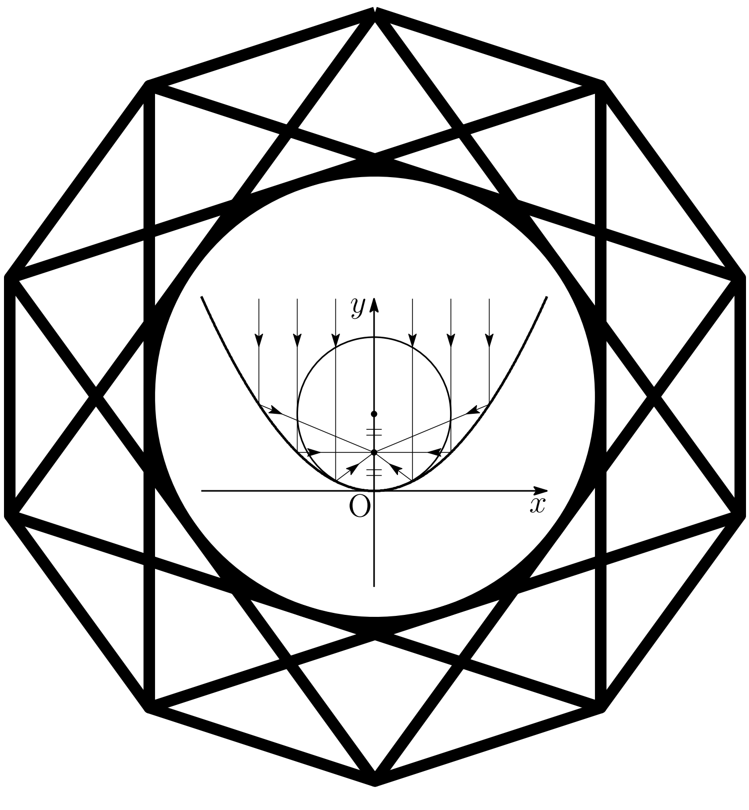
入試の軌跡

熊本大学　文系

2015 － 2021

数　学



2021 年 7 月 10 日

Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

序

本書は，熊本大学教育学部および医学部 (保健学科看護学専攻) 受験者のための入試問題集である．本書には，平成 27 年 (2015 年) 度から令和 3 年 (2021 年) 度までの 2 次試験前期日程の問題 (現行課程) をすべて掲載した．

また，平成 9 年 (1997 年) 度から令和 3 年 (2021 年) 度までの年度ごとの問題および解答については，次のサイトに掲載している．

http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html

本書の編集にあたり，以下の点に留意した．

1. 本書は，電子文書 (PDF) での利用を想定し，問題と解答を相互にハイパーリンクを施した (内部リンクは青，外部リンクは赤)．

2. 本書は，ICT 授業を想定し，スクリーンは，全画面表示 ($\boxed{\text{Ctrl}}$+L) および描画領域に合わせる ($\boxed{\text{Ctrl}}$+3) と見やすくなる．ページスクロールには，($\boxed{\text{Ctrl}}$+▲，$\boxed{\text{Ctrl}}$+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る ($\boxed{\text{Alt}}$+◀)，進む ($\boxed{\text{Alt}}$+▶) も利用できる．なお，全画面表示を解除するには $\boxed{\text{ESC}}$.

3. 平成 13 年 (2001 年) 度から平成 26 年 (2014 年) 度までの旧課程の一般前期試験問題をまとめた『入試の軌跡　熊本大学　文系　数学』は，次である．

   http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_kiseki_bun.pdf

4. また，本書の姉妹版である『入試の軌跡　熊本大学　英語』も次のサイトに掲載しており，併せて活用いただけることを切に願うものである．

   http://kumamoto.s12.xrea.com/lis.html

令和 3 年 7 月　編者

目 次

第 1 章　一般前期問題

数学の試験時間は 120 分で，数学 I・II・III・A・B の範囲から 4 題出題され問題冊子 (A4 で 4 ページ) は，見開きで $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ が偶数ページ， $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が奇数ページに配置されている．解答用紙は， $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ の番号が書かれた A3 用紙 (4 枚) と白紙 (計算用紙) がはさみ込まれている．なお，解答用紙以外は持ち帰ることができる．

