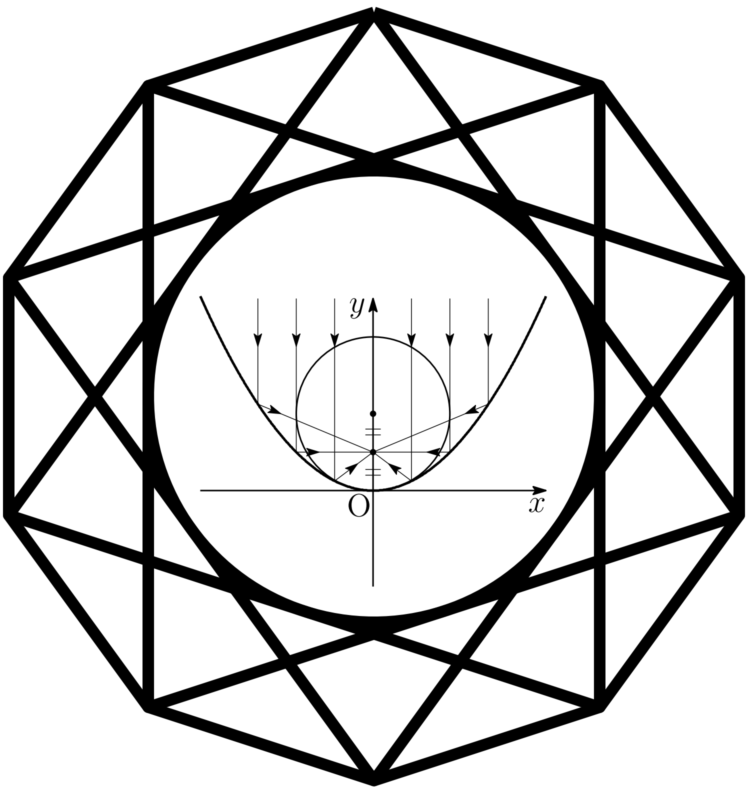
入試の軌跡

熊本大学　医医

2015 － 2020

数　学



2020 年 10 月 13 日

Typed by LaTeX 2ε

序

本書は，熊本大学医学部医学科受験者のための入試問題集である．本書には，平成 27 年 (2015 年) 度から令和 2 年 (2020 年) 度までの 2 次試験前期日程の問題 (現行課程) をすべて掲載した．
また，平成 9 年 (1997 年) 度から令和 2 年 (2020 年) 度までの年度ごとの問題および解答については，次のサイトに掲載している．

http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html

本書の編集にあたり，以下の点に留意した．

1. 本書は，電子文書 (PDF) での利用を想定し，問題と解答を相互にハイパーリンクを施した (内部リンクは青，外部リンクは赤)．

2. 本書は，ICT 授業を想定し，スクリーンは，全画面表示 (Ctrl+L) および描画領域に合わせる (Ctrl+3) と見やすくなる．ページスクロールには，(Ctrl+▲，Ctrl+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る (Alt+◀)，進む (Alt+▶) も利用できる．なお，全画面表示を解除するには ESC．

3. 平成 13 年 (2001 年) 度から平成 26 年 (2014 年) 度までの旧課程の一般前期試験問題をまとめた『入試の軌跡　熊本大学　理系・医学部　数学』は，次である．

   http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_kiseki_ri_i.pdf

4. また，本書の姉妹版である『入試の軌跡　熊本大学　英語』も次のサイトに掲載しており，併せて活用いただけることを切に願うものである．

   http://kumamoto.s12.xrea.com/lis.html

令和 2 年 5 月　編者

目 次

序 i

第 1 章 一般前期問題 1

1.1 2015 年度 5
1.2 2016 年度 7
1.3 2017 年度 9
1.4 2018 年度 11
1.5 2019 年度 13
1.6 2020 年度 15

第 2 章 一般前期解答 17

2.1 2015 年度 18
2.2 2016 年度 23
2.3 2017 年度 28
2.4 2018 年度 33
2.5 2019 年度 40
2.6 2020 年度 44

第 3 章 一般前期研究 51

3.1 2015 年 51
3.1.1 2 番 研究 51
3.2 2016 年 54
3.2.1 2 番 バウムクーヘン型求積法 54
3.3 2017 年 55
3.3.1 1 番 研究 1 55
3.3.2 1 番 研究 2 56
3.3.3 3 番 (2) 別解 58
3.4 2018 年 61
3.4.1 1 番 ベクトル積 (外積) 61
3.4.2 3 番 (2) 研究 62

第 1 章　一般前期問題

数学の試験時間は 120 分で，数学 I・II・III・A・B の範囲から 4 題出題され問題冊子 (A4 で 4 ページ) は，見開きで $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ が偶数ページ， $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が奇数ページに配置されている．解答用紙は， $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ の番号が書かれた A3 用紙 (4 枚) と白紙 (計算用紙) がはさみ込まれている．なお，解答用紙以外は持ち帰ることができる．

一般前期試験における医学部医学科の数学は，2009 年に医学部医学科独自の問題となり，この 12 年の出題傾向をみると，主に微積分に関する分野からは毎年出題されている．数学 A の「場合の数と確率」，数学 B の「ベクトル」と「数列」も必修分野でもある．特に「空間ベクトル」の出題率が高い．現行課程へ完全移行した 5 回の試験のうち，現行課程で導入された「複素数平面」の分野から 4 回出題されていることにも注意したい．

出題分野は限られているが，発想力や計算力を要求される問題が中心で，問題演習を重ねていくことが大切なようだ．

出題分野

2015 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 III	微分法	△ABC の成立条件，$\cos C$ の値の範囲
2	標準	数学 B	空間のベクトル	一直線上の 3 点，垂直条件
3	標準	数学 B	数列	数列の図形への応用
4	標準	数学 B	数列	漸化式を導き一般項を求める
		数学 III	極限	数列の極限
		数学 III	積分法	定積分の計算

2016 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	ベクトルの正四面体への応用
2	標準	数学 III	微分法の応用	最大値
		数学 III	積分法の応用	面積，y 軸の周りの回転体の体積
3	標準	数学 III	複素数平面	極形式，ド・モアブルの定理
4	標準	数学 III	微分法の応用	面積の最小値
		数学 III	積分法の応用	3 次関数のグラフと x 軸で囲まれた面積

2017 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 II	三角関数	三角形の面積の最小値
2	標準	数学 III	複素数平面	正三角形の条件，2 直線のなす角
3	標準	数学 III	微分法の応用	曲線と直線の共有点
		数学 III	積分法の応用	曲線と直線で囲まれた部分の面積
4	やや難	数学 III	極限	分数の和の最大，極限値

2018 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	四面体の体積
2	やや難	数学 A	確率	サイコロを移動させる確率
3	標準	数学 III	複素数平面	双曲線の偏角
4	標準	数学 III	積分法	定積分で表された関数の最大・最小

2019 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 III	積分法の応用	回転体の体積
2	標準	数学 II	図形と方程式	軌跡の方程式
3	標準	数学 III	積分法の応用	面積
4	標準	数学 A	場合の数と確率	球を取り出す確率

2020 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 III	積分法の応用	媒介変数による曲線，面積
2	標準	数学 III	複素平面	三角形の面積
3	標準	数学 A	整数の性質	合同式
4	やや難	数学 III	積分法の応用	区分求積法

出題分野 (2011-2020)

		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	数と式										
I	2 次関数										
	図形と計量					1					
	データの分析										
	式と証明										
	複素数と方程式										
II	図形と方程式			4						2	
	三角関数							1			
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	4									
	式と曲線	3									
	複素数平面						3	2	3		2
	関数										
III	極限					4		4			
	微分法とその応用				2·3	1	2·4	3			
	積分法		3	3		4	4		4		
	積分法の応用				4		2	3		1·3	1·4
	場合の数と確率		1	1					2	4	
A	整数の性質	1									3
	図形の性質										
	平面上のベクトル						1				
B	空間のベクトル	2	4	2	1	2			1		
	数列					3·4					
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)		2			数字は問題番号					

1.1　2015 年度

$\boxed{1}$ $\triangle$ABC の 3 辺の長さを $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{AC}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とし，条件

$$a+b+c=1,\quad 9ab=1$$

が成り立つとする．以下の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) $\theta=\angle\mathrm{C}$ とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ p，q，r を実数とする。空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,-1,\ r)$ が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ。ただし，O を原点とする。　$\boxed{研}$

(1) p は 1 でも -1 でもないことを示せ。

(2) q，r を p を用いて表せ。

(3) p'，q'，r' を実数とし，空間内の 3 点を $\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}'(-1,-1,\ r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとき，p'，q'，r' を p を用いて表せ。

(4) (3) における 3 点 A'，B'，C' は一直線上にないことを示せ。

$\boxed{3}$ a と b を正の実数とする。△ABC において，∠B と ∠C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$\mathrm{BX}_1 = a$，$\mathrm{CX}_1 = b$ とする。各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して以下の操作を行う。

> 辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 を a，b を用いて表せ。

(2) l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ。

(3) $b = 8a$ のとき，$l_n > \dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてもよい。

$\boxed{4}$ r を正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を r を用いて表せ。

(4) (3) で求めた r の式を $f(r)$ とおく。$\displaystyle\lim_{r\to+0} rf(r)$ を求めよ。

1.2　2016 年度

1 $\triangle$ABC と，A を通り BC に平行な直線 l を考える。k を正の数とし，直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を，線分 PB と線分 QC が 1 点で交わるようにとる。その交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおき，また m を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = m\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，k，m を用いて表せ。

(2) $|\vec{b}| = 1$，$|\vec{c}| = 2$，$\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{3}{4}$，$m = -1$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ が直交するとき，k の値を求めよ。

2 $x \geqq 1$ で定義された関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

について，以下の問いに答えよ。 研

(1) $x \geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) (1) で求めた x の値を a とする。曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $y = 0$，$x = a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

(3) (2) の図形 D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

3 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して，$\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。ただし，i は虚数単位である。$n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$z_n=\alpha^n-2\alpha^{n-1}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，z_n を極形式で表せ。

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|>500$ となる最小の n を求めよ。

(3) z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ。

4 a，b を実数とし，曲線 $C: y=x^3-3ax^2+bx$ を考える。C の接線の傾きの最小値が -3 であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) C が x 軸の正の部分，負の部分とそれぞれ1点で交わるとする。このとき a の値の範囲を求めよ。

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき，C と x 軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め，そのときの a の値を求めよ。

1.3　2017 年度

1 半径 1 の円に外接する △ABC について，$\angle\mathrm{CAB} = 2x$，$\angle\mathrm{ABC} = 2y$，$\angle\mathrm{BCA} = 2z$ とする。△ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。　研

(1) $S = \dfrac{1}{\tan x} + \dfrac{1}{\tan y} + \dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2) $z = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの x，y を求めよ。

2 $s > 0$，$t > 0$ とする。複素数平面上の $\alpha = -i$，$\beta = 2 - 2i$，$\gamma = s + ti$ を表す点をそれぞれ A，B，C とする。さらに，点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり，△ACD が正三角形になるようにする。点 D を表す複素数を z とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) z を s，t を用いて表せ。

(2) α，β，γ が等式 $4(\beta - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2 - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = 0$ を満たすとき，γ と z をそれぞれ求めよ。

(3) (2) で求めた γ と z に対して，直線 AC と直線 BD の交点を F とし，$\angle\mathrm{DFC} = \theta$ とする。このとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

3 $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$ $(x>0)$ とする。座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とし，点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t>0)$ における曲線 C の接線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。

(2) (1) で求めた t の値を a とする。実数 k に対し，直線 $\ell_k : y = k(x-a)+f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。　研

(3) (2) の直線 ℓ_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき，それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\dfrac{1}{3}$ となるような k を求め，そのときの曲線 C と直線 ℓ_k で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 n は 2 以上の自然数とする。1 から $2n$ までの自然数の順列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2n}$ に対して，分数の和

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_{n+2}} + \cdots + \frac{a_n}{a_{2n}} \qquad \cdots(*)$$

を考える。1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して $(*)$ がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) S_2 を求めよ。

