)}{a_n}$$
$$a_{n+1}-2=\frac{2}{a_n}-1=\frac{-(a_n-2)}{a_n}$$

上の2式から　$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-2}=-2\cdot\dfrac{a_n+1}{a_n-2}$　すなわち　$b_{n+1}=-2b_n$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{a_1+1}{a_1-2}=\dfrac{1+1}{1-2}=-2$，公比 -2 の等比数列であるから

$$b_n=b_1\cdot(-2)^{n-1}=\boldsymbol{(-2)^n}$$

補足 $\{a_n\}$ の特性方程式 $x=\dfrac{2}{x}+1$ の解が $2,-1$ であるから，数列 $\left\{\dfrac{a_n+1}{a_n-2}\right\}$ は等比数列である．

(3) $(**)$ より　$b_n-1=\dfrac{3}{a_n-2}$　ゆえに　$a_n-2=\dfrac{3}{b_n-1}$

上式および (2) の結果から　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{3}{(-2)^n-1}+2}$

(4) (3) の結果を $a_n>\dfrac{5}{2}$ に代入すると

$$\frac{3}{(-2)^n-1}+2>\frac{5}{2} \quad ゆえに \quad \frac{3}{(-2)^n-1}>\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$$

したがって　$0<(-2)^n-1<6$　ゆえに　$1<(-2)^n<7$

これを満たす自然数 n は　$\boldsymbol{n=2}$

■

2 (1) a に対する b の値は，次のようになる．

a	1	2	3	4	5	6
b	2	1	3	2	4	3

このとき，$a>b$ となるのは，次の 4 通り

a	2	4	5	6
b	1	2	4	3

よって，求める確率は　$\dfrac{4}{6}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(2) $\sin\dfrac{\pi}{5}>\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ より　$\sin\dfrac{\pi}{5}>0.5$

$\cos\dfrac{\pi}{5}<\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}<\sqrt{0.81}=0.9$　ゆえに　$\cos\dfrac{\pi}{5}<0.9$

(3) $\cos\dfrac{\pi}{4}=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{0.5}$，$\sqrt{0.49}<\sqrt{0.5}<\sqrt{0.64}$ より

$$0.7<\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}<0.8$$

(2) および上の結果に注意すると，$a<b$ となる $(a,\ b)$ について

$(a,\ b)=(2,\ 1)$ のとき　$S=\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\pi=0<1.7$

$(a,\ b)=(4,\ 2)$ のとき　$S=\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{2}>0.7+1=1.7$

$(a,\ b)=(5,\ 4)$ のとき　$S=\cos\dfrac{\pi}{5}+\sin\dfrac{\pi}{4}<0.9+0.8=1.7$

$(a,\ b)=(6,\ 3)$ のとき　$S=\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}>\sqrt{1.7^2}=1.7$

よって，求める条件付き確率は　$\dfrac{2}{4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

補足 $a<b$ である事象を X，$S<1.7$ である事象を Y とすると

$$P_X(Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}}=\frac{1}{2}$$

$(a,\ b)=(1,\ 2)$ のとき　$S=\cos\pi+\sin\dfrac{\pi}{2}=0<1.7$

$(a,\ b)=(3,\ 3)$ のとき　$S=\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1.7$

$P(Y)=\dfrac{4}{6}$ より，$P_X(Y)\neq P(Y)$ であるから，X と Y は独立ではない．■

3 (1) $C_1: y=x^2+2ax-2a+1$ と $C_2: y=x^3+1$ から y を消去すると

$$x^3+1=x^2+2ax-2a+1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x^2-2a)=0 \quad \cdots(*)$$

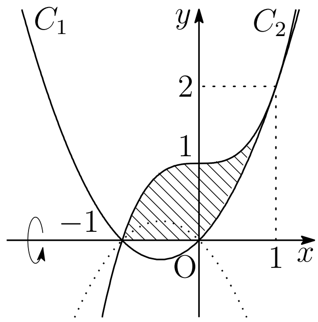
C_1 と C_2 の共有点がちょうど2個のとき，方程式 $(*)$ の実数解は2個ある．$a\neq 0$ より，$x^2-2a=0$ は重解をもたないから，方程式 $x^2-2a=0$ は $x=1$ を解にもつ．したがって

$$1^2-2a=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=\frac{1}{2}$$

これを $(*)$ に代入すると　$(x-1)^2(x+1)=0$

これは，条件を満たすから　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から　$C_1: y=x^2+x$



$$\begin{aligned}
&|x^3+1|^2-|x^2+x|^2\\
=&(x^3+1)^2-(x^2+x)^2\\
=&(x^3+x^2+x+1)(x^3-x^2-x+1)\\
=&(x+1)^2(x-1)^2(x^2+1)\geqq 0
\end{aligned}$$

したがって　$|x^3+1|\geqq|x^2+x|$

求める回転体の体積は，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに1回転させたものであるから，その体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi}&=\int_{-1}^{1}(x^3+1)^2\,dx-\int_0^1(x^2+x)^2\,dx\\
&=\int_{-1}^{1}(x^6+2x^3+1)\,dx-\int_0^1(x^4+2x^3+x^2)\,dx\\
&=2\int_0^1(x^6+1)\,dx-\int_0^1(x^4+2x^3+x^2)\,dx\\
&=\int_0^1(2x^6-x^4-2x^3-x^2+2)\,dx\\
&=\left[\frac{2}{7}x^7-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1=\frac{263}{210}
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V=\dfrac{263}{210}\pi}$　■

$\boxed{4}$ (1) $y = x\sin 3x + 3x^2$ を微分すると　$y' = \sin 3x + 3x\cos 3x + 6x$
C 上の x 座標が a である点における接線の方程式は

$$y - (a\sin 3a + 3a^2) = (\sin 3a + 3a\cos 3a + 6a)(x - a)$$

すなわち　$y = (\sin 3a + 3a\cos 3a + 6a)x - 3a^2(1 + \cos 3a)$　$\cdots$①

これが原点を通るから　$-3a^2(1 + \cos 3a) = 0$

$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < 3a < \dfrac{3}{2}\pi$ であるから

$$3a = \pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = \frac{\pi}{3}}$$

(2) (1) の結果を ① に代入することにより　$\ell : y = \pi x$
C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x\sin 3x + 3x^2 = \pi x \quad \text{すなわち} \quad x(\pi - \sin 3x - 3x) = 0 \quad \cdots(*)$$