一般前期試験における文系数学の出題範囲は「数学 I・II・A・B」であるが，過去 10 年の出題傾向をみると，数学 II の「微分法と積分法」は毎年出題されており，数学 B の「ベクトル」と「数列」については少なくとも 1 題は出題されている．近年では，2013 年，2015 年，2017 年，2020 年には,「空間ベクトル」と「数列」の両分野から出題されている.「ベクトル」は過去 7 回出題された中の 6 回が「空間ベクトル」で，近年，6 回連続で「空間ベクトル」からの出題となっている．つまり,「微分法と積分法」,「空間ベクトル」,「数列」の 3 分野から毎年 4 題中 2，3 題が出題されている．

現行課程へ完全移行に伴い，この間，6 年連続で数学 B の「数列」の分野から出題されていることにも注意したい．

出題分野は限られているが，文系数学としては発想力や計算力を要求される問題が中心で，問題演習を重ねていくことが大切なようだ．

出題分野

2015 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	やや難	数学 II	積分法	放物線と面積
2	標準	数学 B	空間のベクトル	平面と直線
3	標準	数学 B	数列	数列の図形への応用
4	標準	数学 II	微分法	3 次方程式の実数解の個数

2016 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 I	図形と計量	余弦定理，面積
2	標準	数学 I	データの分析	中央値・平均値
		数学 A	場合の数と確率	データの分析の確率への応用
3	標準	数学 A	整数の性質	4 で割った余り
		数学 B	数列	総和計算の応用
4	標準	数学 II	微分法と積分法	定積分の上端 x による微分

2017 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	内積・球面の方程式
2	やや難	数学 A	場合の数と確率	復元試行による条件付き確率
3	標準	数学 B	数列	グラフの接線を用いた融合問題
4	やや難	数学 II	微分法と積分法	グラフの接線，面積

2018 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 II	微分法	3 次方程式の実数解
2	標準	数学 II	三角関数	加法定理の図形への応用
3	やや難	数学 A	場合の数と確率	サイコロを転がす確率
4	標準	数学 B	数列	S_n を用いた漸化式

2019 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 B	数列	分数漸化式
2	標準	数学 A	場合の数と確率	サイコロの目と条件式
3	標準	数学 II	微分法と積分法	放物線と直線，面積，共有点の個数
4	標準	数学 II	図形と方程式	軌跡の方程式

2020 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	三角関数	最大値・最小値
2	標準	数学 II	微分法と積分法	関数の決定，面積
3	標準	数学 B	数列	格子点の個数
4	標準	数学 B	空間のベクトル	四角錐の体積

2021 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	微分法と積分法	領域の面積
2	やや難	数学 B	空間のベクトル	位置ベクトル
3	標準	数学 II	微分法と積分法	接線の方程式
		数学 B	数列	数列の一般項
4	やや難	数学 A	場合の数と確率	連立不等式・整数の個数

出題分野 (2011-2021)

		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
I	数と式		1									
	2 次関数											
	図形と計量	1					1					
	データの分析						2					
II	式と証明											
	複素数と方程式											
	図形と方程式									4		
	三角関数								2		1	
	指数関数と対数関数											
	微分法と積分法	3	3·4	2	2·3·4	1·4	4	4	1	3	2	1·3
A	場合の数と確率						2	2	3	2		4
	整数の性質	2		1			3					
	図形の性質											
B	平面上のベクトル											
	空間のベクトル	4		3	1	2		1			4	2
	数列		2	4		3	3	3	4	1	3	3
	確率分布と統計											

数字は問題番号

1.1 2015 年度

1 a を実数とする。曲線 $C_1 : y = x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を l とする。曲線 C_2 を $y = x^2 - 1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) l と C_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする。曲線 $C_3 : y = -x^2 + 1$ と C_2 とで囲まれた部分は l によって 2 つの部分に分けられる。これらのうち，点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を含む部分の面積を求めよ。

2 座標空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}(1,\ 2,\ 0)$ を含む平面を H とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(-3,\ 2,\ 2)$ は H 上の点であることを示せ。

(2) 点 $\mathrm{Q}(1, -3, -4)$ を通る直線が H と直交するとき，その交点の座標を求めよ。

3 $\triangle$ABC において，$\angle$B と $\angle$C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$\mathrm{BX}_1 = 1$，$\mathrm{CX}_1 = 8$ とする．各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して以下の操作を行う。

> 辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 を求めよ。

(2) l_{n+1} を l_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ。

4 $f(x)$ は x の 3 次多項式とし，x^3 の係数は 1，定数項は 0 とする。2 つの異なる実数 α，β に対して $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ が満たされているとする。以下の問いに答えよ。

(1) $f(\alpha)$，$f(\beta)$ を α，β を用いて表せ。

(2) 不等式 $\alpha < \beta < 3\alpha$ が成り立つとき，3 次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数を求めよ。