(2) S_n を与える順列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2n}$ の例を 1 つ挙げ，その理由を述べよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log n}$ を求めよ。

1.4　2018 年度

1 t を実数とする。空間の 4 点 A$(1,\ 5,\ 0)$，B$(4,\ 2,\ 0)$，C$(t,\ 2t,\ t-1)$，D$(1,\ 6,\ 1)$ について，以下の問いに答えよ。 研

(1) △ABC が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。

(2) A，B，C，D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。

(3) ∠BAC が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。

2 m，n を整数とする。xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

(1) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある確率を求めよ。

(2) 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3) 硬貨を 5 回投げたとき，初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。

3 複素数平面上で $|z+i|-|z-i|=1$ をみたす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) H の点 z に対して，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) H の点 z に対して $w=\dfrac{1}{z}$ とする。w の絶対値 r_2 と偏角 θ_2 のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。 研

4 関数 $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}\ (x \geqq -3)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の極大値を求めよ。

(2) $-3 \leqq x \leqq 0$ とするとき，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ の最大値と最小値を求めよ。

1.5　2019 年度

1 座標平面上の曲線 $C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ および $C_2 : y = x^3 + 1$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ。ただし，$a \neq 0$ とする。

(2) (1) で求めた a に対し，曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

2 座標平面上の直線 ℓ を $y = ax - a - 2$，直線 m を $y = bx + 3b$ とおく。直線 ℓ と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a，b は ℓ と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 A$(1, -2)$，点 B$(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) $\triangle$APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面上の曲線 $y = x\sin 3x + 3x^2$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを ℓ とし，その接点の x 座標を a とする。ただし，$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標をすべて求めよ。

(3) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 赤球と白球の2色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき，確率 p^2 でゲームに勝つものとする。n を2以上の整数とし，赤球，白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

(1) k を0以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ となることを示せ。

(2) k を1以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり，さらにゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)} \cdot \dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ であることを示せ。

(3) ゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。

1.6　2020 年度

1 xy 平面上において，媒介変数 t $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$ によって

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = 1 - \cos 3t \end{cases}$$

と表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) C 上の点で x 座標が最大になる点 P と y 座標が最大になる点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2) C 上の点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 α，β を複素数とし，複素数平面上の点 O(0)，A(α)，B(β)，C($|\alpha|^2$)，D($\overline{\alpha}\beta$) を考える．3 点 O，A，B は三角形をなすとする。また，複素数 z に対し，$\mathrm{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

(1) △OAB の面積を S_1，△OCD の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(2) △OAB の面積 S_1 は $\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$ で与えられることを示せ。

(3) 実数 a，b に対し，複素数 z を $z = a + bi$ で定める。$1 \leqq a \leqq 2$，$1 \leqq b \leqq 3$ のとき，3 点 O(0)，P(z)，Q$\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする △OPQ の面積の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ。

(1) x が自然数のとき，x^2 を 5 で割ったときの余りは 0，1，4 のいずれかであることを示せ。

(2) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x，y，z の組は存在しないことを示せ。

$\boxed{4}$ xy 平面において，x，y がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し，

$$0 < x < n, \quad 1 < 2^y < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点 $(x,\ y)$ の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} \leqq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

を示せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。

(3) (2) で求めた極限値を L とする。不等式

$$L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}$$

を示せ。

第 2 章　一般前期解答

熊大入試の特徴として，計算力を要求する問題が目立つ．特に「微分法と積分法」の分野の問題には煩雑な計算に陥る受験生も少なくないと思われる．

受験参考書等に次の公式が紹介されていることもあり，2016 年 4 番に出題された y 軸の周りの回転体の体積を，理系学部受験者の半数近く，医学部医学科受験者の 7 割が同公式を利用して，簡潔に解答している．熊大は公式の使用に関しては寛容で，減点されないと聞く．

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

2018 年 1 番の空間ベクトルの問題を受験生の中には大学で学ぶ外積 (ベクトル積) を使用して簡単に解答した受験もいたが，間違いではないということで減点はされなかったそうである．

2.1 2015 年度

$\boxed{1}$ (1) 三角形の成立条件により

$$a+b>c,\quad b+c>a,\quad c+a>b$$

$a+b+c=1$ より，$c=1-a-b$ を上の 3 式に代入すると

$$a+b>1-a-b,\quad b+(1-a-b)>a,\quad (1-a-b)+a>b$$

したがって $$a+b>\frac{1}{2},\quad a<\frac{1}{2},\quad b<\frac{1}{2}$$

$9ab=1$ より，$b=\dfrac{1}{9a}$ であるから

$$a+\frac{1}{9a}>\frac{1}{2}\quad\cdots①,\quad a<\frac{1}{2}\quad\cdots②,\quad \frac{1}{9a}<\frac{1}{2}\quad\cdots③$$

ここで，$a>0$ であるから，相加・相乗平均の関係により

$$a+\frac{1}{9a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{9a}}=\frac{2}{3}$$

ゆえに，$a>0$ について，① は成立する．

③ を解くと $a>\dfrac{2}{9}$ よって，これと ② から $\boldsymbol{\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}}$

(2) 余弦定理により $$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$c=1-a-b$，$ab=\dfrac{1}{9}$，$b=\dfrac{1}{9a}$ であるから

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{a^2+b^2-(1-a-b)^2}{2ab}=\frac{2a+2b-2ab-1}{2ab}\\&=\frac{2a+2b-2\cdot\frac{1}{9}-1}{2\cdot\frac{1}{9}}=9(a+b)-\frac{11}{2}\\&=9\left(a+\frac{1}{9a}\right)-\frac{11}{2}=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}\end{aligned}$$

ここで，$f(a)=9a+\dfrac{1}{a}-\dfrac{11}{2}\ \left(\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(a)&=9-\frac{1}{a^2}\\&=\frac{(3a+1)(3a-1)}{a^2}\end{aligned}$$

a	$\left(\frac{2}{9}\right)$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	(1)	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	(1)

よって $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<1}$ ■

2 (1) A$(1,\ p,\ 0)$，B$(q,\ 1,\ 1)$，C$(-1, -1,\ r)$ より 研

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (1-q,\ p-1, -1), \qquad \overrightarrow{\mathrm{CA}} = (2,\ p+1, -r),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-q-1, -2,\ r-1), \qquad \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (q+1,\ 2,\ 1-r)$$

3 点 A，B，C が同一直線上にあるから，$p=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の y 成分に注意すると，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{0}$ となり，2 点 A，B が一致する．これら 2 点の z 座標は異なるので，不適．
また，$p=-1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の y 成分に注意すると，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{0}$ となり，2 点 C，A が一致する．これら 2 点の x 座標は異なるので，不適．
よって，$p \neq \pm 1$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CA}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ であるから，これらの x 成分，y 成分により

$$2\cdot 2 - (p+1)(q+1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q = \frac{3-p}{p+1}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから，これらの y 成分，z 成分により

$$(p-1)(r-1) - (-1)(-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r = \frac{p+1}{p-1}}$$

(3) (2) の結果より，A$(1,\ p,\ 0)$，B$\left(\dfrac{3-p}{p+1},\ 1,\ 1\right)$ であるから

$$(p+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2-2p,\ 1-p^2,\ 1+p)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = (1,\ p',\ 0)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$2-2p+p'(1-p^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{p' = -\frac{2}{p+1}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = (q',\ 1,\ 1)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$q'(2-2p)+1-p^2+1+p = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q' = -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = (-1, -1',\ r')$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$-(2-2p)-(1-p^2)+r'(1+p) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r' = -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}}$$

(4) (3) の結果から $\mathrm{A}'\left(1, -\dfrac{2}{p+1},\ 0\right)$,

$\mathrm{B}'\left(-\dfrac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)},\ 1,\ 1\right)$,

$\mathrm{C}'\left(-1, -1, -\dfrac{(p+3)(p-1)}{p+1}\right)$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = \left(\dfrac{-p^2-p+4}{2(p-1)},\ \dfrac{p+3}{p+1},\ 1\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{C}'} = \left(-2,\ \dfrac{-p+1}{p+1}, -\dfrac{(p+3)(p-1)}{p+1}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{C}'}$ であるとき，これらの x 成分，y 成分から

$$\frac{-p^2-p+4}{2(p-1)}\cdot\frac{-p+1}{p+1} - \frac{p+3}{p+1}\cdot(-2) = 0$$

整理すると $p^2+5p+8=0 \quad \cdots(*)$

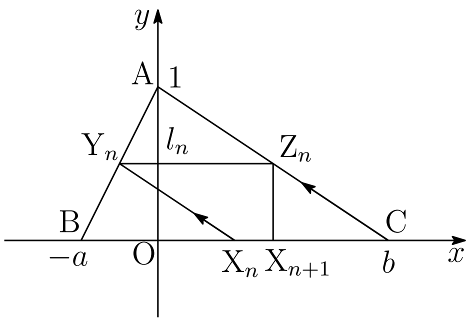
この方程式の判別式を D とすると

$$D = 5^2 - 4\cdot1\cdot8 = -7 < 0$$

したがって，方程式 $(*)$ は実数解をもたない．

よって，3 点 A'，B'，C' は一直線上にない． ■

3 (1) 座標平面上に点 A$(0,\ 1)$，B$(-a,\ 0)$，C$(b,\ 0)$，X$_n(x_n,\ 0)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をとる．直線 AB の方程式は



$$y=\frac{1}{a}x+1 \quad \cdots ①$$

直線 AC の方程式は

$$y=-\frac{1}{b}x+1 \quad \cdots ②$$

直線 X$_n$Y$_n$ は点 $(x_n,\ 0)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{b}$ の直線であるから

$$y=-\frac{1}{b}(x-x_n) \quad \cdots ③$$

点 Y$_n$ の y 座標 l_n は，①，③ を解いて　$l_n=\dfrac{a+x_n}{a+b}$　$\cdots$ ④

このとき，$x_1=0$ であるから　$\boldsymbol{l_1=\dfrac{a}{a+b}}$

(2) 点 Z_n の y 座標が l_n であるから，その x 座標は，② より

$$l_n=-\frac{x}{b}+1 \quad \text{これを解いて} \quad x=b(1-l_n)$$

これが点 X$_{n+1}$ の x 座標であるから　$x_{n+1}=b(1-l_n)$

したがって，上式および ④ から

$$l_{n+1}=\frac{a+x_{n+1}}{a+b}=\frac{a+b(1-l_n)}{a+b}=\boldsymbol{-\frac{b}{a+b}l_n+1}$$

(3) $b=8a$ のとき，(1)，(2) の結果から　$l_{n+1}=-\dfrac{8}{9}l_n+1,\ l_1=\dfrac{1}{9}$

この漸化式から　$l_n=\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n$

$l_n>\dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$

n は奇数であるから　$(-1)^n\left(\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$　ゆえに　$\left(\dfrac{8}{9}\right)^n<\dfrac{1}{16}$

したがって　$n>\dfrac{4}{\log_2 9-3}$

このとき，$3.169<\log_2 9<3.17$ より

$$23.5\cdots=\frac{4}{3.17-3}<\frac{4}{\log_2 9-3}<\frac{4}{3.169-3}=23.6\cdots$$

よって，求める最小の奇数 n は　$\boldsymbol{n=25}$　■

$\boxed{4}$ (1) $a_{n+1}-a_n=\displaystyle\int_0^{(n+1)\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx-\int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx$

$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx$$

$t=x-n\pi$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=1$,

x	$n\pi \longrightarrow (n+1)\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{\pi} e^{-r(n\pi+t)}|\sin(t+n\pi)|\,dt$$

$$=e^{-rn\pi}\int_0^{\pi} e^{-rt}\sin t\,dt=e^{-rn\pi}a_1$$

$$=e^{-rn\pi}\left[-\frac{e^{-rt}}{r^2+1}(r\sin t+\cos t)\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}e^{-nr\pi}}$$

(2) $a_{n+1}-a_n=e^{-rn\pi}a_1$，$a_1=\dfrac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_1\sum_{k=1}^{n-1}e^{-rk\pi}$$

$$a_n=a_1\sum_{k=0}^{n-1}e^{-rk\pi}=a_1\times\frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}}$$

$$=\frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}\times\frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}}=\frac{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$a_n=\boldsymbol{\frac{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}}$$