$f(x) = \pi - \sin 3x - 3x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$f'(x) = -3\cos 3x - 3 = -3(1 + \cos 3x) \leqq 0$$

したがって，$f(x)$ は単調減少であり，

$$f(0) = \pi > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

であるから，方程式 $(*)$ の解は　$x = 0,\ \dfrac{\pi}{3}$

よって，求める共有点の座標は　$\boldsymbol{(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi^2}{3}\right)}$

(3) (2) の結果から，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，$x(\pi - \sin 3x - 3x) \geqq 0$ であるから，
求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\pi - \sin 3x - 3x)\,dx \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\left(\frac{\pi}{3} - x\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin 3x\,dx \\ &= \frac{3}{6}\left(\frac{\pi}{3}\right)^3 + \left[\frac{x}{3}\cos 3x - \frac{1}{9}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\pi^3}{54} - \frac{\pi}{9}}\end{aligned}$$

■

2.6 2020年度

1 (1) 法5について

$$\begin{array}{lll} x \equiv 0 \text{ のとき} & x^2 \equiv 0 & \pmod 5 \\ x \equiv 1 \text{ のとき} & x^2 \equiv 1 & \pmod 5 \\ x \equiv 2 \text{ のとき} & x^2 \equiv 4 & \pmod 5 \\ x \equiv 3 \text{ のとき} & x^2 \equiv 9 \equiv 4 & \pmod 5 \\ x \equiv 4 \text{ のとき} & x^2 \equiv 16 \equiv 1 & \pmod 5 \end{array}$$

よって，題意は成立する．

(2) $x^2 + 5y = 2z^2$ より，法5について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod 5$$

(1) の結果から，$(*)$ の左辺は法5について，0，1，4のいずれかに等しい．
一方，右辺は0，2，$8 \equiv 3 \pmod 5$ のいずれかに等しい．
したがって，$x^2 \equiv 0,\ 2z^2 \equiv 0 \pmod 5$，すなわち，$x \equiv z \equiv 0 \pmod 5$
$x = 5x',\ z = 5z'$ ($x',\ z'$は整数) を $x^2 + 5y = 2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2 + 5y = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y \equiv 0 \pmod 5$ であるから，x，y，z はすべて5の倍数である．

(3) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x，y，z が存在し，これら3数の最大公約数が1であるものを仮定する．
$x^2 + 5y^2 = 2z^2$ より，法5について

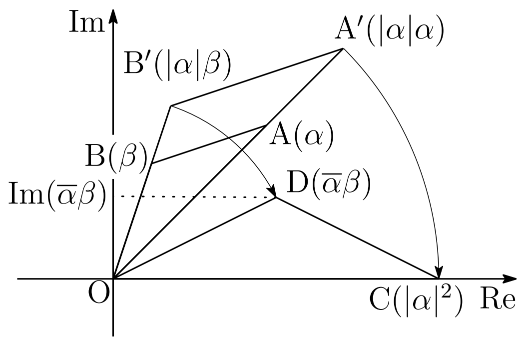
$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod 5$$

(1) の結果から，$(*)$ の左辺は法5について，0，1，4のいずれかに等しい．
一方，右辺は0，2，$8 \equiv 3 \pmod 5$ のいずれかに等しい．
したがって，$x^2 \equiv 0,\ 2z^2 \equiv 0 \pmod 5$，すなわち，$x \equiv z \equiv 0 \pmod 5$
$x = 5x',\ z = 5z'$ ($x',\ z'$は整数) を $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2 + 5y^2 = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y^2 \equiv 0 \pmod 5$ より，$y \equiv 0 \pmod 5$ であるから，x，y，z が5を共通因数にもつことになり，仮定に反する．よって，題意は証明された． ■

2　(1) 2 点 $\mathrm{C}(|\alpha|^2)$，$\mathrm{D}(\overline{\alpha}\beta)$ は，それぞれ 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ を原点を中心に $|\alpha|$ 倍の相似拡大，さらに原点を中心に $\arg\overline{\alpha}$ だけ回転 $\left(\times\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\right)$ したものであるから



$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\triangle\mathrm{OCD}}{\triangle\mathrm{OAB}}=\boldsymbol{|\alpha|^2}$$

(2) $\triangle\mathrm{OCD}$ の底辺を $|\alpha|^2$，高さを $|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$ とみると　$S_2=\dfrac{1}{2}|\alpha|^2|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

(1) の結果から　$S_1=\dfrac{1}{|\alpha|^2}S_2$　よって　$S_1=\dfrac{1}{|\alpha|^2}\cdot\dfrac{1}{2}|\alpha|^2|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|=\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

別解　$\theta=\angle\alpha 0\beta$ とすると　$\cos\theta+i\sin\theta=\dfrac{\frac{\beta}{|\beta|}}{\frac{\alpha}{|\alpha|}}=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\alpha}}=\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{|\alpha||\beta|}$

$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)}{|\alpha||\beta|}$ であるから　$S_1=\dfrac{1}{2}|\alpha||\beta||\sin\theta|=\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

(3) (2) の結果から，3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\overline{z}\cdot\frac{1}{z}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\right|$$

$z=a+bi\ (1\leqq a\leqq 2,\ 1\leqq b\leqq 3)$ であるから

$$\frac{\overline{z}}{z}=\frac{a-bi}{a+bi}=\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{2ab}{a^2+b^2}i,$$

$$\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|-\frac{2ab}{a^2+b^2}\right|=\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$\dfrac{b}{a}=u$，$\triangle\mathrm{OPQ}=S(u)$ とおくと　$S(u)=\dfrac{u}{1+u^2}$　$\left(\dfrac{1}{2}\leqq u\leqq 3\right)$

ゆえに　$S'(u)=\dfrac{1-u^2}{(1+u^2)^2}$

u	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$S'(u)$		$+$	0	$-$	
$S(u)$	$\frac{2}{5}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{10}$