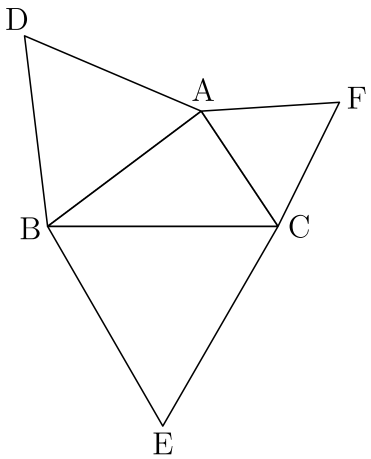
1.2　2016 年度

1 下図のように，△ABC の外部に 3 点 D，E，F を △ABD，△BCE，△CAF がそれぞれ正三角形になるようにとる。△ABC の面積を S，3 辺の長さを $\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{CA} = b$，$\mathrm{AB} = c$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ とおくとき，$\sin\theta$ を b，c，S を用いて，$\cos\theta$ を，a，b，c を用いて表せ。

(2) DC^2 を a，b，c，S を用いて表し，$\mathrm{DC}^2 = \mathrm{EA}^2 = \mathrm{FB}^2$ が成り立つことを示せ。

(3) 3 つの正三角形の面積の平均を T とおくとき，DC^2 を S と T を用いて表せ。



2 1 つのさいころを 3 回投げる。1 回目に出る目の数，2 回目に出る目の数，3 回目に出る目の数をそれぞれ X_1，X_2，X_3 とし，5 つの数

$$2,\ 5,\ 2 - X_1,\ 5 + X_2,\ X_3$$

からなるデータを考える。以下の問いに答えよ。

(1) データの範囲が 7 以下である確率を求めよ。

(2) X_3 がデータの中央値に等しい確率を求めよ。

(3) X_3 がデータの平均値に等しい確率を求めよ。

(4) データの中央値と平均値が一致するとき，X_3 が中央値に等しい条件付き確率を求めよ。

3 自然数 a に対して

$$S(a)=\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 和 $S(a)$ を求めよ。

(2) $S(a)$ が整数となる自然数 a を小さい順に並べた数列を

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots,\ a_n,\cdots$$

とする。一般項 a_n を求めよ。

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ について，a_n $(n=1,2,3,\cdots)$ を 4 で割った余りは 0 か 3 であることを示せ。

(4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と自然数 N に対して和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}$ を求めよ。

4 2 次関数 $f(x)$ に対して

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

とおく。a を正の数とし，$F(x)$ が $x=a$ と $x=-a$ で極値をとるとき，以下の問いに答えよ。

(1) すべての x について $F(-x)=-F(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) $F(x)+F(a)=0$ を満たす x をすべて求めよ。

(3) 関数 $\dfrac{F(x)}{F'(0)}$ の極大値を求めよ。

1.3　2017 年度

1 原点を O とする座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 4,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ がある。ただし，$c > 0$ とする。$\angle\mathrm{BAC} = \theta$ とし，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\cos\theta$，$\sin\theta$ を c を用いて表せ。

(2) 点 O を中心とする半径 1 の球面上の点を H とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に垂直であるとき，c の値を求めよ。

(3) (2) の条件のもとで，面積 S を求めよ。

2 n は 5 以上の自然数とする。赤玉 3 個と白玉 7 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し，色を確認してからもとに戻すという試行を n 回行う。以下の問いに答えよ。

(1) n 回目に 3 度目の赤玉が出る確率を求めよ。

(2) 2 度以上連続することなく 3 度赤玉が出る確率を求めよ。

(3) n 回目に 3 度目の赤玉が出たとき，2 度以上連続することなく 3 度赤玉が出ている条件付き確率を求めよ。

3 $f(x) = x^2 + x$ とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

> $a_1 = 8$ とする。a_n $(n \geqq 1)$ に対して，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $({a_n}^2,\ f({a_n}^2))$ における接線と直線 $y = x$ との交点の x 座標を a_{n+1} とする。ただし，${a_n}^2$ は a_n の2乗を表す。

以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対し，$a_n > 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $b_n = \log_2 a_n$ とおくとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

4 t は0でない実数とする。座標平面上の曲線 $C_1 : y = (x-t)^2 + 2t^3 - t^2$ と曲線 $C_2 : y = 2x^3 - x^2$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点が2個になるような t を求めよ。