(3) $r>0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{-rn\pi}=0$ であるから

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+e^{-r\pi}}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}}$$

(4) $rf(r)=\dfrac{r(1+e^{-r\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}=\dfrac{1+e^{-r\pi}}{(1+r^2)\pi}\times\dfrac{-r\pi}{e^{-r\pi}-1}$ であるから

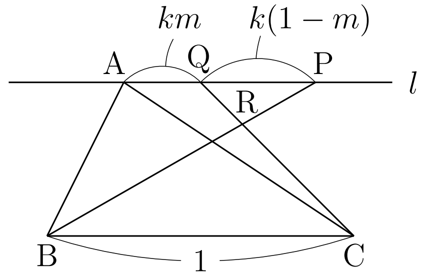
$$\lim_{r\to+0}rf(r)=\frac{1+1}{\pi}\times 1=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$

■

2.2　2016 年度

1 (1) BC : AP $= 1 : k$，AP : PQ $= 1 : 1 - m$ より　　BC : PQ $= 1 : k(1-m)$

△RBC ∽ △RPQ より　　BR : PR $= 1 : k(1-m)$

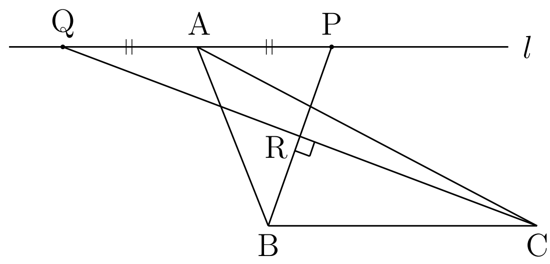


$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{BC}} = k(\vec{c} - \vec{b})$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{k(1-m)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}}{1 + k(1-m)} = \frac{k(1-m)\vec{b} + k(\vec{c} - \vec{b})}{1 + k(1-m)} = \boldsymbol{\frac{-km\vec{b} + k\vec{c}}{1 + k(1-m)}}$$

(2) $m = -1$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -k(\vec{c} - \vec{b})$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = k(\vec{c} - \vec{b}) - \vec{b} = -(k+1)\vec{b} + k\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -k(\vec{c} - \vec{b}) - \vec{c} = k\vec{b} - (k+1)\vec{c}$$



$\overrightarrow{\mathrm{BR}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CR}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{BP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{BP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = 0$ であるから

$$\{-(k+1)\vec{b} + k\vec{c}\} \cdot \{k\vec{b} - (k+1)\vec{c}\} = 0$$
$$-k(k+1)|\vec{b}|^2 + \{k^2 + (k+1)^2\}\vec{b} \cdot \vec{c} - k(k+1)|\vec{c}|^2 = 0$$

$|\vec{b}| = 1$，$|\vec{c}| = 2$，$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BAC} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$ であるから

$$-k(k+1) \cdot 1^2 + \{k^2 + (k+1)^2\} \cdot \frac{3}{2} - k(k+1) \cdot 2^2 = 0$$

整理すると　$4k^2 + 4k - 3 = 0$　ゆえに　$(2k-1)(2k+3) = 0$

$k > 0$ であるから　　$\boldsymbol{k = \frac{1}{2}}$ ■

2 (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ を微分すると　研

$$f'(x)=(\log x)'\frac{1}{x^2}+\log x\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}+\log x\left(-\frac{2}{x^3}\right)=\frac{1-2\log x}{x^3}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\sqrt{e}$

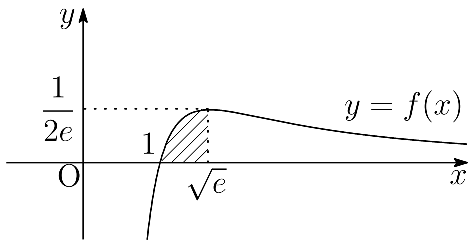
$f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ $(x\geqq 1)$ の増減表は，次のようになる．

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，求める最大値は　　$\boldsymbol{f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}}$

(2) 求める面積を S とすると，(1) の結果から

$$\begin{aligned}S&=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x^2}\,dx=-\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx\\&=-\left[\frac{1}{x}\log x\right]_1^{\sqrt{e}}+\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\&=-\left[\frac{1}{x}(\log x+1)\right]_1^{\sqrt{e}}=\boldsymbol{1-\frac{3}{2\sqrt{e}}}\end{aligned}$$



(3) 求める立体の体積を V とすると

$$V=2\pi\int_1^{\sqrt{e}}x\cdot\frac{\log x}{x^2}\,dx=2\pi\int_1^{\sqrt{e}}(\log x)(\log x)'\,dx=\pi\Big[(\log x)^2\Big]_1^{\sqrt{e}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

バウムクーヘン型求積法

$a\leqq x\leqq b$ の範囲で $f(x)\geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V は

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\alpha = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ より

$$
\begin{aligned}
z_n &= \alpha^n - 2\alpha^{n-1} = \{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n - 2\{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{n-1} \\
&= 2^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) - 2^n\{\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta\} \\
&= 2^n\{\cos n\theta - \cos(n-1)\theta\} + 2^n i\{\sin n\theta - \sin(n-1)\theta\} \\
&= -2^{n+1}\sin\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} + 2^{n+1}i\cos\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} \qquad \cdots(*)
\end{aligned}
$$

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$
\begin{aligned}
z_n &= -2^{n+1}\sin\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6} + 2^{n+1}i\cos\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6} \\
&= -2^n\sin\left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 2^n i\cos\left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{2^n\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi + i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)}
\end{aligned}
$$

補足 $z_n = -2^n\sin\dfrac{2n-1}{6}\pi + 2^n i\cos\dfrac{2n-1}{6}\pi = 2^n i\left(\cos\dfrac{2n-1}{6}\pi + i\sin\dfrac{2n-1}{6}\pi\right)$

$$
\begin{aligned}
&= 2^n\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{2n-1}{6}\pi + i\sin\frac{2n-1}{6}\pi\right) \\
&= 2^n\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi + i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)
\end{aligned}
$$

別解 $z_n = \alpha^n - 2\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(\alpha - 2) \qquad \cdots①$

$$
\begin{aligned}
\alpha - 2 &= 2(\cos\theta + i\sin\theta) - 2 = 2(\cos\theta - 1 + i\sin\theta) \\
&= 4\left(-\sin^2\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) = 4i\sin\frac{\theta}{2}\left(i\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta+\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

上式および ① から

$$
\begin{aligned}
z_n &= 2^{n-1}\{\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\}\cdot 4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta+\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+\pi}{2}\right) \\
&= 2^{n+1}\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{(2n-1)\theta+\pi}{2} + i\sin\frac{(2n-1)\theta+\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

これに $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ を代入すると　$z_n = 2^n\left(\cos\dfrac{n+1}{3}\pi + i\sin\dfrac{n+1}{3}\pi\right)$

(2) (1) の結果より，$|z_k| = 2^k$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2(2^n-1)}{2-1} = 2(2^n-1)$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| > 500$ のとき　$2(2^n-1) > 500$　ゆえに　$2^n > 251$

これを満たす最小の整数 n は　**8**

(3) $(*)$ より　$z_{1000} = -2^{1001}\sin\dfrac{1999}{2}\theta\sin\dfrac{\theta}{2} + 2^{1001}i\cos\dfrac{1999}{2}\theta\sin\dfrac{\theta}{2}$

z_{1000} が実数であるとき，自然数 j を用いて

$$\frac{1999}{2}\theta = \frac{2j-1}{2}\pi \quad ゆえに \quad \theta = \frac{2j-1}{1999}\pi$$

このとき，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$1 \leqq j \leqq 500$

よって，求める θ の個数は　**500** (個)　■

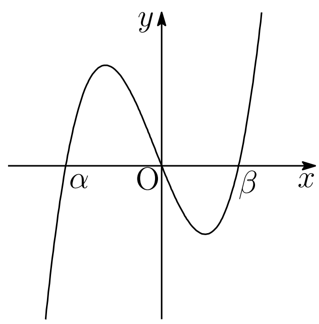
4 (1) $y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 6ax + b = 3(x-a)^2 - 3a^2 + b$$

y' の最小値が -3 であるから

$$-3a^2 + b = -3 \quad よって \quad \boldsymbol{b = 3a^2 - 3}$$

(2) $y = x(x^2 - 3ax + b)$ より，このグラフの x 軸の負の部分，正の部分で交わる点の x 座標をそれぞれ α，β とすると $(\alpha < 0 < \beta)$，α，β は 2 次方程式 $x^2 - 3ax + b = 0$ の解であるから，解と係数の関係により



$$\alpha + \beta = 3a, \quad \alpha\beta = b \quad \cdots(*)$$

このとき，$b < 0$ であるから，(1) の結果から

$$3a^2 - 3 < 0 \quad よって \quad \boldsymbol{-1 < a < 1}$$

(3) $(*)$ から，$y = x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x$．図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^0 \{x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x\}dx - \int_0^\beta \{x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x\}dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2\right]_\alpha^0 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2\right]_0^\beta \\
&= \frac{1}{12}(\alpha^4 + \beta^4) - \frac{1}{6}\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)
\end{aligned}$$

ここで，(1) の結果および (∗) に注意して

$$
\begin{aligned}
\alpha\beta &= b = 3a^2 - 3 \\
\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (3a)^2 - 2(3a^2-3) = 3a^2 + 6 \\
\alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 \\
&= (3a^2+6)^2 - 2(3a^2-3)^2 = -9a^4 + 72a^2 + 18
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{12}(-9a^4 + 72a^2 + 18) - \frac{1}{6}(3a^2-3)(3a^2+6) \\
&= -\frac{9}{4}a^4 + \frac{9}{2}a^2 + \frac{9}{2} \\
\frac{dS}{da} &= -9a^3 + 9a = -9a(a+1)(a-1)
\end{aligned}
$$

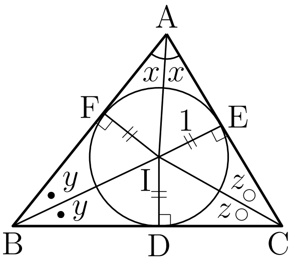
S の増減表は次のようになる．

a	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$\frac{dS}{da}$		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	極小 $\frac{9}{2}$	$\nearrow$	

$\boldsymbol{a = 0}$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$ をとる．■

2.3　2017 年度

1 (1) 右の図のように △ABC の内心を I とし，この内接円と 3 辺 BC，CA，AB との接点をそれぞれ D，E，F とする．△AEI について　研



$$\tan x = \frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{AE}} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AE} = \frac{1}{\tan x}$$

AE = AF であるから

$$\triangle\mathrm{AEI} = \triangle\mathrm{AFI} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot 1 = \frac{1}{2\tan x}$$

同様に　$\triangle\mathrm{BDI} = \triangle\mathrm{BFI} = \dfrac{1}{2\tan y}$，　$\triangle\mathrm{CDI} = \triangle\mathrm{CEI} = \dfrac{1}{2\tan z}$

S はこれらの三角形の面積の和であるから

$$S = 2\left(\frac{1}{2\tan x} + \frac{1}{2\tan y} + \frac{1}{2\tan z}\right) = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

(2) $2x + 2y + 2z = \pi$ より，$z = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$x + y = \dfrac{\pi}{3} \cdots$ ① であるから

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} + \sqrt{3} \\
&= \frac{\cos x\sin y + \sin x\cos y}{\sin x\sin y} + \sqrt{3} = \frac{2\sin(x+y)}{\cos(x-y) - \cos(x+y)} + \sqrt{3} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\cos(x-y) - \frac{1}{2}} + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

① より，$0 < x, y < \dfrac{\pi}{3}$ であるから

S は $\boldsymbol{x = y = \dfrac{\pi}{6}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{3\sqrt{3}}$

■

2 (1) 点 D は直線 AC に関して点 B と反対側にあり，△ACD が正三角形であるから

$$z = \alpha + \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\gamma - \alpha) = -i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\{s + (t+1)i\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{s - \sqrt{3}(t+1)}{2} + \frac{\sqrt{3}s + t - 1}{2}i}$$