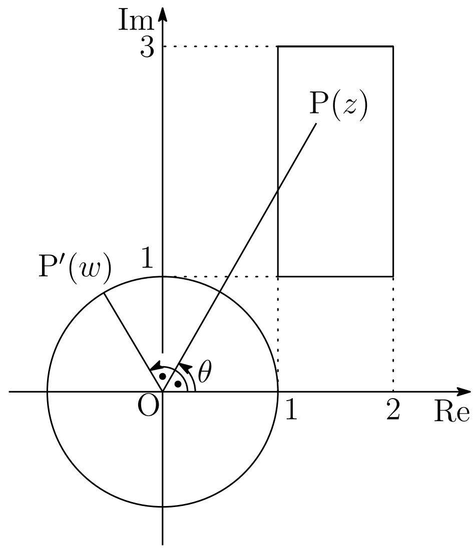
よって　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

別解 $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right) = -\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)$ であるから

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)\right|$$

$\theta = \arg(z)$，$w = \dfrac{z}{\overline{z}}$ とすると

$$\begin{aligned} w &= \left|\frac{z}{\overline{z}}\right| = \frac{|z|}{|\overline{z}|} = 1, \\ \arg(w) &= \arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) \\ &= \arg(z) - \arg(\overline{z}) \\ &= \theta - (-\theta) = 2\theta \end{aligned}$$



点 $\mathrm{P}'(w)$ は，点 $\mathrm{P}(z)$ から単位円周上の点 P' への写像で，その偏角について

$$\arg(w) = 2\arg(z)$$

が成立する．$z = a + bi$ $(1 \leqq a \leqq 2,\ 1 \leqq b \leqq 3)$ より，$\theta = \arg(z)$ のとり得る値の範囲を $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ とすると，上の図から

$$\tan\theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \tan\theta_2 = 3 \quad \left(0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$$

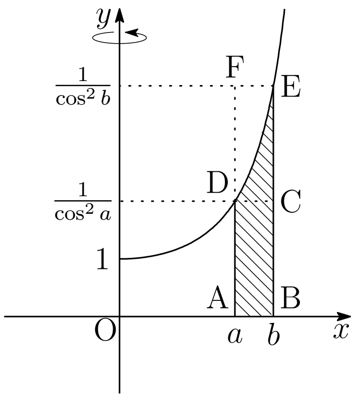
したがって　　$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta \quad \cdots (*)$

このとき　　$\sin 2\theta_1 = \dfrac{2\tan\theta_1}{1+\tan^2\theta_1} = \dfrac{4}{5}$,　$\sin 2\theta_2 = \dfrac{2\tan\theta_2}{1+\tan^2\theta_2} = \dfrac{3}{5}$

$(*)$ より，$\triangle\mathrm{OPQ}$ は，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，

$\theta = \theta_2$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$ ■

$\boxed{3}$ (1) 曲線 $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ が x 軸と区間 $a \leqq x \leqq b$ において囲まれた斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は



$$\int_0^b \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_0^a \frac{dx}{\cos^2 x} = V(b) - V(a)$$

右の図の長方形 ABCD，長方形 ABEF を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると

$$V_1 = \pi b^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} - \pi a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} = \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 a}$$
$$V_2 = \pi b^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 b} - \pi a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 b} = \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 b}$$

$V_1 \leqq V(b) - V(a) \leqq V_2$ であるから

$$\pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 a} \leqq V(b) - V(a) \leqq \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 b}$$

(2) (1) の結果から，$0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$ に注意して

$$\pi(b + a)\frac{1}{\cos^2 a} \leqq \frac{V(b) - V(a)}{b - a} \leqq \pi(b + a)\frac{1}{\cos^2 b} \quad \cdots (*)$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < u < \dfrac{\pi}{2}$ に対して，$(*)$ より

$0 < t < u < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\pi(u + t)\frac{1}{\cos^2 t} \leqq \frac{V(u) - V(t)}{u - t} \leqq \pi(u + t)\frac{1}{\cos^2 u} \quad \cdots ①$$

$0 < u < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\pi(u + t)\frac{1}{\cos^2 u} \leqq \frac{V(u) - V(t)}{u - t} \leqq \pi(u + t)\frac{1}{\cos^2 t} \quad \cdots ②$$

$\displaystyle\lim_{u \to t} \pi(u + t)\frac{1}{\cos^2 u} = 2\pi t\frac{1}{\cos^2 t} \cdots ③$，$\displaystyle\lim_{u \to t} \pi(u + t)\frac{1}{\cos^2 t} = 2\pi t\frac{1}{\cos^2 t} \cdots ④$

①〜④ から，$\dfrac{d}{dt}V(t) = \displaystyle\lim_{u \to t}\frac{f(u) - f(t)}{u - t}$ は，はさみうちの原理により

$$\frac{d}{dt}V(t) = 2\pi t\frac{1}{\cos^2 t}$$

(3) (2) の結果を利用すると

$$
\begin{aligned}
V\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\tan x)'\,dx \\
&= 2\pi\Big[\ x\tan x + \log\cos x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \boldsymbol{2\pi\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 2\right)}
\end{aligned}
$$

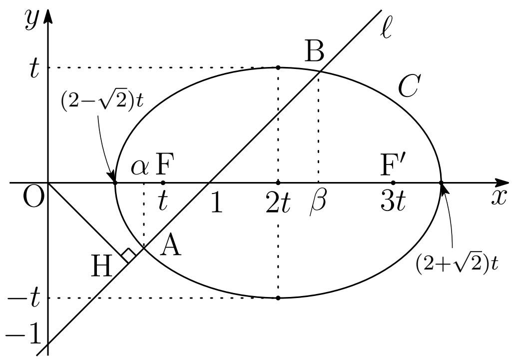
バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$
V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx
$$

補足 バウムクーヘン型求積法は，教科書では扱っていないが，問題集・参考書では重要公式として扱われている．熊大ではバウムクーヘン型求積法を用いる出題が目立ち，近年だけでも 2014 年 (理系)，2016 年 (理系・医医) で出題されている．2016 年では理系・医医の共通問題として出題され，理系の 5 割，医医の 7 割の受験生がバウムクーヘン型求積法を用いて解答したそうである (熊大入試連絡会)．本題 (3) は多くの受験生が，(1)，(2) の出来と関係なく独立して解答できたものと予想される．勿論，教科書にない公式 (バウムクーヘン型求積法) であるからということで減点されることはなかったそうである．熊大は発展的な解法に対しても寛大である．2018 年の空間のベクトルで四面体の体積をベクトル積 (外積) を用いた解答についても間違っていなかったため，正解として減点されることはなかったそうである (熊大入試連絡会)．2020 年文系でも外積を用いることができる問題が出題された．2020 年文系 4 番の解答にベクトル積 (外積) に関する解説を行っている． ■