(2) t を (1) で求めた値とし，曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点を A，B とする。ただし，点 A の x 座標は，点 B の x 座標より小さいとする。このとき，点 A，B における曲線 C_2 の接線 ℓ_{A}，ℓ_{B} と曲線 C_1 で囲まれた部分の面積を求めよ。

1.4　2018 年度

1 p，q を整数とする。関数 $f(x) = x^3 - px^2 + (p^2 - 2p)x + q$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が極値をもつときの整数 p の値をすべて求めよ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が負の解 1 つと相異なる正の解 2 つをもつとき，整数 p，q の値を求めよ。

2 正三角形 ABC が半径 1 の円に内接しているとする。P は点 A，B と異なる点で，A，B を両端とし点 C を含まない弧の上を動くものとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{PBA} = \theta$ とおくとき，PA，PB，PC をそれぞれ θ を用いて表せ。また，$\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC}$ の最大値を求めよ。

(2) $\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$ を求めよ。

3 m，n を整数とする。xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

(1) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある確率を求めよ。

(2) 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころの 1 の目が上にある確率を求めよ。

4 初項が 1 である数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。$\{S_n\}$ が

$$S_{n+1}=2S_n+n^2+2n \quad (n \geqq 1)$$

をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，a_{n+1} を a_n と n を用いて表せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき，a_n を n の式で表せ。

1.5 2019 年度

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{2}{a_n}+1\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して $a_n \neq 2$ を示せ。

(2) $b_n=\dfrac{3}{a_n-2}+1$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $a_n>\dfrac{5}{2}$ を満たす自然数 n を求めよ。

2 1 個のさいころを投げて，出た目の数を a とする。a が偶数のときは $b=\dfrac{1}{2}a$，a が奇数のときは $b=\dfrac{1}{2}(a+3)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a>b$ となる確率を求めよ。

(2) $\sin\dfrac{\pi}{5}>0.5$ および $\cos\dfrac{\pi}{5}<0.9$ を示せ。

(3) $S=\cos\dfrac{\pi}{a}+\sin\dfrac{\pi}{b}$ とおく。$a>b$ であるとき，$S<1.7$ となる条件付き確率を求めよ。

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a，b に対して，$f(x) = x^2 + ax + b$ とおく。$y = f(x)$ は x 軸および直線 $y = 2x + 3$ に接しているとする。実数 a，b を求めよ。このとき，$y = f(x)$，x 軸および直線 $y = 2x + 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) 座標平面上の曲線 $C_1 : y = x^2 + 2px - 2p$ および $C_2 : y = x^3$ の共有点がちょうど2個になるような実数 p の値をすべて求めよ。

$\boxed{4}$ 座標平面上の直線 ℓ を $y = ax - a - 2$，直線 m を $y = bx + 3b$ とおく。直線 ℓ と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a，b は ℓ と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{A}(1, -2)$，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) $\triangle$APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。

1.6　2020 年度

1 a を定数とし，$y = (\sin\theta + a)(\cos\theta + a)$ とする。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $t = \sin\theta + \cos\theta$ とするとき，y を a と t を用いて表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) y の最大値と最小値を a を用いて表せ。

2 $a < b < c$ を満たす実数 a，c と整数 b に対し，$g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ とする。また，$f(x) = g(x) - g'(x)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $f(a) < 0$，$f(b) > 0$，$f(c) < 0$ となることを示せ。

(2) $f(x) = (x+1)(x^2 - 4x + 2)$ のとき，a，b，c の値を求めよ。

(3) (2) で求めた a，b，c から定まる曲線 $y = g(x)$ と $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

3 xy 平面において，x，y がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶ。n を自然数とするとき，3 直線 $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{n}{3}$，$y = x - n$，$x = n$ で囲まれた図形を D_n とする。また，D_n の周上および内部の格子点の個数を L_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) L_3 を求めよ。

(2) k を 0 以上の整数とする。直線 $\ell : x = n + 3k$ が D_n と交わるとき，D_n の周上および内部の格子点で ℓ 上にあるものの個数を n と k を用いて表せ。

(3) L_n を n を用いて表せ。

4 k，s，t を実数とする。座標空間に原点 O，$\mathrm{A}(1,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ 0,\ k)$ の 4 点をとる。$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ で定まる点を D，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で定まる点を E とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}}$ により定まる点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標を k，s，t を用いて表せ。

(2) 点 P が $0 \leqq s \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 1$ を満たしながら動くとき，点 P が動いてできる平行四辺形を $P(k)$ とし，その面積を $S(k)$ とする。k が実数全体を動くとき，$S(k)$ の最小値と，そのときの k の値を求めよ。