(2) $4(\beta-\alpha)^2 + (\gamma-\alpha)^2 - 2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) = 0$ より

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) + 4 = 0$$

2 点 A，B の位置関係に注意してこれを解くと

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

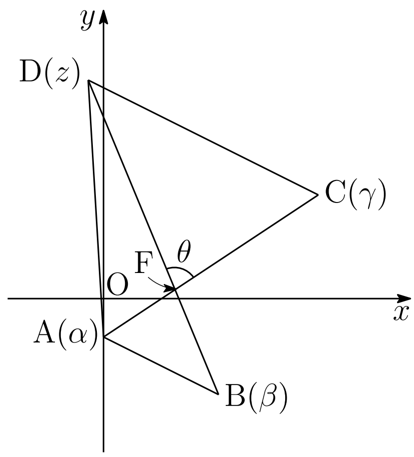
$w = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とおくと，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = 2w$，$\dfrac{z-\alpha}{\gamma-\alpha} = w$ より

$$\gamma - \alpha = 2w(\beta-\alpha) = (1+\sqrt{3}i)(2-i) = 2 + \sqrt{3} + (-1+2\sqrt{3})i$$
$$z - \alpha = 2w^2(\beta-\alpha) = (-1+\sqrt{3}i)(2-i) = -2 + \sqrt{3} + (1+2\sqrt{3})i$$

$\alpha = -i$ より　$\boldsymbol{\gamma = 2 + \sqrt{3} + (-2+2\sqrt{3})i}$

$\boldsymbol{z = -2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i}$

(3) (2) の結果から



$$\frac{z-\beta}{\gamma-\alpha} = \frac{z-\alpha-(\beta-\alpha)}{\gamma-\alpha}$$
$$= \frac{2w^2(\beta-\alpha) - (\beta-\alpha)}{2w(\beta-\alpha)}$$
$$= \frac{2w^2-1}{2w} = \frac{1}{2}\left(2w - \frac{1}{w}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}(1 + 3\sqrt{3}i)$$

上の図から，$\theta = \arg\dfrac{z-\beta}{\gamma-\alpha}$ であるから

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{14}}$$

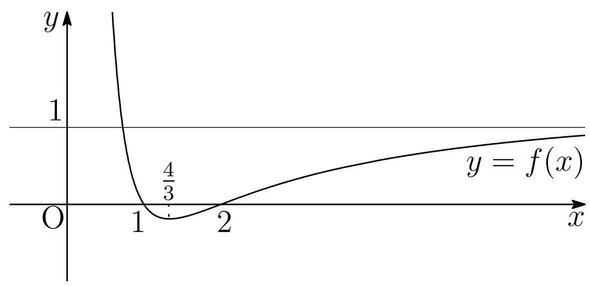
■

$\boxed{3}$ (1) $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2} = 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}$ より

$$f'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} = \frac{3x-4}{x^3},$$
$$f''(x) = -\frac{6}{x^3} + \frac{12}{x^4} = -\frac{6(x-2)}{x^4},$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

$f(x)$ の増減表 $(x > 0)$ および $y = f(x)$ のグラフは，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	極小 $-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	変曲点 0	$\nearrow$



曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t > 0)$ における接線 ℓ が点 P 以外に共有点をもたない t の値は

$$0 < t \leqq \frac{4}{3}, \quad t = 2$$

よって，求める t の最大値は　　$\boldsymbol{t = 2}$

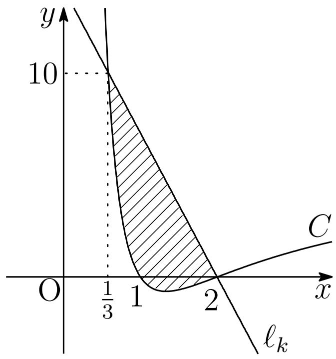
(2) (1) の結果から，変曲点 $(2,\ 0)$ における接線の傾きは　$f'(2) = \dfrac{1}{4}$　$\boxed{研}$
直線 $l_k : y = k(x-2)$ と曲線 C の共有点の個数は，(1) のグラフから

$\boldsymbol{k \leqq 0}$ **のとき**　　**2 個**
$\boldsymbol{0 < k < \frac{1}{4}}$ **のとき**　**3 個**
$\boldsymbol{\frac{1}{4} \leqq k}$ **のとき**　　**1 個**

(3) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=10$

k は 2 点 $\left(\dfrac{1}{3},\ 10\right)$，$(2,\ 0)$ を結ぶ直線の傾きであるから

$$k=\frac{0-10}{2-\frac{1}{3}}=\mathbf{-6}$$



求める面積は，右の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$S=\int_{\frac{1}{3}}^{2}\left\{-6(x-2)-\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right\}dx$$

$$=\left[-3(x-2)^2-x+3\log x+\frac{2}{x}\right]_{\frac{1}{3}}^{2}=\boldsymbol{\frac{5}{3}+3\log 6}$$

■

$\boxed{4}$ (1) S_2 は分母が 1 と 2 の組合せについて調べればよいので

$$\frac{4}{1}+\frac{3}{2}=\frac{11}{2},\quad \frac{3}{1}+\frac{4}{2}=5 \quad \text{よって}\quad \boldsymbol{S_2=\frac{11}{2}}$$

(2) 1 から $2n$ までの自然数を分母と分子にもつ分数で最大のものは $\dfrac{2n}{1}$

2 から $2n-1$ までの自然数を分母と分子にもつ分数で最大のものは $\dfrac{2n-1}{2}$

順次この法則によりできる分数の和

$$\frac{2n}{1}+\frac{2n-1}{2}+\cdots+\frac{n+1}{n}$$

が S_n である．この法則に従わない部分和

$$\frac{c}{a}+\frac{d}{b}\quad (a<b<c<d)$$

をもつ S_n が存在すると仮定すると

$$\left(\frac{d}{a}+\frac{c}{b}\right)-\left(\frac{c}{a}+\frac{d}{b}\right)=\frac{(b-a)(d-c)}{ab}>0$$

すなわち $\quad \dfrac{c}{a}+\dfrac{d}{b}<\dfrac{d}{a}+\dfrac{c}{b}$

これは，S_n であることに反する．よって

$$S_n=\frac{2n}{1}+\frac{2n-1}{2}+\cdots+\frac{n+1}{n}$$

となり，求める順列の例の 1 つは

$$\boldsymbol{a_1 = 2n,\ a_2 = 2n-1,\ \cdots,\ a_n = n+1,}$$
$$\boldsymbol{a_{n+1} = 1,\ a_{n+2} = 2,\ \cdots,\ a_{2n} = n}$$

(3) (2) の結果から，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2n+1-k}{k}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{S_n}{n\log n} &= \frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2n+1-k}{k}\\ &= \frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2n+1}{k}-1\right)\\ &= \frac{1}{\log n}\left(-1+\frac{2n+1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \quad \cdots ①\end{aligned}$$

ここで，自然数 k について，$\dfrac{1}{k} > \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x} = \int_1^{n+1}\frac{dx}{x} = \log(n+1) > \log n$$

次に，2 以上の自然数 k について，$\dfrac{1}{k} < \displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x} = 1+\int_1^{n}\frac{dx}{x} = \log n + 1$$

上の 2 式から　　$\log n < \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \log n + 1 \quad \cdots ②$

①，② から

$$\frac{1}{\log n}\left(-1+\frac{2n+1}{n}\log n\right) < \frac{S_n}{n\log n} < \frac{1}{\log n}\left\{-1+\frac{2n+1}{n}(\log n+1)\right\}$$
$$-\frac{1}{\log n}+2+\frac{1}{n} < \frac{S_n}{n\log n} < -\frac{1}{\log n}+\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{\log n}\right)$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log n} = \mathbf{2}$$

補足 ② はオイラーの定数 γ に関係している．

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) \fallingdotseq 0.5772156649\cdots$$

は無理数であるかどうかさえ分かっていない．■

2.4　2018 年度

1　(1) $\mathrm{A}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 2t,\ t-1)$ より　研

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t-1,\ 2t-5,\ t-1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(t-4,\ 2t-2,\ t-1)$$

(i) $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$$3(t-1)-3(2t-5)+0(t-1)=0\quad これを解いて\quad t=4$$

(ii) $\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ であるから

$$3(t-4)-3(2t-2)+0(t-1)=0\quad これを解いて\quad t=-2$$

(iii) $\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ であるから

$$(t-1)(t-4)+(2t-5)(2t-2)+(t-1)^2=0$$

整理すると　$2t^2-7t+5=0$　これを解いて　$t=1,\ \dfrac{5}{2}$

(i)〜(iii) から　$\boldsymbol{t=4,-2,\ 1,\ \dfrac{5}{2}}$

(2) $\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおくと　$\vec{b}=(1,-1,\ 0)$，$\vec{d}=(0,\ 1,\ 1)$

A，B，C，D が同一平面上にあるとき，定数 x，y を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=x\vec{b}+y\vec{d}$$

ゆえに　$$(t-1,\ 2t-5,\ t-1)=x(1,-1,\ 0)+y(0,\ 1,\ 1)$$
$$=(x,-x+y,\ y)$$

したがって　$$(*)\begin{cases} t-1=x \\ 2t-5=-x+y \\ t-1=y \end{cases}$$

$(*)$ の第 1，第 3 式から　$x=y$　これを第 2 式に代入すると

$$2t-5=0\quad よって\quad \boldsymbol{t=\frac{5}{2}}$$

別解 $\vec{b}$，$\vec{d}$ に垂直なベクトルの 1 つは　$\vec{n}=(1,\ 1,-1)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より

$$1(t-1)+1(2t-5)-1(t-1)=0\quad これを解いて\quad t=\frac{5}{2}$$

(3) (1)(i) より，$t=4$ であるから　C$(4,\ 8,\ 3)$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$ に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 1,-2)$$

とおく．$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 1,\ 1)$ であるから，D から平面 ABC に下ろした垂線の長さを h とすると

$$h=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}|=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

よって，求める四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot h&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|h\\&=\frac{1}{6}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

補足 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a}}\times\boldsymbol{\vec{b}}$ で表す．本題において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-9,-9,\ 18)$$

四面体 ABCD の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 1,\ 1)$ より

$$V=\frac{1}{6}|9|=\frac{3}{2}$$

ベクトル積 (外積) は高校数学の範囲外であるが，ベクトル積 (外積) を使って解答した受験生もいたが，減点されることはなかった．熊大は公式の利用に関しては寛容である．

■

2 (1) さいころが $R_{(m,n)}$ から $R_{(m+i,n+j)}$ の位置に移る確率を $P_{(i,j)}$ とすると

$$P_{(i,j)} = {}_{i+j}\mathrm{C}_i \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \frac{{}_{i+j}\mathrm{C}_i}{2^{i+j}} \quad \cdots (*)$$

である (i，j は 0 以上の整数)．

$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,4)}$ に移る確率であるから，$(*)$ に $i=2$，$j=3$ を代入して

$$P_{(2,3)} = \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{2^5} = \frac{10}{32} = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

(2) 事象 A，B を，次のように定める

A : 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にある．

B : 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある．

$P(A)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置に移る確率であるから，$(*)$ により

$$P(A) = P_{(2,0)} + P_{(0,2)} = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$P(A \cap B)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置を通って，$R_{(3,4)}$ の位置に移る確率であるから

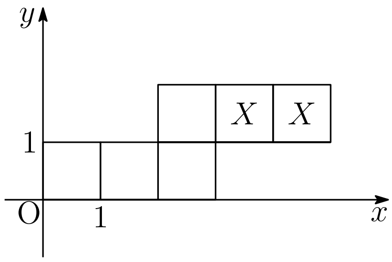
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P_{(2,0)}P_{(0,3)} + P_{(0,2)}P_{(2,1)} \\ &= \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_0}{2^3} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{2^3} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