$\boxed{4}$ (1) 2 点 $\mathrm{F}(t,\ 0)$，$\mathrm{F}'(3t,\ 0)$ からの距離の和が一定である点 P の描く軌跡 C は楕円で，その中心は $(2t,\ 0)$ である．楕円 C の直軸の長さを $2a$，短軸の長さを $2b$ とすると $(a>b>0)$



$$2a=2\sqrt{2}t,\quad \sqrt{a^2-b^2}=\frac{1}{2}\mathrm{FF}'=t$$

これを解いて　$a=\sqrt{2}t$，$b=t$

したがって，楕円 C の方程式は　$\dfrac{(x-2t)^2}{2t^2}+\dfrac{y^2}{t^2}=1$

これと直線 $\ell: y=x-1$ の方程式から y を消去すると

$$\frac{(x-2t)^2}{2t^2}+\frac{(x-1)^2}{t^2}=1 \quad \text{ゆえに}\quad 3x^2-4(t+1)x+2(t^2+1)=0 \quad \cdots(*)$$

C と ℓ が相異なる 2 つの共有点をもつとき，$(*)$ の係数について

$$D/4=\{-2(t+1)\}^2-3\cdot 2(t^2+1)=-2(t^2-4t+1)>0$$

これを解いて　$\boldsymbol{2-\sqrt{3}<t<2+\sqrt{3}}$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha<\beta)$

$$\beta-\alpha=\frac{2(t+1)+\sqrt{D/4}}{3}-\frac{2(t+1)-\sqrt{D/4}}{3}$$
$$=\frac{2\sqrt{D/4}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{-2(t^2-4t+1)}$$

C と ℓ の 2 つの交点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha-1)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta-1)$ を結ぶ線分の長さは

$$\mathrm{AB}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{-2(t^2-4t+1)}$$

原点 O から直線 $\ell: x-y-1=0$ に垂線 OH を引くと

$$\mathrm{OH}=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\triangle$OAB の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{-2(t^2-4t+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{-2(t^2-4t+1)}=\frac{1}{3}\sqrt{-2(t-2)^2+6}$$

(1) の結果に注意して，$t=2$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ をとる． ■

2.7　2021年度

1　(1) ℓ 上の点Xについて

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})=\frac{2t}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}$$

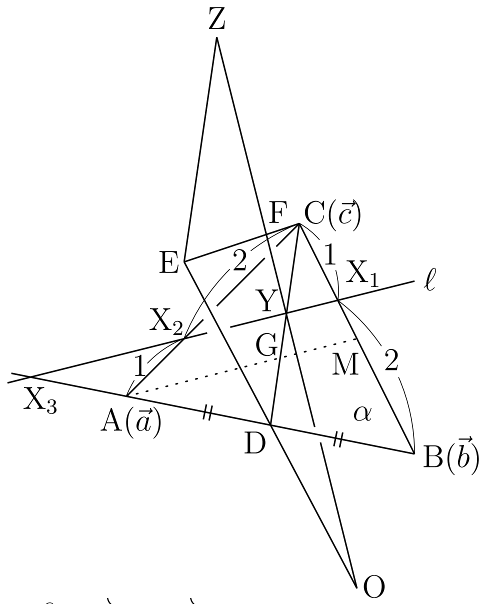
このとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数の和は

$$\frac{2t}{3}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)=1$$

よって，ℓ は平面 α 上の点である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数が0となる点をそれぞれ $\mathrm{X_1}$，$\mathrm{X_2}$，$\mathrm{X_3}$ とすると

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OX_1}}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}},\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OX_2}}=\frac{2\vec{a}+\vec{c}}{3}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OX_3}}=\frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}$$



直線 ℓ と△ABCの各辺との交点の個数について，辺BC上は $\mathrm{X_1}$ の**1**個，辺CA上は $\mathrm{X_2}$ の**1**個，辺AB上は**0**個．

(3) YはCD上の点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{CY}}=s\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{s}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})$　(s は実数)

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CX_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=3\overrightarrow{\mathrm{CX_1}}$ を代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{CY}}=\dfrac{3s}{4}\overrightarrow{\mathrm{CX_2}}+\dfrac{3s}{2}\overrightarrow{\mathrm{CX_1}}$

Yは直線 $\mathrm{X_1X_2}$ 上の点であるから　$\dfrac{3s}{4}+\dfrac{3s}{2}=1$

これを解いて　$s=\dfrac{4}{9}$　すなわち　$\mathrm{CY:YD}=4:5$　…①

$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ となる点Zをとると，条件から

$$\triangle\mathrm{OYD}\backsim\triangle\mathrm{OZE},\quad \mathrm{YD:ZE}=1:2\quad\cdots②$$

①，②および△CYF∽△EZFより　$\mathrm{CF:FE}=\mathrm{CY:ZE}=2:5$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2+5}=\frac{5\vec{c}+2(\vec{a}+\vec{b})}{7}=\boldsymbol{\frac{1}{7}(2\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c})}$$

別解　X_3 は線分 AB を $1:4$ に外分する点，D は AB の中点であるから

$$X_3A : AB = 1 : 3 \quad ゆえに \quad X_3A : AD = 2 : 3$$

$\triangle$CAD と直線 ℓ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{CX_2}{X_2A}\cdot\frac{AX_3}{X_3D}\cdot\frac{DY}{YC} = 1 \quad ゆえに \quad \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{DY}{YC} = 1$$

したがって　$CY : YD = 4 : 5$　　(以下同様)

別解　ℓ 上の点 Y について，$\overrightarrow{OY} = \frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OC} &= \frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}) - \vec{c} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{c}) + \frac{t}{3}\{2(\vec{a}-\vec{c}) - (\vec{b}-\vec{c})\} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{t}{3}(2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) = \frac{2t}{3}\overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{CY}$ は $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ と平行であるから

$$\frac{2t}{3} = \frac{1}{3} - \frac{t}{3} \quad これを解いて \quad t = \frac{1}{3}$$

$\overrightarrow{CY} = \frac{2}{9}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{4}{9}\overrightarrow{CD}$　　すなわち　$CY : YD = 4 : 5$　(以下同様)