(3) (2) で求めた k に対し，平行四辺形 $P(k)$ を底面とし，点 O を頂点とする四角錐の体積を求めよ。

1.7　2021 年度

1 2 つの関数 $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-2x-4$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ について，曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の 2 つの交点の x 座標を $a,\ b\ (a>b)$ とする。

(1) $a,\ b$ を求めよ。

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(3) 実数 t は $t>|a|$ かつ $t>|b|$ を満たすとする。4 つの不等式

$$x\geqq a,\quad y\leqq f(x),\quad y\geqq g(x),\quad x\leqq t$$

を満たす領域の面積を S_1，また，4 つの不等式

$$x\leqq b,\quad y\leqq f(x),\quad y\geqq g(x),\quad x\geqq -t$$

を満たす領域の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の和が (2) の S と等しいときの t の値を求めよ。

2 空間の点 O を通らない平面 α をとる。α 上の 3 点 A，B，C は三角形をなすとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。直線 ℓ は媒介変数 t を用いて

$$\frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$

と表されるとする。

(1) ℓ は平面 α 上にあることを示せ。

(2) ℓ と辺 AC の交点を X とする。$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ，

(3) A，B の中点を D とし，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となる点 E を考える。点 O と ℓ 上の点 Y を通る直線は 2 点 E，C を通る直線と交点をもつとし，その交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 曲線 $C: y = x^3 - 2x^2 + x$ 上に点 $\mathrm{P}_1(2,\ 2)$ がある。自然数 n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して点 P_n から点 P_{n+1} を次のように定める。

> 点 P_n を接点とする C の接線を ℓ_n とし，C と ℓ_n の共有点のうち，
> P_n と異なるものを P_{n+1} とする。

点 P_n の x 座標を a_n とする。

(1) P_2 の座標を求めよ。

(2) 接線 ℓ_n の傾きおよび y 切片をそれぞれ a_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ a を $a > 1$ である実数とする。x についての連立不等式

$$\begin{cases} x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 < 0 \\ 3x^2 - x < 4a - 12ax \end{cases}$$

の解について考える。連立不等式の解のうち整数であるものの個数を $m(a)$ とする。

(1) 連立不等式を解け。

(2) $a > 2$ のとき，$m(a)$ の最小値を求めよ。

(3) $m(a) = 4$ となる a の値の範囲を求めよ。

第 2 章　一般前期解答

熊大入試の特徴として，文系数学でも計算力を要求する問題が目立つ．特に「微分法と積分法」の分野の問題には煩雑な計算に陥る受験生も少なくないと思われる．

積分の分野の公式として，次の公式があるが，2010 年，2012 年，2014 年，2017 年，2019 年の試験問題では，これを利用した方が効率的である．

$$\mathbf{1}\quad \int (x+k)^n\,dx = \frac{1}{n+1}(x+k)^{n+1} + C \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$\mathbf{2}\quad \int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

定積分の代表的な公式に，次の公式があるが，2013 年，2015 年の試験問題では，これを利用した方が煩雑な計算をせずに，正解を導くことができる．

$$\mathbf{3}\quad \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$\mathbf{4}\quad \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

上の 1，2，4 の積分公式は数学 III の内容であるが，熊大は公式の使用に関しては寛容である．中には，空間ベクトルの問題で大学で学ぶ外積[1](ベクトル積) を使用した受験生もいたが，間違いではないということで減点はされなかったそうである．

2019 年に出題された分数漸化式に代表される定型問題など，すでに触れたことのある受験生にとっては安心して解くことができたものと思われる．こうしたパターン化した問題は，微分法と積分法，ベクトル，数列の分野を中心に出題されている．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_ri_2018.pdf (p.3 を参照)

2.1 2015 年度

$\boxed{1}$ (1) $y = x^2$ を微分すると $\quad y' = 2x$

C_1 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線 l の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2$$

l と $C_2 : y = x^2 - 1$ の共有点の x 座標は

$$2ax - a^2 = x^2 - 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = a \pm 1$$

求める面積は

$$\int_{a-1}^{a+1} \{(2ax - a^2) - (x^2 - 1)\}\,dx = -\int_{a-1}^{a+1} (x-a+1)(x-a-1)\,dx$$
$$= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{(a+1)-(a-1)\}^3 = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