よって，求める条件付き確率は

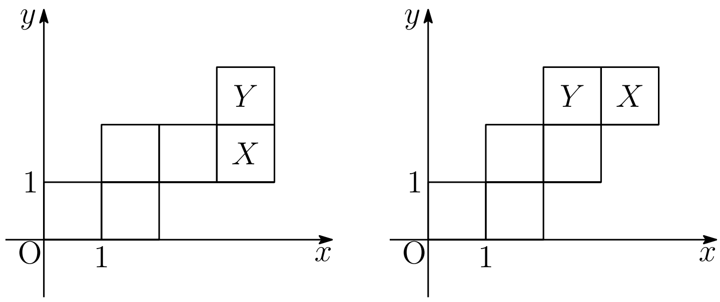
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3) 1枚の硬貨を投げて表，裏が出る事象をそれぞれ X，Y とする．5回目の移動までにさいころの6通りの目がすべて出るには，最初の3回目までに X と Y が少なくとも1回ずつ起こる．最初の3回で1回目が X であるのは，次の (i)〜(iii) である．

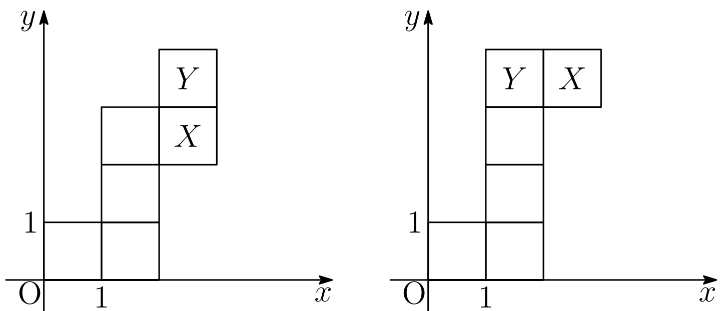
(i) 最初の3回が X, X, Y の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5回目は X, X の順に起こる．



(ii) 最初の3回が X, Y, X の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5回目は X, Y または Y, X の順に起こる．



(iii) 最初の3回が X, Y, Y の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5回目は X, Y または Y, X の順に起こる．



(i)〜(iii) より，1回目が X であるのは，5通りである．また，1回目が Y であるのは，(i)〜(iii) の展開図を直線 $y=x$ に関して対称移動したものであるから，5通りである．このとき，X，Y が起こる確率はともに $\frac{1}{2}$ であるから，求める確率は

$$(5+5)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \mathbf{\frac{5}{16}}$$

■

3　(1) $z = x + yi$ とおき (x, y は実数)，これを $|z+i| - |z-i| = 1$ に代入すると

$$|x + (y+1)i| - |x + (y-1)i| = 1$$
$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + 1$$

両辺を 2 乗すると

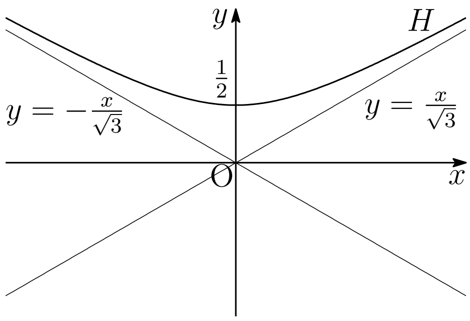
$$x^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2 + 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + 1$$
$$4y - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

上式から $4y - 1 \geqq 0$ であり，再び両辺を 2 乗すると

$$(4y-1)^2 = 4\{x^2 + (y-1)^2\}$$
$$-4x^2 + 12y^2 = 3$$

ゆえに $$-\frac{x^2}{\frac{3}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad \left(y \geqq \frac{1}{2}\right)$$

したがって，H の概形は次のようになる．



上の概形から，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} < \theta_1 < \dfrac{5}{6}\pi}$

(2) (1) で求めた概形から　$|z| \geqq \dfrac{1}{2}$,　$r_2 = \dfrac{1}{|z|}$ であるから　$\boldsymbol{0 < r_2 \leqq 2}$

また，$\theta_2 = -\arg z$ であるから，$0 \leqq \theta < 2\pi$ に注意して　研

$$-\frac{5}{6}\pi + 2\pi < \theta_2 < -\frac{\pi}{6} + 2\pi \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\frac{7}{6}\pi < \theta_2 < \frac{11}{6}\pi}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}$ $(x \geqq -3)$ より　$f'(x)=\dfrac{3x(x+2)}{2\sqrt{3x^2+x^3}}$

したがって $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

増減表から，求める極大値は　$\boldsymbol{f(-2)=2}$

(2) $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ より $(-3 \leqq x \leqq 0)$

$$\begin{aligned} F'(x)&=f(x+3)-f(x)=\frac{\{f(x+3)\}^2-\{f(x)\}^2}{f(x+3)+f(x)} \\ &=\frac{3(x+3)^2+(x+3)^3-(3x^2+x^3)}{f(x+3)+f(x)}=\frac{9(x+3)(x+2)}{f(x+3)+f(x)} \end{aligned}$$

$f(x)=|x|\sqrt{x+3}$ であるから，$F(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$-3 \leqq x \leqq 0$ に注意して，$F(x)$ を求める．

$$\begin{aligned} F(x)&=\int_x^0 f(t)\,dt+\int_0^{x+3} f(t)\,dt \\ &=\int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt+\int_0^{x+3} t\sqrt{t+3}\,dt \quad \cdots① \end{aligned}$$

まず
$$\begin{aligned} \int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt&=\int_0^x \left\{(t+3)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{t+3}\right\}dt \\ &=\left[\frac{2}{5}(t+3)^{\frac{5}{2}}-2(t+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x \\ &=\left[\frac{2}{5}(t-2)(t+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x \\ &=\frac{2}{5}(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}}+\frac{12}{5}\sqrt{3} \quad \cdots② \end{aligned}$$

①，② より

$$F(x) = \frac{2}{5}\{(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}} + (x+1)(x+6)^{\frac{3}{2}}\} + \frac{24}{5}\sqrt{3}$$

増減表の x の値から

$$\begin{aligned} F(-3) &= \frac{2}{5}(-2\cdot 3^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{12}{5}\sqrt{3} \\ F(-2) &= \frac{2}{5}(-4 - 4^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{24}{5}(\sqrt{3} - 1) \\ F(0) &= \frac{2}{5}(-2\cdot 3^{\frac{3}{2}} + 6^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{12}{5}(\sqrt{3} + \sqrt{6}) \end{aligned}$$

よって　**最大値** $\boldsymbol{F(0) = \frac{12}{5}(\sqrt{3} + \sqrt{6})}$，

最小値 $\boldsymbol{F(-2) = \frac{24}{5}(\sqrt{3} - 1)}$ ■

2.5 2019年度

1 (1) $C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ と $C_2 : y = x^3 + 1$ から y を消去すると

$$x^3 + 1 = x^2 + 2ax - 2a + 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x^2 - 2a) = 0 \qquad \cdots (*)$$

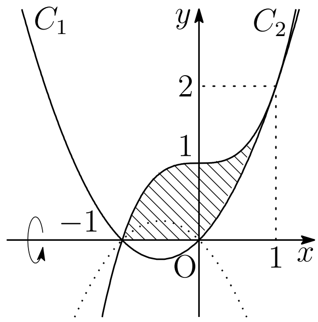
C_1 と C_2 の共有点がちょうど2個のとき，方程式 $(*)$ の実数解は2個ある．$a \neq 0$ より，$x^2 - 2a = 0$ は重解をもたないから，方程式 $x^2 - 2a = 0$ は $x = 1$ を解にもつ．したがって

$$1^2 - 2a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{2}$$

これを $(*)$ に代入すると　$(x-1)^2(x+1) = 0$

これは，条件を満たすから　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から　$C_1 : y = x^2 + x$



$$\begin{aligned}
&|x^3+1|^2 - |x^2+x|^2 \\
=&(x^3+1)^2 - (x^2+x)^2 \\
=&(x^3+x^2+x+1)(x^3-x^2-x+1) \\
=&(x+1)^2(x-1)^2(x^2+1) \geqq 0
\end{aligned}$$

したがって　$|x^3 + 1| \geqq |x^2 + x|$

求める回転体の体積は，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに1回転させたものであるから，その体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_{-1}^{1} (x^3+1)^2\,dx - \int_0^1 (x^2+x)^2\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x^6 + 2x^3 + 1)\,dx - \int_0^1 (x^4 + 2x^3 + x^2)\,dx \\
&= 2\int_0^1 (x^6+1)\,dx - \int_0^1 (x^4 + 2x^3 + x^2)\,dx \\
&= \int_0^1 (2x^6 - x^4 - 2x^3 - x^2 + 2)\,dx \\
&= \left[\,\frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x\,\right]_0^1 = \frac{263}{210}
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \dfrac{263}{210}\pi}$ ■

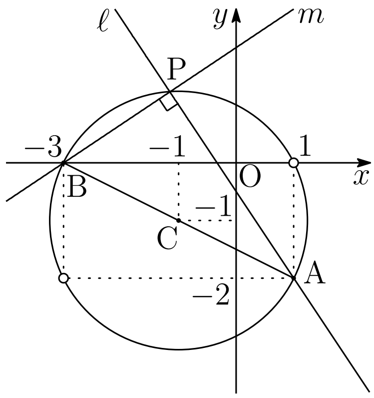
2 (1) $\ell : y = ax - a - 2$ は $y + 2 = a(x-1)$ より，点 $\mathrm{A}(1, -2)$ を通り，傾き a の直線．

$m : y = bx + 3b$ は $y = b(x+3)$ より，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ を通り，傾き b の直線．

ℓ と m は直交するから，ℓ と m の交点 P は，線分 AB を直径とする円周上を動く．

線分 AB の中点を C とすると　$\mathrm{C}(-1, -1)$

$$\mathrm{CA} = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$$



求める点 P の軌跡は，2 直線 ℓ，m が x 軸と垂直ではないことに注意して

$$\boldsymbol{(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5,\quad (x,\ y) \neq (1,\ 0),\ (-3, -2)}$$

(2) $\ell \perp m$ より，$ab = -1$ であるから

$$\ell : ax - y - a - 2 = 0,\quad m : x + ay + 3 = 0$$

線分 AP の長さは，点 $\mathrm{A}(1, -2)$ と直線 m の距離であるから

$$\mathrm{AP} = \frac{|1 + a\cdot(-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + a^2}} = \boldsymbol{\frac{2|a-2|}{\sqrt{a^2+1}}}$$

線分 BP の長さは，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ と直線 ℓ の距離であるから

$$\mathrm{BP} = \frac{|a\cdot(-3) + 0 - a - 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \boldsymbol{\frac{2|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}}$$

(3) △APB の面積が最大となるとき，P は線分 AB の垂直二等分線上にあるから，AP = BP より

$$\frac{2|a-2|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{2|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}\quad \text{ゆえに}\quad |a-2| = |2a+1|$$

これを解いて　$\boldsymbol{a = \frac{1}{3}, -3}$

別解 直線 AB の傾きは，その偏角を θ とすると　$\tan\theta = -\frac{1}{2}$

△APB の面積が最大となるとき，ℓ の傾き a は

$$a = \tan(\theta \pm 45^\circ) = \frac{\tan\theta \pm \tan 45^\circ}{1 \mp \tan\theta \tan 45^\circ} = \frac{-\frac{1}{2} \pm 1}{1 \pm \frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm 2}{2 \pm 1} = \frac{1}{3}, -3$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y = x\sin 3x + 3x^2$ を微分すると　$y' = \sin 3x + 3x\cos 3x + 6x$

C 上の x 座標が a である点における接線の方程式は

$$y - (a\sin 3a + 3a^2) = (\sin 3a + 3a\cos 3a + 6a)(x - a)$$

すなわち　$y = (\sin 3a + 3a\cos 3a + 6a)x - 3a^2(1 + \cos 3a)$　$\cdots$①

これが原点を通るから　$-3a^2(1 + \cos 3a) = 0$

$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < 3a < \dfrac{3}{2}\pi$ であるから

$$3a = \pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = \frac{\pi}{3}}$$

(2) (1) の結果を ① に代入することにより　$\ell : y = \pi x$

C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x\sin 3x + 3x^2 = \pi x \quad \text{すなわち} \quad x(\pi - \sin 3x - 3x) = 0 \quad \cdots(*)$$