補足　直線 ℓ について

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$

BC の中点を M とすると，この直線の方向ベクトル $2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ は

$$2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c} = -\{(\vec{b}-\vec{a}) + (\vec{c}-\vec{a})\} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -2\overrightarrow{AM}$$

したがって，ℓ は中線 AM と平行である．
2 つの中線 AM と CD の交点 G は $\triangle$ABC の重心であるから

$$CG : GD = 2 : 1$$

$\ell /\!/ AM$ であるから　$CY : YG = CX_2 : X_2A = 2 : 1$

$$CD : CY = 1 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 9 : 4 \quad ゆえに \quad CY : YD = 4 : 5$$

2 (1) $f(x)=x^3-2x^2+x$ とおくと　$f'(x)=3x^2-4x+1$

曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とすると

$$y-(t^3-2t^2+t)=(3t^2-4t+1)(x-t)$$

整理すると　$\ell: y=(3t^2-4t+1)x-2t^3+2t^2$

C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x^3-2x^2+x=(3t^2-4t+1)x-2t^3+2t^2$$

整理すると　$(x-t)^2(x+2t-2)=0$　ゆえに　$x=t,-2t+2$

したがって，C と ℓ の共有点で点 $(t,\ f(f))$ と異なる点は

$$(-2t+2,\ f(-2t+2)) \qquad (*)$$

点 $\mathrm{P}_1(2,\ f(2))$ のとき

$$\mathrm{P}_2(-2,\ f(-2)) \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{P_2(-2,-18)}$$

(2) ℓ_n は ℓ の方程式において，$t=a_n$ とすればよいから

$$\ell_n: y=(3{a_n}^2-4a_n+1)x-2{a_n}^3+2{a_n}^2$$

よって，ℓ_n の傾き $\boldsymbol{3{a_n}^2-4a_n+1}$，$y$ 切片 $\boldsymbol{-2{a_n}^3+2{a_n}^2}$

(3) $\mathrm{P}_1(2,\ 2)$ および $(*)$ から，$a_1=2$

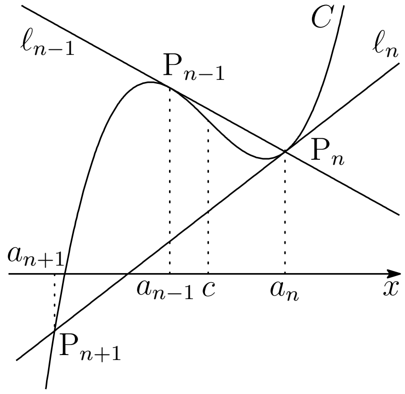
$$a_{n+1}=-2a_n+2 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1}-\frac{2}{3}=-2\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$$

したがって　$a_n-\dfrac{2}{3}=\left(a_1-\dfrac{2}{3}\right)(-2)^{n-1}$　よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{4}{3}(-2)^{n-1}+\dfrac{2}{3}}$

補足 3 次関数 $C: y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ f(a_n))$ における接線 ℓ_n とする．C と ℓ_n の共有点のうち，P_n と異なるものを $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ f(a_{n+1}))$ とし，C の変曲点の x 座標を c とすると

$$a_{n+1}-c=-2(a_n-c)$$

が成立する．



3 (1) $$\{(w+2)\alpha\}^2+(w\beta)^2-(2\gamma)^2=4(w+2)\alpha^2+2w^2\alpha\beta-8\alpha\gamma$$

これを w について整理すると

$$w^2(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)=4(\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2)$$
$$w^2(\beta-\alpha)^2=4(\gamma-\alpha)^2$$

α，β，γ は相異なる複素数であるから

$$\boldsymbol{\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2=\frac{w^2}{4}}$$

(2) (1) の結果から　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\dfrac{w}{2}$

w の実部，虚部はともに正であるから　$0<\arg w<\dfrac{\pi}{2}$

(i) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{w}{2}$ のとき　$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\arg\left(\dfrac{w}{2}\right)=\arg w$

$$0<\arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)<\frac{\pi}{2}$$

(ii) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=-\dfrac{w}{2}$ のとき　$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\arg\left(-\dfrac{w}{2}\right)=\arg w+\pi$

$$\pi<\arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)<\frac{3}{2}\pi$$

△ABC が正三角形であるとき

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1 \quad \text{かつ} \quad \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$

$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\dfrac{5}{3}\pi$ は，(i)，(ii) ともに満たさない．

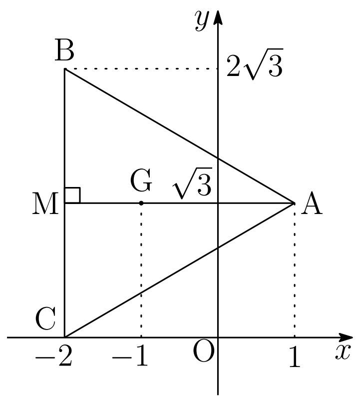
$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ は (i) を満たし，このとき

$$\left|\frac{w}{2}\right|=\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1 \quad \text{かつ} \quad \arg\left(\frac{w}{2}\right)=\arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\frac{\pi}{3}$$

したがって　$(*)$ $\dfrac{w}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$　よって　$\boldsymbol{w=1+\sqrt{3}i}$

(3) $(*)$ より

$$\alpha = 2\cdot\frac{w}{2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 1 + \sqrt{3}i$$
$$\frac{w^2}{2} = 2\left(\frac{w}{2}\right)^2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= -1 + \sqrt{3}i$$



BC の中点を M とすると　$\mathrm{M}(-2+\sqrt{3}i)$

AM $= 3$ より　BM $=$ CM $= \sqrt{3}$　よって　$\boldsymbol{\beta = -2 + 2\sqrt{3}i,\ \gamma = -2}$

4 (1) $\sin x = \sin 2x$ より

$$\sin x = 2\sin x\cos x \quad ゆえに \quad \sin x(1 - 2\cos x) = 0$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，これを解くと　$\boldsymbol{x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi}$

(2) $f(x) = \sin x - \sin 2x$ とし，$I = \displaystyle\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx$ とおくと

$$I = \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{\pi} |f(x)|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