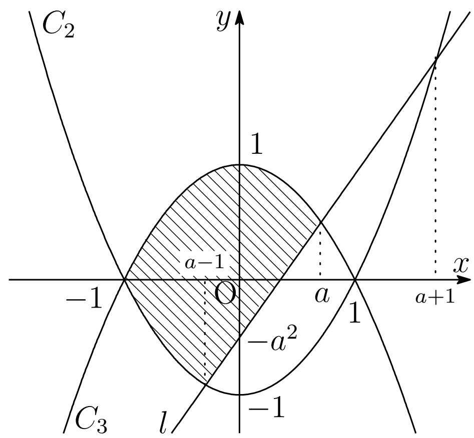
(2) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，l の方程式は

$$l : y = \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$$

l と C_3 の共有点の x 座標は

$$\sqrt{2}x - \frac{1}{2} = -x^2 + 1$$

ゆえに $\quad x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(=a),\ \ -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$



$f(x) = -x^2 + 1$ とし，$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x$ とする．

求める面積を S とすると

$$S = 2\int_{-1}^{a-1} f(x)\,dx + \int_{a-1}^{a} \{f(x) - (2ax - a^2)\}\,dx$$
$$= 2\Big[\,F(x)\,\Big]_{-1}^{a-1} + \Big[\,F(x)\,\Big]_{a-1}^{a} + \Big[-ax^2 + a^2x\Big]_{a-1}^{a}$$
$$= F(a) + F(a-1) - 2F(-1) - a^2 + a$$
$$= -\frac{1}{3}a^3 + a - \frac{1}{3}(a-1)^3 + a - 1 - 2\times\left(-\frac{2}{3}\right) - a^2 + a$$
$$= -\frac{2}{3}a^3 + 2a + \frac{2}{3}$$

このとき，$a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから $\qquad \boldsymbol{S = \dfrac{5\sqrt{2}+4}{6}}$ ■

2 (1) A(1, 1, 1)，B(3, 0, 1)，C(1, 2, 0)，P(−3, 2, 2) から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,-1,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 1,-1),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(-4,\ 1,\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと (α，β は実数)

$$(-4,\ 1,\ 1)=\alpha(2,-1,\ 0)+\beta(0,\ 1,-1)$$

したがって　$2\alpha=-4,\ -\alpha+\beta=1,\ -\beta=1$

これを解いて　$\alpha=-2,\ \beta=-1$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　よって，点 P は平面 H 上の点である．

(2) 平面 H を媒介変数 s，t を用いて表すと

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z)&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=(1,\ 1,\ 1)+s(2,-1,\ 0)+t(0,\ 1,-1)\\&=(1+2s,\ 1-s+t,\ 1-t)\quad\cdots①\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,-1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 1,-1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=(1,\ 2,\ 2)$$

とおく．Q を通り $\vec{n}$ に平行な直線を媒介変数 k を用いて表すと

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z)&=(1,-3,-4)+k(1,\ 2,\ 2)\\&=(1+k,-3+2k,-4+2k)\quad\cdots②\end{aligned}$$

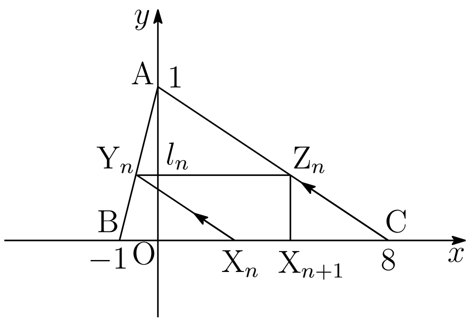
求める交点 $(x,\ y,\ z)$ は，①，② から

$$\begin{aligned}x&=1+2s=1+k\\y&=1-s+t=-3+2k\\z&=1-t=-4+2k\end{aligned}$$

これを解いて　$s=1,\ t=1,\ k=2,\ x=3,\ y=1,\ z=0$

よって，求める交点は　**(3, 1, 0)**　■

$\boxed{3}$ (1) 座標平面上に点 A$(0,\ 1)$，B$(-1,\ 0)$，C$(8,\ 0)$，$\mathrm{X}_n(x_n,\ 0)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をとる．直線 AB の方程式は



$$y=x+1 \quad \cdots ①$$

直線 AC の方程式は

$$y=-\frac{1}{8}x+1 \quad \cdots ②$$

直線 $\mathrm{X}_n\mathrm{Y}_n$ は点 $(x_n,\ 0)$ を通り，傾き $-\frac{1}{8}$ の直線であるから

$$y=-\frac{1}{8}(x-x_n) \quad \cdots ③$$

点 Y_n の y 座標 l_n は，①，③ を解いて　$l_n=\dfrac{1+x_n}{9}$　$\cdots ④$

このとき，$x_1=0$ であるから　$\boldsymbol{l_1=\frac{1}{9}}$

(2) 点 Z_n の y 座標が l_n であるから，その x 座標は，② より

$$l_n=-\frac{x}{8}+1 \quad \text{これを解いて} \quad x=8(1-l_n)$$

これが点 X_{n+1} の x 座標であるから　$x_{n+1}=8(1-l_n)$

したがって，上式および ④ から

$$l_{n+1}=\frac{1+x_{n+1}}{9}=\frac{1+8(1-l_n)}{9}=\boldsymbol{-\frac{8}{9}l_n+1}$$