$f(x) = \pi - \sin 3x - 3x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$f'(x) = -3\cos 3x - 3 = -3(1 + \cos 3x) \leqq 0$$

したがって，$f(x)$ は単調減少であり，

$$f(0) = \pi > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

であるから，方程式 $(*)$ の解は　$x = 0,\ \dfrac{\pi}{3}$

よって，求める共有点の座標は　$\boldsymbol{(0,\ 0),\ \left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi^2}{3}\right)}$

(3) (2) の結果から，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，$x(\pi - \sin 3x - 3x) \geqq 0$ であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\pi - \sin 3x - 3x)\,dx \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\left(\frac{\pi}{3} - x\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin 3x\,dx \\ &= \frac{3}{6}\left(\frac{\pi}{3}\right)^3 + \left[\,\frac{x}{3}\cos 3x - \frac{1}{9}\sin 3x\,\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\pi^3}{54} - \frac{\pi}{9}} \end{aligned}$$

■

4 (1) $2n$ 個の球から n 個取り出すとき，n 個の赤球から k 個取り出し，n 個の白球から $n-k$ 個取り出す確率であるから

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} = \frac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

(2) 取り出した n 個の球のうち赤球が k 個取り出されるとき，勝つ確率は $\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ であるから，(1) の結果により

$$\frac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{k}{n}\cdot{}_n\mathrm{C}_k\right)^2 \quad \cdots (*)$$

がゲームに勝つ確率である．ここで

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

$${}_{2n}\mathrm{C}_n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n(2n-1)}{n^2}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{2(2n-1)}{n}\cdot{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

上の 2 式をそれぞれ変形すると

$$\frac{k}{n}\cdot{}_n\mathrm{C}_k = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1},\qquad \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} = \frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{1}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$$

これらを $(*)$ に代入することにより

$$(*) = \frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{1}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\right)^2 = \frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\right)^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$$

(3) $n \geqq 2$ および $k \geqq 1$ の整数について，

$$(1+x)^{n-1}(1+x)^{n-1} = (1+x)^{2n-2}$$

上式の両辺の x^{n-1} の係数を比較することにより

$$\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-k} = {}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

すなわち　$$\sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\right)^2 = {}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

これと (2) の結果により，ゲームに勝つ確率は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\right)^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} &= \frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{1}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\right)^2 \\ &= \frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} = \frac{n}{2(2n-1)}\end{aligned}$$

■

2.6　2020 年度

1　(1)　$x = f(t) = \sin t$，$y = g(t) = 1 - \cos 3t$ とおくと $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$

$$f'(t) = \cos t, \qquad g'(t) = 3\sin 3t$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

上の増減表から　点 P は　$\left(f\left(\dfrac{\pi}{2}\right),\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$　すなわち　$\boldsymbol{(1,\ 1)}$

点 Q は　$\left(f\left(\dfrac{\pi}{3}\right),\ g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$　すなわち　$\boldsymbol{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 2\right)}$

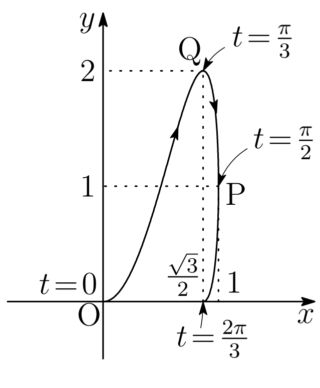
(2)　C の点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$，すなわち，点 $\left(f\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\ g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(\frac{\pi}{6})}{f'(\frac{\pi}{6})} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

求める接線は，点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ を通り，傾き $2\sqrt{3}$ の直線の方程式であるから

$$y - 1 = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3} + 1}$$

(3)　求める面積を S とすると，(1) の結果に注意して

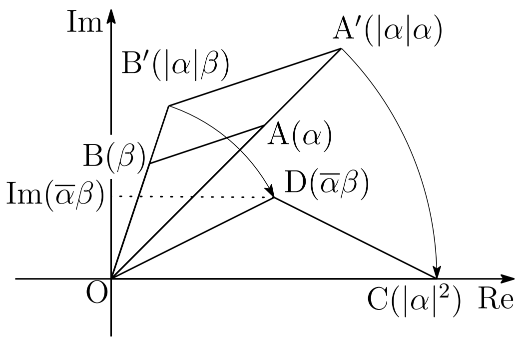


$$\begin{aligned}
S &= \int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{2})} y\,dx - \int_{f(\frac{2}{3}\pi)}^{f(\frac{\pi}{2})} y\,dx \\
&= \int_{f(0)}^{f(\frac{2}{3}\pi)} y\,dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} g(t)f'(t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1 - \cos 3t)\cos t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\cos t - \frac{1}{2}\cos 4t - \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt \\
&= \left[\ \sin t - \frac{1}{8}\sin 4t - \frac{1}{4}\sin 2t\ \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} = \boldsymbol{\frac{9}{16}\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

■

2　(1) 2 点 $\mathrm{C}(|\alpha|^2)$，$\mathrm{D}(\overline{\alpha}\beta)$ は，それぞれ 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ を原点を中心に $|\alpha|$ 倍の相似拡大，さらに原点を中心に $\arg\overline{\alpha}$ だけ回転 $\left(\times\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\right)$ したものであるから

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\triangle\mathrm{OCD}}{\triangle\mathrm{OAB}}=\boldsymbol{|\alpha|^2}$$



(2) $\triangle\mathrm{OCD}$ の底辺を $|\alpha|^2$，高さを $|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$ とみると　$S_2=\dfrac{1}{2}|\alpha|^2|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

(1) の結果から　$S_1=\dfrac{1}{|\alpha|^2}S_2$　よって　$S_1=\dfrac{1}{|\alpha|^2}\cdot\dfrac{1}{2}|\alpha|^2|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|=\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

別解　$\theta=\angle\alpha0\beta$ とすると　$\cos\theta+i\sin\theta=\dfrac{\dfrac{\beta}{|\beta|}}{\dfrac{\alpha}{|\alpha|}}=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\alpha}}=\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{|\alpha||\beta|}$

$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)}{|\alpha||\beta|}$ であるから　$S_1=\dfrac{1}{2}|\alpha||\beta||\sin\theta|=\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

(3) (2) の結果から，3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\overline{z}\cdot\frac{1}{z}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\right|$$

$z=a+bi\ (1\leqq a\leqq 2,\ 1\leqq b\leqq 3)$ であるから

$$\frac{\overline{z}}{z}=\frac{a-bi}{a+bi}=\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{2ab}{a^2+b^2}i,$$
$$\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|-\frac{2ab}{a^2+b^2}\right|=\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{\dfrac{b}{a}}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$$

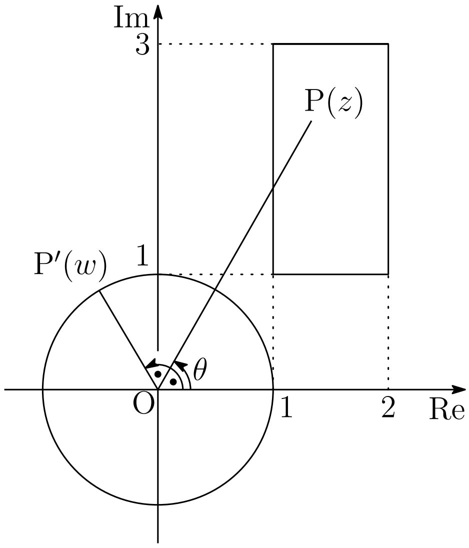
$\dfrac{b}{a}=u$，$\triangle\mathrm{OPQ}=S(u)$ とおくと　$S(u)=\dfrac{u}{1+u^2}$　$\left(\dfrac{1}{2}\leqq u\leqq 3\right)$

ゆえに　$S'(u)=\dfrac{1-u^2}{(1+u^2)^2}$

u	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$S'(u)$		$+$	0	$-$	
$S(u)$	$\frac{2}{5}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{10}$

よって　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

別解 $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right) = -\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)$ であるから



$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)\right|$$

$\theta = \arg(z)$，$w = \dfrac{z}{\overline{z}}$ とすると

$$\begin{aligned} w &= \left|\frac{z}{\overline{z}}\right| = \frac{|z|}{|\overline{z}|} = 1, \\ \arg(w) &= \arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) \\ &= \arg(z) - \arg(\overline{z}) \\ &= \theta - (-\theta) = 2\theta \end{aligned}$$

点 P′(w) は，点 P(z) から単位円周上の点 P′ への写像で，その偏角について

$$\arg(w) = 2\arg(z)$$

が成立する．$z = a + bi$ $(1 \leqq a \leqq 2,\ 1 \leqq b \leqq 3)$ より，$\theta = \arg(z)$ のとり得る値の範囲を $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ とすると，上の図から

$$\tan\theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \tan\theta_2 = 3 \quad \left(0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$$

したがって　　$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta \quad \cdots (*)$

このとき　　$\sin 2\theta_1 = \dfrac{2\tan\theta_1}{1+\tan^2\theta_1} = \dfrac{4}{5}$，　$\sin 2\theta_2 = \dfrac{2\tan\theta_2}{1+\tan^2\theta_2} = \dfrac{3}{5}$

$(*)$ より，$\triangle$OPQ は，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，

$\theta = \theta_2$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$ ■

3 (1) 法 5 について

$$\begin{array}{lll} x \equiv 0 \text{ のとき} & x^2 \equiv 0 & \pmod 5 \\ x \equiv 1 \text{ のとき} & x^2 \equiv 1 & \pmod 5 \\ x \equiv 2 \text{ のとき} & x^2 \equiv 4 & \pmod 5 \\ x \equiv 3 \text{ のとき} & x^2 \equiv 9 \equiv 4 & \pmod 5 \\ x \equiv 4 \text{ のとき} & x^2 \equiv 16 \equiv 1 & \pmod 5 \end{array}$$

よって，題意は成立する．

(2) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ より，法 5 について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod 5$$

(1) の結果から，$(*)$ の左辺は法 5 について，0，1，4 のいずれかに等しい．
一方，右辺は 0，2，$8 \equiv 3 \pmod 5$ のいずれかに等しい．
したがって，$x^2 \equiv 0,\ 2z^2 \equiv 0 \pmod 5$，すなわち，$x \equiv z \equiv 0 \pmod 5$
$x = 5x'$，$z = 5z'$ (x'，z'は整数) を $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2 + 5y^2 = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y^2 \equiv 0$ より，$y \equiv 0 \pmod 5$ であるから，$y = 5y'$ (y'は整数) とおける．
このとき，$x = 5x'$，$y = 5y'$，$z = 5z'$ より，$x' < x$，$y' < y$，$z' < z$
$x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす $(x,\ y,\ z)$ の組が存在するとき，

$$(x',\ y',\ z') \quad (x' < x,\ y' < y,\ z' < z)$$

が存在し，無限に小さい数の組が存在することになり (無限降下)，このことは自然数が下に有限であることに反する．よって，$x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x，y，z の組は存在しない．

別解 $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x，y，z が存在し，これら 3 数の最大公約数が 1 であるものを仮定する．
$x^2 + 5y^2 = 2z^2$ より，法 5 について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod 5$$

(1) の結果から，$(*)$ の左辺は法 5 について，0，1，4 のいずれかに等しい．
一方，右辺は 0，2，$8 \equiv 3 \pmod 5$ のいずれかに等しい．
したがって，$x^2 \equiv 0,\ 2z^2 \equiv 0 \pmod 5$，すなわち，$x \equiv z \equiv 0 \pmod 5$
$x = 5x'$，$z = 5z'$ (x'，z'は整数) を $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2 + 5y^2 = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y^2 \equiv 0 \pmod 5$ より，$y \equiv 0 \pmod 5$ であるから，x，y，z が 5 を共通因数にもつことになり，仮定に反する．よって，題意は証明された．　■

$\boxed{4}$ (1) $1 < 2^y < \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ より　$0 < y < n\log_2\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$

$U=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$ とし，U の部分集合 A，B を

$$A=\left\{k\,\middle|\,n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)\text{ は整数である，}k\in U\right\}$$
$$B=\left\{k\,\middle|\,n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)\text{ は整数でない，}k\in U\right\}$$