$\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} |f(x)|\,dx$ について，$x = 2\pi - u$ とおくと

$$\frac{dx}{du} = -1$$

x	$\pi \longrightarrow 2\pi$
u	$\pi \longrightarrow 0$

$$f(2\pi - x) = \sin(2\pi - x) - \sin 2(2\pi - x)$$
$$= -\sin x + \sin 2x = -f(x)$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_{\pi}^{0} |f(2\pi - u)|\,(-1)du$$
$$= \int_0^{\pi} |f(u)|\,du = \int_0^{\pi} |f(x)|\,dx$$

したがって

$$I = 2\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx$$

$f(x)=\sin x(1-2\cos x)$ より　$|f(x)|=\begin{cases} -f(x) & (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}) \\ f(x) & (\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \pi) \end{cases}$

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)=-\cos x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{I}{2} &= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} f(x)\,dx = -\Big[\,F(x)\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\Big[\,F(x)\,\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= F(0)-2F\left(\frac{\pi}{3}\right)+F(\pi)=-\frac{1}{2}-2\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}=\frac{5}{2} \end{aligned}$$

よって　　$I=2\times\dfrac{5}{2}=\mathbf{5}$

(3) $I_n=\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin nx-\sin 2nx|\,dx$ とおく．

$t=nx$ とすると　$\dfrac{dt}{dx}=n$

x	$0 \longrightarrow\ 2\pi$
t	$0 \longrightarrow 2n\pi$

$$I_n=\int_0^{2n\pi}|\sin t-\sin 2t|\,\frac{1}{n}dt=\frac{1}{n}\int_0^{2n\pi}|\sin x-\sin 2x|\,dx \qquad (*)$$

$f(x)$ は周期 2π の周期関数であるから，(2) の結果を用いて

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi}|f(x)|\,dx=\frac{1}{n}\cdot n\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx \\ &= \int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx=I=\mathbf{5} \end{aligned}$$

(4) $J_n = \displaystyle\int_0^c |\sin nx - \sin 2nx|$ とおく．

$t = nx$ とすると　$\dfrac{dt}{dx} = n$

x	$0 \longrightarrow c$
t	$0 \longrightarrow nc$

$$J_n = \int_0^{nc} |\sin t - \sin 2t|\,\frac{1}{n}dt = \frac{1}{n}\int_0^{nc} |f(t)|\,dt = \frac{1}{n}\int_0^{nc} |f(x)|\,dx$$

$\dfrac{nc}{2\pi}$ 以下の最大の整数を N とすると

$$(**)\quad N \leqq \frac{nc}{2\pi} < N+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2N\pi \leqq nc < 2(N+1)\pi$$

$(*)$ および (2) の結果により，$I_N = \dfrac{1}{N}\displaystyle\int_0^{2N\pi} |f(x)|\,dx = 5$ であるから

$$\int_0^{2N\pi} |f(x)|\,dx = 5N$$

したがって

$$\frac{1}{n}\int_0^{2N\pi} |f(x)|\,dx \leqq \frac{1}{n}\int_0^{nc} |f(x)|\,dx < \frac{1}{n}\int_0^{2(N+1)} |f(x)|\,dx$$

$$\frac{1}{n}\cdot 5N \leqq J_n < \frac{1}{n}\cdot 5(N+1)$$

$(**)$ より　$\dfrac{nc}{2\pi} - 1 < N$，$N+1 \leqq \dfrac{nc}{2\pi} + 1$ であるから

$$\frac{5}{n}\left(\frac{nc}{2\pi} - 1\right) < J_n < \frac{5}{n}\left(\frac{nc}{2\pi} + 1\right)$$

$$\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n} < J_n < \frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n}$$

このとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n}\right) = \frac{5c}{2\pi}$，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n}\right) = \frac{5c}{2\pi}$

よって，はさみうちの原理により　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n = \frac{5c}{2\pi}}$

第 3 章　一般前期研究

3.1　2015 年度

3.1.1　1 番 テイラー展開

$f(t)$ を必要な回数だけ微分可能 (C^∞級) な関数とし，$k \geqq 1$ とする．　問　解

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt &= -\int_a^x \left\{\frac{(x-t)^k}{k!}\right\}' f^{(k)}(t)\,dt \\ &= -\left[\,\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)\,\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$

上式を $k = 1, 2, 3, \ldots n-1$ について辺々を加えると

$$\int_a^x f'(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

ゆえに

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \tag{3.1}$$

さらに，積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値，最小値を，それぞれ M，m とすると，
$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$ は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} M\,dt = \frac{M}{n!}(x-a)^n, \quad \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} m\,dt = \frac{m}{n!}(x-a)^n$$

の間の値をとるので，この区間内のある c は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{3.2}$$

を満たす．(3.2) を (3.1) に代入すると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{3.3}$$

(3.3) を $f(x)$ の $x=a$ におけるテイラー展開 (Taylor expansion) という．
とくに $a=0$ とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \tag{3.4}$$

となり，これをマクローリン展開 (Maclaurin's expansion) という．
　さらに，(3.3) から得られる級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

をテイラー級数 (Taylor series) という．同様に，(3.4) から得られる級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad \cdots (*)$$

をマクローリン級数 (Maclaurin's series) という．

- $f(x) = e^x$ のとき，$f^{(n)}(x) = e^x$ より $f^{(n)}(0) = 1$
- $f(x) = \cos x$ のとき，$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ より $f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2}$
- $f(x) = \sin x$ のとき，$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ より $f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2}$

これらの結果を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \end{aligned}$$

上の第 1 式から　$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

したがって
$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos x + i\sin x \end{aligned}$$

等式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ をオイラーの公式 (Euler's Formula) という．

3 次式 $f(x)$ の x^3 の係数を a とし，$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ を満たすとすると $(\alpha<\beta)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3a(x-\alpha)(x-\beta)=3a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} \\ f''(x) &= 3a\{2x-(\alpha+\beta)\} \\ f'''(x) &= 6a \end{aligned}$$

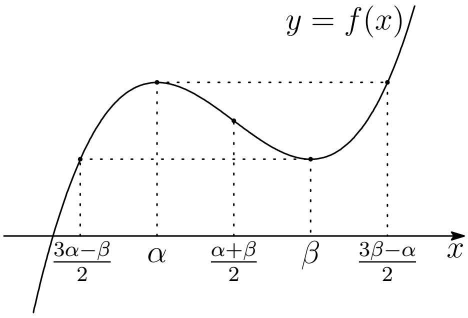
$f(x)$ を $x=\alpha$ を極として，テイラー展開を行うと

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{1}{2!}f''(\alpha)(x-\alpha)^2+\frac{1}{3!}f'''(\alpha)(x-\alpha)^3$$