(3) (1)，(2) の結果から　$l_{n+1}=-\frac{8}{9}l_n+1\cdots ①$，$l_1=\frac{1}{9}$

ここで，定数 c を

$$c=-\frac{8}{9}c+1 \quad \cdots ②$$

とおくと，①，② から

$$l_{n+1}-c=-\frac{8}{9}(l_n-c) \quad \text{ゆえに} \quad l_n-c=(l_1-c)\left(-\frac{8}{9}\right)^{n-1}$$

② を解いて　$c=\dfrac{9}{17}$　また　$l_1-c=\dfrac{1}{9}-\dfrac{9}{17}=-\dfrac{64}{153}$

よって　$l_n=\dfrac{9}{17}-\dfrac{64}{153}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^{n}}$ ■

4 (1) x の 3 次式 $f(x)$ の x^3 の係数が 1，$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ であるから

$$f'(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta) = 3x^2 - 3(\alpha+\beta)x + 3\alpha\beta$$

また，$f(x)$ の定数項は 0 であるから

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)x^2 + 3\alpha\beta x$$

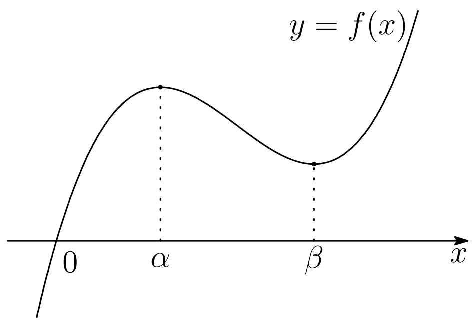
したがって

$$f(\alpha) = \alpha^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)\alpha^2 + 3\alpha^2\beta = \boldsymbol{\frac{\alpha^2(3\beta-\alpha)}{2}}$$
$$f(\beta) = \beta^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)\beta^2 + 3\alpha\beta^2 = \boldsymbol{\frac{\beta^2(3\alpha-\beta)}{2}}$$

(2) $f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$

$\alpha < \beta < 3\alpha$ より，$0 < \alpha < \beta$，$3\alpha - \beta > 0$ であるから，$f(\beta) > 0$
したがって，$y = f(x)$ のグラフの概形は，次のようになる．



よって，$y = f(x)$ および $y = -1$ のグラフから，3 次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数は **1 個**． ■

2.2　2016年度

$\boxed{1}$ (1) 面積の公式から　$S = \dfrac{1}{2}bc\sin\theta$　ゆえに　$\boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{2S}{bc}}$

余弦定理により　　$\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$

(2) △ACDに余弦定理を適用すると，(1)の結果により

$$\begin{aligned}\mathrm{DC}^2 &= \mathrm{CA}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{CA}{\cdot}\mathrm{AD}\cos(\theta+60^\circ)\\ &= b^2+c^2-2bc(\cos\theta\cos 60^\circ-\sin\theta\sin 60^\circ)\\ &= b^2+c^2-2bc\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{1}{2}-\frac{2S}{bc}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}S \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

$(*)$ は，a，b，c に関する対称式であるから　$\mathrm{DC}^2=\mathrm{EA}^2=\mathrm{FB}^2$

(3) $T=\dfrac{1}{3}(\triangle\mathrm{BCE}+\triangle\mathrm{CAF}+\triangle\mathrm{ABD})$ であるから

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ+\frac{1}{2}b^2\sin 60^\circ+\frac{1}{2}c^2\sin 60^\circ\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

ゆえに　　$a^2+b^2+c^2=4\sqrt{3}T$

これを $(*)$ に代入すると

$$\mathrm{DC}^2=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}T+2\sqrt{3}S=\boldsymbol{2\sqrt{3}(S+T)}$$