とすると ([a] は a を超えない最大の整数)

$$P(n)=\sum_{k\in A}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}+\sum_{k\in B}\left[n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]$$

したがって

$$\begin{aligned}P(n)&<\sum_{k\in A}n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)+\sum_{k\in B}n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n-1}n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right),\\P(n)&\geqq\sum_{k\in A}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}+\sum_{k\in B}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}\cdots①\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}\end{aligned}$$

が成立する (① は $B=\phi$ のとき等号)．上の 2 式から

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}\leqq P(n)<\sum_{k=1}^{n-1}n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-\frac{n-1}{n^2}\leqq\frac{P(n)}{n^2}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)\quad\cdots(*)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2}=0,$$

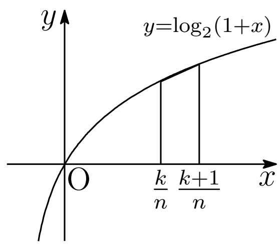
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)&=\int_0^1\log_2(1+x)\,dx\\&=\frac{1}{\log 2}\Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^1=2-\frac{1}{\log 2}\end{aligned}$$

$(*)$ にはさみうちの原理を適用すると　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2}=\mathbf{2-\frac{1}{\log 2}}$

(3) (1) の結果から　$P(n) < \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$$\frac{P(n)}{n^2} < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \cdots ②$$

(2) の結果および $y=\log_2(1+x)$ が上に凸であるから



$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \log_2(1+x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \log_2(1+x)\,dx \\ &> \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)+\log_2\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\right\} \end{aligned}$$

上式および ② から

$$\begin{aligned} L-\frac{P(n)}{n^2} &> \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)+\log_2\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\right\} \\ &\qquad -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\log_2\left(1+\frac{k+1}{n}\right)-\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2n}(\log_2 2-\log_2 1) = \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

解説 $a \leqq x \leqq b$ において，関数 $f(x)$ が $f''(x) < 0$ であるとき

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$$

とおくと，$g(a) = g(b) = 0$ であるから，平均値の定理 (ロルの定理) により

$$g'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する．このとき，$g''(x) = f''(x) < 0$ であるから，$g'(x)$ は単調減少により，c は唯一存在する．したがって，$g(x)$ の増減表は

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

$a \leqq x \leqq b$ において，$g(x) \geqq 0$ が成立する．なお，等号は，$x = a,\ b$ のときに限る．

よって，$a<x<b$ において，関数 $f(x)$ が $f''(x)<0$ のとき

$$f(x) \geqq f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

が成立する．なお，等号は，$x=a,\ b$ のときに限る．

$f(x)=\log_2(1+x)$ とおくと，$f''(x)<0$ より，$\dfrac{k}{n}<x<\dfrac{k+1}{n}$ において

$$f(x)>f\left(\frac{k}{n}\right)+n\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\left(x-\frac{k}{n}\right)$$

これから

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \\
&> \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx \\
&\qquad + n\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)dx \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)+n\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\left[\ \frac{1}{2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\ \right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{f(1)-f(0)}{2n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

② より　$L>\dfrac{P(n)}{n^2}+\dfrac{1}{2n}$　　よって　$L-\dfrac{P(n)}{n^2}>\dfrac{1}{2n}$ ■

第 3 章　一般前期研究

3.1　2015 年

3.1.1　2 番 研究

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次が成立する．　問　解

空間ベクトルの平行条件

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$$\vec{a}/\!/\vec{b} \quad\Longleftrightarrow\quad (a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)=(0,\ 0,\ 0)$$

証明 61 ページに示したベクトル積 (外積)

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

により，$|\vec{a}\times\vec{b}|$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積と等しいから

$$\vec{a}/\!/\vec{b} \quad\Longleftrightarrow\quad |\vec{a}\times\vec{b}|=0 \quad \text{すなわち} \quad \vec{a}/\!/\vec{b} \quad\Longleftrightarrow\quad \vec{a}\times\vec{b}=(0,\ 0,\ 0)$$

証終

(1) A$(1,\ p,\ 0)$，B$(q,\ 1,\ 1)$，C$(-1,-1,\ r)$ が一直線上にあるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(q-1,\ 1-p,\ 1)\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,-1-p,\ r)$$

平行条件により，次式が成立する．

$$\bigl(r(1-p)+1+p,\ \ -2-r(q-1),\ (q-1)(-1-p)+2(1-p)\bigr)=(0,\ 0,\ 0) \qquad \cdots(*)$$

$p=1$ のとき，左辺の x 成分が 2 となり不適．また，$p=-1$ のとき，左辺の z 成分が 4 となり不適．■

(2) $(*)$ の x 成分および z 成分により

$$r(1-p)+1+p=0, \quad (q-1)(-1-p)+2(1-p)=0$$

q，r について解くと　$q=\dfrac{3-p}{p+1}$，$r=\dfrac{p+1}{p-1}$ ■

平面の方程式

点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，法ベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ に垂直な平面 S の方程式は

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

証明 S 上に任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ をとる．$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より明らか[1]． **証終**

(3) (1),(2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(q-1,\ 1-p,\ 1)=\left(\frac{2(1-p)}{1+p},\ 1-p,\ 1\right)$$
$$=\frac{1}{1+p}\big(2(1-p),\ (1+p)(1-p),\ 1+p\big)$$

条件より，4 点 O，A′，B′，C′ は点 O を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直な平面上にある．この平面 S の方程式は

$$S:\ 2(1-p)x+(1+p)(1-p)y+(1+p)z=0$$

S 上に $\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$，$\mathrm{B}'(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}'(-1,-1,\ \mathrm{r}')$ があるから

$$2(1-p)+(1+p)(1-p)p'=0,$$
$$2(1-p)q'+(1+p)(1-p)+(1+p)=0,$$
$$-2(1-p)-(1+p)(1-p)+(1+p)r'=0$$

$p\neq\pm1$ に注意して，それぞれ解くと

$$p'=-\frac{2}{p+1}, \quad q'=-\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}, \quad r'=-\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}$$

■

[1] 昭和 59 年 3 月以前の高卒者は授業で学んでいた．

(4) 3 点 $\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}'(-1,-1,\ r')$ が一直線上にあると仮定すると，(1) と同様にして

$$\big(r'(1-p')+1+p',\ -2-r'(q'-1),\ (q'-1)(-1-p')+2(1-p')\big)=(0,\ 0,\ 0)$$

上式の x 成分から

$$r'(1-p')+1+p'=0$$

これに (3) の結果を代入すると

$$-\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}\left(1+\frac{2}{p+1}\right)+1-\frac{2}{p+1}=0$$

整理すると

$$p^2+5p+8=0 \quad \cdots(**)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D=5^2-4\cdot1\cdot8=-7<0$$

したがって，$(**)$ を満たす実数 p は存在しない．

よって，3 点 A'，B'，C' は一直線上にない．

3.2　2016年

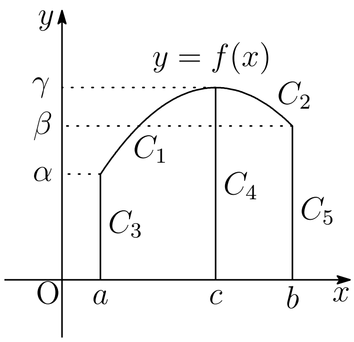
3.2.1　2番 バウムクーヘン型求積法

次の回転体の体積について，円筒形に区分して考えると積分の意味が理解できる．

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および2直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸の回りに1回転してできる立体の体積 V は　問 解

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$$

証明　$y = f(x)$ のグラフを単調増加または単調減少の区間に分けて証明する．例えば，右の図のように $y = f(x)$ は $a \leqq x \leqq c$ で単調増加，$c \leqq x \leqq b$ では単調減少とする．このとき，それぞれの区間で逆関数が存在することから



$$C_1 : x = g_1(y)\ (\alpha \leqq y \leqq \gamma),$$
$$C_2 : x = g_2(y)\ (\beta \leqq y \leqq \gamma)$$

とおき，さらに次のようにおく．

$$C_3 : x = a\ (0 \leqq y \leqq \alpha), \quad C_4 : x = c\ (0 \leqq y \leqq \gamma), \quad C_5 : x = b\ (0 \leqq y \leqq \beta)$$

x 軸と C_1，C_3，C_4 で囲まれた部分および C_2，C_4，C_5 で囲まれた部分をそれぞれ y 軸の回りに1回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^\gamma c^2\,dy - \int_0^\alpha a^2\,dy - \int_\alpha^\gamma \{g_1(y)\}^2\,dy \\
&= c^2\gamma - a^2\alpha - \int_a^c x^2 f'(x)\,dx \\
&= c^2\gamma - a^2\alpha - \Big[\ x^2 f(x)\ \Big]_a^c + 2\int_a^c xf(x)\,dx = 2\int_a^c xf(x)\,dx \\
\frac{V_2}{\pi} &= \int_0^\beta b^2\,dy + \int_\beta^\gamma \{g_2(y)\}^2\,dy - \int_0^\gamma c^2\,dy \\
&= b^2\beta - c^2\gamma + \int_b^c x^2 f'(x)\,dx \\
&= b^2\beta - c^2\gamma + \Big[\ x^2 f(x)\ \Big]_b^c - 2\int_b^c xf(x)\,dx = 2\int_c^b xf(x)\,dx
\end{aligned}$$

よって　$V = V_1 + V_2 = 2\pi \int_a^c xf(x)\,dx + 2\pi \int_c^b xf(x)\,dx = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$

一般に，単調増加・単調減少の区間に分けることで上の結果を得る．　**証終**

3.3 2017年

3.3.1 1番 研究1

x，y，$z > 0$，$x+y+z = \dfrac{\pi}{2}$ のとき， 問 解

$$S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

の最小値を求める．

$z = \theta$ (θは定数) に対し，S が最小となるときの x，y の値は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} + \frac{1}{\tan\theta} \\ &= \frac{\cos x\sin y + \sin x\cos y}{\sin x\sin y} + \frac{1}{\tan\theta} \\ &= \frac{2\sin(x+y)}{\cos(x-y) - \cos(x+y)} + \frac{1}{\tan\theta} \end{aligned}$$

$0 \leqq |x-y| < x+y = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ に注意すると，S が最小となるのは，$y = x$，$z = \dfrac{\pi}{2} - 2x > 0$ のときであるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{2}{\tan x} + \tan 2x = \frac{2}{\tan x} + \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

ここで，$t = \tan x$，$f(t) = \dfrac{2}{t} + \dfrac{2t}{1-t^2}$ $(0 < t < 1)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \\ f'(t) &= -\frac{2}{t^2} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{2(3t^2-1)}{t^2(t+1)^2(t-1)^2} \end{aligned}$$

したがって，$f(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	極小 $3\sqrt{3}$	$\nearrow$	

S が最小となるのは，$\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，すなわち，$x = y = z = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，

最小値 $3\sqrt{3}$ をとる．

3.3.2 1 番 研究 2

$x,\ y,\ z > 0$，$x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$S=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}$$

の最小値を求める．

束縛条件を平面

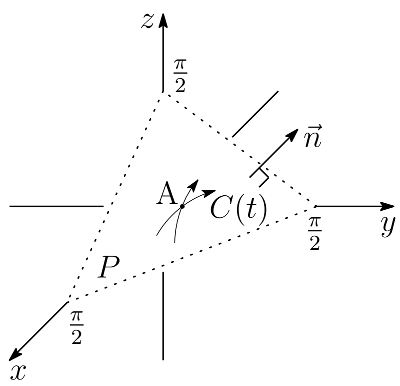
$$P: x+y+z=\frac{\pi}{2}\ (x,\ y,\ z>0)$$

とし，P 上の正則な平面曲線

$$\begin{aligned} C(t) &= (x,\ y,\ z) \\ &= (x(t),\ y(t),\ z(t)) \end{aligned}$$

が $t=t_0$ で極値をとり，その点 A を

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=(x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0))$$



とする．$C(t)$ は P 上にあるから，$x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=0,\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d^2z}{dt^2}=0\quad \cdots(*)$$

上の第 1 式から

$$(1,\ 1,\ 1)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)=0\quad \cdots(**)$$