したがって
$$\begin{aligned} f(x)-f(\alpha) &= \frac{3a}{2}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2+a(x-\alpha)^3 \\ &= a(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

同様にして　$f(x)-f(\beta)=a(x-\beta)^2\left(x-\dfrac{3\alpha-\beta}{2}\right)$

$a>0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる．



とくに，数列 $\dfrac{3\alpha-\beta}{2}$, α, $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, β, $\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$ は，等差数列をなす．

本題において，$f(0)=0$，$\alpha<\beta<3\alpha$ より，$0<\dfrac{3\alpha-\beta}{2}$ であるから

$$f\left(\frac{3\alpha-\beta}{2}\right)>0$$

よって，$y=f(x)$，$y=-1$ のグラフから，方程式 $f(x)=-1$ の実数解の個数は 1 個．

3.1.2 2 番 研究

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次が成立する． 問 解

空間ベクトルの平行条件

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$$\vec{a}/\!/\vec{b} \quad\Longleftrightarrow\quad (a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)=(0,\ 0,\ 0)$$

証明 64 ページに示したベクトル積 (外積)

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

により，$|\vec{a}\times\vec{b}|$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積と等しいから

$$\vec{a}/\!/\vec{b} \quad\Longleftrightarrow\quad |\vec{a}\times\vec{b}|=0 \quad \text{すなわち} \quad \vec{a}/\!/\vec{b} \quad\Longleftrightarrow\quad \vec{a}\times\vec{b}=(0,\ 0,\ 0)$$

証終

(1) $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,-1,\ r)$ が一直線上にあるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(q-1,\ 1-p,\ 1)\ \ /\!/\ \ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,-1-p,\ r)$$

平行条件により，次式が成立する．

$$\bigl(r(1-p)+1+p,\ \ -2-r(q-1),\ (q-1)(-1-p)+2(1-p)\bigr)=(0,\ 0,\ 0) \qquad \cdots(*)$$

$p=1$ のとき，左辺の x 成分が 2 となり不適．また，$p=-1$ のとき，左辺の z 成分が 4 となり不適． ■

(2) $(*)$ の x 成分および z 成分により

$$r(1-p)+1+p=0, \quad (q-1)(-1-p)+2(1-p)=0$$

q，r について解くと $\qquad q=\dfrac{3-p}{p+1}$，$r=\dfrac{p+1}{p-1}$ ■

平面の方程式

点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，法ベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ に垂直な平面 S の方程式は

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

証明 S 上に任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ をとる．$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より明らか[1]． 証終

[1] 昭和 59 年 3 月以前の高卒者は授業で学んでいた．

(3) (1),(2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (q-1,\ 1-p,\ 1) = \left(\frac{2(1-p)}{1+p},\ 1-p,\ 1\right)$$
$$= \frac{1}{1+p}\big(2(1-p),\ (1+p)(1-p),\ 1+p\big)$$

条件より，4 点 O，A$'$，B$'$，C$'$ は点 O を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直な平面上にある．

この平面 S の方程式は

$$S:\ 2(1-p)x + (1+p)(1-p)y + (1+p)z = 0$$

S 上に A$'(1,\ p',\ 0)$，B$'(q,\ 1,\ 1)$，C$'(-1, -1,\ \mathrm{r}')$ があるから

$$2(1-p) + (1+p)(1-p)p' = 0,$$
$$2(1-p)q' + (1+p)(1-p) + (1+p) = 0,$$
$$-2(1-p) - (1+p)(1-p) + (1+p)r' = 0$$

$p \neq \pm 1$ に注意して，それぞれ解くと

$$p' = -\frac{2}{p+1},\quad q' = -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)},\quad r' = -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}$$

■

(4) 3 点 A$'(1,\ p',\ 0)$，B$'(q',\ 1,\ 1)$，C$'(-1, -1,\ r')$ が一直線上にあると仮定すると，(1) と同様にして

$$\big(r'(1-p') + 1 + p',\ -2 - r'(q'-1),\ (q'-1)(-1-p') + 2(1-p')\big) = (0,\ 0,\ 0)$$

上式の x 成分から

$$r'(1-p') + 1 + p' = 0$$

これに (3) の結果を代入すると

$$-\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}\left(1 + \frac{2}{p+1}\right) + 1 - \frac{2}{p+1} = 0$$

整理すると

$$p^2 + 5p + 8 = 0 \quad \cdots (**)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D = 5^2 - 4{\cdot}1{\cdot}8 = -7 < 0$$

したがって，$(**)$ を満たす実数 p は存在しない．

よって，3 点 A$'$，B$'$，C$'$ は一直線上にない．

3.2　2016 年度

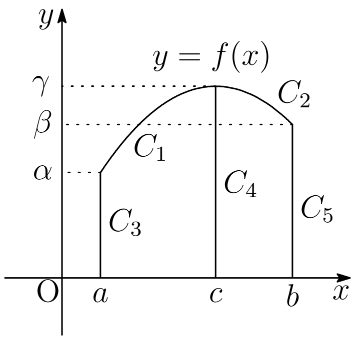
3.2.1　4 番 バウムクーヘン型求積法

次の回転体の体積について，円筒形に区分して考えると積分の意味が理解できる．

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積 V は　問　解

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

証明 $y=f(x)$ のグラフを単調増加または単調減少の区間に分けて証明する．例えば，右の図のように $y=f(x)$ は $a \leqq x \leqq c$ で単調増加，$c \leqq x \leqq b$ では単調減少とする．このとき，それぞれの区間で逆関数が存在することから



$$C_1 : x = g_1(y)\ (\alpha \leqq y \leqq \gamma),$$
$$C_2 : x = g_2(y)\ (\beta \leqq y \leqq \gamma)$$

とおき，さらに次のようにおく．

$$C_3 : x = a\ (0 \leqq y \leqq \alpha), \quad C_4 : x = c\ (0 \leqq y \leqq \gamma), \quad C_5 : x = b\ (0 \leqq y \leqq \beta)$$

x 軸と C_1，C_3，C_4 で囲まれた部分および C_2，C_4，C_5 で囲まれた部分をそれぞれ y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^\gamma c^2\,dy - \int_0^\alpha a^2\,dy - \int_\alpha^\gamma \{g_1(y)\}^2\,dy \\
&= c^2\gamma - a^2\alpha - \int_a^c x^2 f'(x)\,dx \\
&= c^2\gamma - a^2\alpha - \Big[\, x^2 f(x) \,\Big]_a^c + 2\int_a^c xf(x)\,dx = 2\int_a^c xf(x)\,dx \\
\frac{V_2}{\pi} &= \int_0^\beta b^2\,dy + \int_\beta^\gamma \{g_2(y)\}^2\,dy - \int_0^\gamma c^2\,dy \\
&= b^2\beta - c^2\gamma + \int_b^c x^2 f'(x)\,dx \\
&= b^2\beta - c^2\gamma + \Big[\, x^2 f(x) \,\Big]_b^c - 2\int_b^c xf(x)\,dx = 2\int_c^b xf(x)\,dx
\end{aligned}$$

よって　$V = V_1 + V_2 = 2\pi\displaystyle\int_a^c xf(x)\,dx + 2\pi\int_c^b xf(x)\,dx = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$

一般に，単調増加・単調減少の区間に分けることで上の結果を得る．　**証終**

3.3 2017 年度

3.3.1 1 番 相加平均・相乗平均・調和平均

n 個の正数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n の相加平均 A，相乗平均 G，調和平均 H は 問 解

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \quad H = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}$$

関数 $g(x) = x - 1 - \log x$ は，$x = 1$ で最小値 0 をとるから，$A > 0$ とすると

$$f(x) = g\left(\frac{x}{A}\right) = \frac{x}{A} - 1 - \log\frac{x}{A} \geqq 0$$

等号が成立するのは，$x = A$ のときに限る．

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A} - 1 - \log\frac{a_k}{A}\right)\\ &= \log A - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log a_k = \log A - \log G \geqq 0\end{aligned}$$

上式において，等号が成立するのは，$a_k = A$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ のときに限る．

すなわち　$A \geqq G$　(等号は，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき)

「相加平均 $\geqq$ 相乗平均」の大小関係により,「相乗平均 $\geqq$ 調和平均」の大小関係を導くことができる．

実際，n 個の正数 $\dfrac{1}{a_1}$，$\dfrac{1}{a_2}, \cdots$，$\dfrac{1}{a_n}$ に相加平均と相乗平均の大小関係を適用すると

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqq \sqrt{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}$$

ゆえに　$\dfrac{1}{H} \geqq \dfrac{1}{G}$　すなわち　$G \geqq H$　(等号は，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき)

よって　$A \geqq G \geqq H$　(等号は，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき)

補足 (3) の別解　(2) の結果に $a = 3$ を代入すると

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{8}{9}, \quad S = \frac{3}{2}bc$$

b^2，c^2 の相乗平均・調和平均の大小関係により

$$\sqrt{b^2c^2} \geqq \frac{2}{\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}} \quad \text{ゆえに} \quad bc \geqq \frac{9}{4} \quad \text{よって} \quad S \geqq \frac{27}{8}$$

3.4　2018年

3.4.1　1番 ベクトル積 (外積)

2つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b}}$ で表し，その成分は　問 解

$$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)}$$

であるから，$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \end{aligned}$$

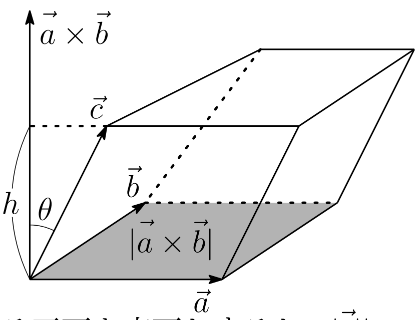
であるから，$\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a} \times \vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると

$$(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1 = |(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は　$\boldsymbol{V = \dfrac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c})\cdot\vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．

補足　本題で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3, -3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (3,\ 3,\ 3)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-9, -9,\ 18)$

したがって　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \dfrac{9}{2}\sqrt{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (0,\ 1,\ 1)$ より　$V = \dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \dfrac{1}{6}|9| = \dfrac{3}{2}$

3.5　2019 年

3.5.1　1 番 分数漸化式

p，q，$r \neq 0$，s を定数とする漸化式　問 解

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \cdots (*)$$

の一般項について，以下に述べる．
$ps - qr = 0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps - qr \neq 0$ とする．
$(*)$ の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s - p)x - q = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α，β とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \cdots (***)$$
$$a_{n+1} - \beta = \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき，上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$$

したがって　$$\frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \frac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha}\left(\frac{r\alpha + s}{r\beta + s}\right)^{n-1}$$

上式から，a_n が求まる．

ii) $\alpha = \beta$ のとき，$(*)$ の係数の係数について

$$(s - p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p + s)^2 = 4(ps - qr) \quad \cdots ①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha = \frac{p - s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \cdots ②$$

①，② により，$(***)$ は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p + s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p + s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p + s)\}} \end{aligned}$$

逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\dfrac{1}{a_n-\alpha}+\dfrac{2r}{p+s}$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項が $\dfrac{1}{a_1-\alpha}$，公差が $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる．

例えば，大分大学 2001 年の漸化式[2]

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=\frac{2a_n}{3a_n+5}$$

の特性方程式 $x=\dfrac{2x}{3x+5}$ の解が $0,-1$ であるから

$$a_{n+1}+1=\frac{5(a_n+1)}{3a_n+5}$$

したがって　$\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1}+1}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{a_n}{a_n+1}$　ゆえに　$\dfrac{a_n}{a_n+1}=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$

よって　$a_n=\dfrac{3\cdot2^{n-1}}{4\cdot5^{n-1}-3\cdot2^{n-1}}$

次に，宮崎大学 2003 年の漸化式[3]

$$a_1=\frac{q}{p}\ (p>q>0),\quad a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}\ (n=1,2,\cdots)$$

の特性方程式 $x=\dfrac{1}{2-x}$，すなわち $x^2-2x+1=0$ は重解 1 をもつから

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$$

ゆえに　$\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{1}{\frac{q}{p}-1}-(n-1)$　よって　$a_n=\dfrac{(n-1)p-(n-2)q}{np-(n-1)q}$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2001.pdf $\boxed{1}$
[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/miyazaki/miyazaki_2003.pdf $\boxed{12}$