$C(t)$ の接方向は，常に P の法ベクトル $\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$ に垂直である．

$C(t)$ 上の点 $(x,\ y,\ z)$ について，S は t の関数であるから

$$f(t)=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{1}{\sin^2 y}\cdot\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin^2 z}\cdot\frac{dz}{dt}, \\ f''(t) &= \frac{2\cos x}{\sin^3 x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{2\cos y}{\sin^3 y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\frac{2\cos z}{\sin^3 z}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \\ &\qquad -\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{1}{\sin^2 y}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{\sin^2 z}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}$$

$t=t_0$ で S が極値をとるための必要条件は，$f'(t_0)=0$ であるから

$$-\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{\sin^2\beta}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin^2\gamma}\frac{dz}{dt}=0$$

$$\left(-\frac{1}{\sin^2\alpha},-\frac{1}{\sin^2\beta},-\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)=0$$

A を通る $C(t)$ の任意の接方向に対して上式が成り立つので，$(**)$ より

$$\left(-\frac{1}{\sin^2\alpha},-\frac{1}{\sin^2\beta},-\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)/\!/(1,\ 1,\ 1)$$

$0<\alpha,\ \beta,\ \gamma<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma\quad\text{すなわち}\quad\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{6}$$

このとき，$C(t)$ は正則であるから　$\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt},\ \dfrac{dz}{dt}\right)\neq\vec{0}$

また，$(*)$ の第 2 式に注意して

$$\begin{aligned}f''(t_0)&=8\sqrt{3}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}-4\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d^2z}{dt^2}\right)\\&=8\sqrt{3}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}>0\end{aligned}$$

$f'(t_0)=0$，$f''(t_0)>0$ より，$f(t)$ は極小値 $f(t_0)$ をとる．

よって，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ で S は極小値，すなわち，最小値 $3\sqrt{3}$ をとる．

3.3.3　3番 (2) 別解

$f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2} = 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}$ より，$f'(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$ であるから　問　解

$$\begin{aligned}
&f(x) - \{f'(t)(x-t) + f(t)\} \\
=&1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \left(\frac{3}{t^2} - \frac{4}{t^3}\right)(x-t) - \left(1 - \frac{3}{t} + \frac{2}{t^2}\right) \\
=&-3\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}(x-t)\right\} + 2\left\{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^3}(x-t)\right\} \\
=&-3\left\{-\frac{x-t}{xt} + \frac{1}{t^2}(x-t)\right\} + 2\left\{\frac{-(x^2-t^2)}{x^2t^2} + \frac{2}{t^3}(x-t)\right\} \\
=&-3(x-t)\left(-\frac{1}{xt} + \frac{1}{t^2}\right) + 2(x-t)\left(-\frac{x+t}{x^2t^2} + \frac{2}{t^3}\right) \\
=&-3(x-t)\cdot\frac{-t+x}{xt^2} + 2(x-t)\cdot\frac{-t(x+t)+2x^2}{x^2t^3} \\
=&-3(x-t)^2\cdot\frac{1}{xt^2} + 2(x-t)\cdot\frac{(x-t)(2x+t)}{x^2t^3} \\
=&(x-t)^2\left\{-\frac{3}{xt^2} + \frac{2(2x+t)}{x^2t^3}\right\} = \frac{(x-t)^2\{(-3t+4)x+2t\}}{x^2t^3}
\end{aligned}$$

方程式 $f(x) - \{f'(t)(x-t) + f(t)\} = 0$ の解 $x > 0$ が1個であるのは

$$\begin{array}{llll}
-3t+4 \geqq 0 & \text{すなわち} & 0 < t \leqq \dfrac{4}{3}\text{のとき} & x = t\text{ の 1 個} \\
\dfrac{2t}{3t-4} = t & \text{すなわち} & t = 2\text{ のとき} & x = 2\text{ の 1 個}
\end{array}$$

よって，求める t の最大値は　　$\boldsymbol{t = 2}$

補足　$y = f(x)$ と $y = f'(t)(x-t) + f(t)$ は，$x = t$ で1次の接触をなす．$f(x)$ は有理関数であるから，$f(x) - \{f'(t)(x-t) + f(t)\}$ は $(x-t)^2$ を因数にもつ．別解では関数 $h_0(x) = 1$，$h_1(x) = \dfrac{1}{x}$，$h_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$ を考え，

$$h_i(x) - \{h_i'(t)(x-t) + h_i(t)\}$$

は $(x-t)^2$ を因数にもつことに注意し $(i = 1, 2)$，

$$f(x) = h_0(x) - 3h_1(x) + 2h_2(x)$$

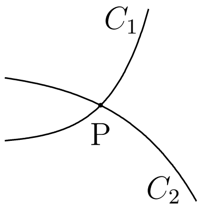
として計算した．

2 曲線 $C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = g(x)$ の共有点 P の x 座標を α とする．

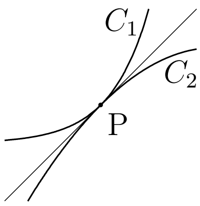
1. $f(\alpha) = g(\alpha)$ であるとき，C_1 と C_2 は P で 0 次の接触をなすという．

2. $f(\alpha) = g(\alpha)$，$f'(\alpha) = g'(\alpha)$ であるとき，C_1 と C_2 は P で 1 次の接触をなすといい，P における C_1 および C_2 の接線が一致する．

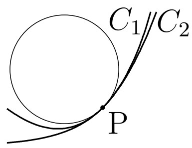
3. $f(\alpha) = g(\alpha)$，$f'(\alpha) = g'(\alpha)$，$f''(\alpha) = g''(\alpha)$ であるとき，C_1 と C_2 は P で 2 次の接触をなすといい，P における C_1 および C_2 の接触円 (曲率円)[2] が一致する．



0 次の接触



1 次の接触



2 次の接触

一般に，$f^{(k)}(\alpha) = g^{(k)}(\alpha)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ が成り立つとき，C_1 と C_2 は P で n 次の接触をなすという．

準備　ライプニッツの公式 (Leibniz formula)

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

証明は，数学的帰納法により示すことができる．

補題　2 つの有理関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x = \alpha$ で 1 次の接触をなすとき，有理関数 $\varphi_1(x)$ を用いて

$$f(x) - g(x) = (x - \alpha)\varphi_1(x)$$

これを微分して　$f'(x) - g'(x) = \varphi_1(x) + (x - \alpha)\varphi_1'(x)$

$f'(\alpha) = g'(\alpha)$ であるから，有理関数 $\varphi_2(x)$ を用いて

$$\varphi_1(x) + (x - \alpha)\varphi_1'(x) = (x - \alpha)\varphi_2(x)$$

ゆえに　$\varphi_1(x) = (x - \alpha)\{\varphi_2(x) - \varphi_1'(x)\}$

したがって　$f(x) - g(x) = (x - \alpha)^2\{\varphi_2(x) - \varphi_1'(x)\}$

よって，$f(x) - g(x)$ は $(x - \alpha)^2$ を因数にもつ．

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf $\boxed{3}$ 解説を参照．

定理

2つの有理関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x = \alpha$ で n 次の接触をなすとき，$f(x) - g(x)$ は $(x-\alpha)^{n+1}$ を因数にもつ．

証明 $n = 0$ のとき，明らか．$n = 1$ のとき，補題により示された．

n 次の接触をなすとき，$0 \leqq k \leqq n$ について，k 次の接触をなす．

$n = k$ のとき成り立つと仮定すると，有理関数 $\varphi(x)$ を用いて

$$f(x) - g(x) = (x-\alpha)^{k+1}\varphi(x)$$

と表せる．ライプニッツの公式を用いてこれを $k+1$ 回微分すると

$$f^{(k+1)}(x) - g^{(k+1)}(x) = (k+1)!\varphi(x) + \sum_{j=1}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_j\{(x-\alpha)^{k+1}\}^{(k+1-j)}\varphi^{(j)}(x)$$

$f^{(k+1)}(\alpha) = g^{(k+1)}(\alpha)$ であるから，上式は $x-\alpha$ を因数にもつ．

また，$1 \leqq j \leqq k+1$ のとき $\{(x-\alpha)^{k+1}\}^{(k+1-j)}$ は $x-\alpha$ を因数にもつので，$\varphi(x)$ は有理関数 $\phi(x)$ を用いて

$$\varphi(x) = (x-\alpha)\phi(x)$$

したがって，$n = k+1$ のとき，次式が成り立つ．

$$f(x) - g(x) = (x-\alpha)^{k+2}\phi(x)$$

このとき，$f(x) - g(x)$ は $(x-\alpha)^{k+2}$ を因数にもつ．

よって，数学的帰納法により，定理は示された．

3.4　2018 年

3.4.1　1 番 ベクトル積 (外積)

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ で表し，その成分は　問 解

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

であるから，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

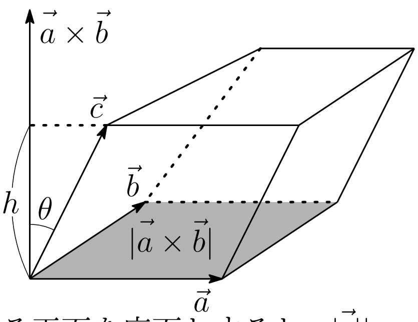
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は　$\boldsymbol{V=\dfrac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．

補足 本題で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-9,-9,\ 18)$

したがって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\dfrac{9}{2}\sqrt{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 1,\ 1)$ より　$V=\dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\dfrac{1}{6}|9|=\dfrac{3}{2}$

3.4.2　3 番 (2) 研究

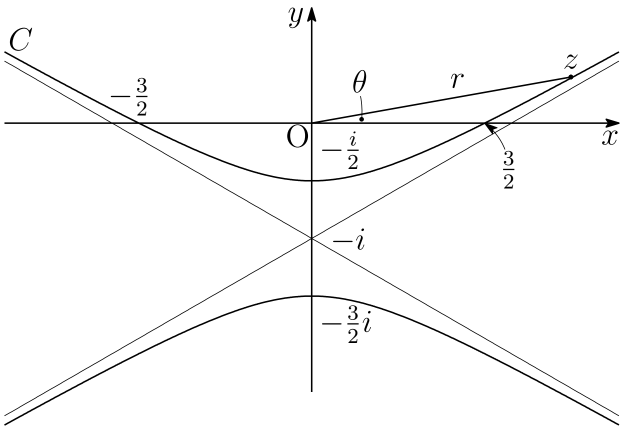
(1) で求めた結果から，H は双曲線で，焦点は y 軸上の 2 点 $(0, \pm 1)$ で，2 頂点が $\left(0, \pm\dfrac{1}{2}\right)$ であるから，離心率 $e = 2$ より，$-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ とおくと [3]　問　解

$$b = \frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 次曲線の極方程式の極は 2 次曲線の焦点であるから，その焦点を複素数平面の原点とする出題もある [4]．例えば，H の焦点の 1 つを O に平行移動した $|z+2i| - |z| = \pm 1$ に対し，$r = |z|$，$\theta = \arg z$ とおくと，離心率 $e = 2$ および点 $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ を通ることから

$$C : r = \frac{\frac{3}{2}}{1 - 2\sin\theta} \qquad \cdots (*)$$

となる．C を $0 \leqq \theta < 2\pi$ で考えると，$1 - 2\sin\theta = 0$，すなわち，$\theta = \frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$ のとき，漸近線と平行となり，これに対応する C 上の点は存在しない．なお，$\theta = \frac{\pi}{6} - 0$ のとき，C は第 1 象限の無限遠点あり，$\theta = \frac{\pi}{6} + 0$ のとき，C は第 3 象限の無限遠点にある．また，$\theta = \frac{5}{6}\pi - 0$ のとき，C は第 4 象限の無限遠点にあり，$\theta = \frac{5}{6}\pi + 0$ のとき，C は第 2 象限の無限遠点にある．



$(*)$ から，C を複素数平面上の点 z として

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{3(\cos\theta + i\sin\theta)}{2(1 - 2\sin\theta)}$$

と表すことができる．

---

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2010.pdf (p.11 を参照)
[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_kou_2002.pdf　$\boxed{3}$