■

$\boxed{2}$ (1) 5つのデータの最大値と最小値はそれぞれ $5+X_2$，$2-X_1$ であるから，データの範囲は

$$(5+X_2)-(2-X_1)=X_1+X_2+3$$

これが7以下であるから

$$X_1+X_2+3 \leqq 7 \quad \text{ゆえに} \quad X_1+X_2 \leqq 4$$

これを満たす $(X_1,\ X_2)$ の組は，次の6通り．

$$(X_1,\ X_2)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$$

このとき，X_3 は，1〜6の6通りであるから，求める確率は

$$\frac{6\times 6}{6^3}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) $2 - X_1 < 2 < 5 < 5 + X_2$ であるから，X_3 がデータの中央値であるとき

$$2 \leqq X_3 \leqq 5 \quad \text{これを満たす } X_3 \text{は 4 通り}$$

このとき，X_1，X_2 は，ともに 1〜6 の 6 通りであるから，求める確率は

$$\frac{4 \times 6 \times 6}{6^3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(3) 条件から　　$X_3 = \dfrac{2 + 5 + (2 - X_1) + (5 + X_2) + X_3}{5}$

整理すると　　$4(X_3 - 3) = X_2 - X_1 + 2 \quad \cdots ①$

このとき，$1 \leqq X_1 \leqq 6$，$1 \leqq X_2 \leqq 6$ であるから

$$-3 \leqq X_2 - X_1 + 2 \leqq 7 \quad \cdots ②$$

①，② より，$X_2 - X_1 + 2 = 0,\ 4$ であるから

$$X_2 = X_1 - 2\ (X_1 = 3, 4, 5, 6) \text{ のとき} \quad X_3 = 3$$
$$X_2 = X_1 + 2\ (X_1 = 1, 2, 3, 4) \text{ のとき} \quad X_3 = 4$$

よって，求める確率は　$\dfrac{4 + 4}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{27}}$

(4) $2 - X_1 < 2 < 5 < 5 + X_2$ より，中央値は 2，5，X_3 のいずれかである．

i) 中央値が 2 のとき

$$\frac{2 + 5 + (2 - X_1) + (5 + X_2) + X_3}{5} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad X_1 = X_2 + X_3 + 4$$

このとき　$(X_1,\ X_2,\ X_3) = (6,\ 1,\ 1)$ の 1 通り

ii) 中央値が 5 のとき

$$\frac{2 + 5 + (2 - X_1) + (5 + X_2) + X_3}{5} = 5 \quad \text{ゆえに} \quad X_1 + 11 = X_2 + X_3$$

このとき　$(X_1,\ X_2,\ X_3) = (1,\ 6,\ 6)$ の 1 通り

iii) 中央値が X_3 のとき，(3) の結果より 8 通り

i)〜iii) から，求める条件付き確率は　$\dfrac{\dfrac{8}{6^3}}{\dfrac{1 + 1 + 8}{6^3}} = \boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$　■

$\boxed{3}$ (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{a}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\boldsymbol{\sqrt{a+1}-1}$

(2) $S(a)$ が整数 $n \geqq 1$ に等しいとき，(1) の結果から

$$\sqrt{a+1}-1=n \quad \text{ゆえに} \quad a=n(n+2)$$

よって，求める数列の一般項は $\boldsymbol{a_n=n(n+2)}$

(3) $n=2m-1$ のとき (m は整数)

$$\begin{aligned} a_n &= (2m-1)\{(2m-1)+2\}=(2m-1)(2m+1) \\ &= 4m^2-1=4(m^2-1)+3 \end{aligned}$$

$n=2m$ のとき (m は整数)

$$a_n=2m(2m+2)=4m(m+1)$$

よって，a_n を 4 で割った余りは 0 か 3 である．

(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{N(3N+5)}{4(N+1)(N+2)}} \end{aligned}$$

■

4 (1) $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ を x で微分すると　$F'(x)=f(x)$

条件より，$F(x)$ は $x=\pm a$ で極値をとるから

$$F'(\pm a)=0 \quad \text{すなわち} \quad f(\pm a)=0$$

2 次関数 $f(x)$ は，$x+a$，$x-a$ を因数にもつから，定数 $k\neq 0$ を用いて

$$f(x)=k(x+a)(x-a)=k(x^2-a^2)$$

とおける．したがって

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x k(t^2-a^2)\,dt\\&=k\left[\frac{t^3}{3}-a^2t\right]_0^x=k\left(\frac{x^3}{3}-a^2x\right)\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

このとき　$F(-x)=k\left\{\dfrac{(-x)^3}{3}-a^2(-x)\right\}=-k\left(\dfrac{x^3}{3}-a^2x\right)=-F(x)$

(2) $(*)$ より　$F(a)=-\dfrac{2}{3}ka^3\quad\cdots①$

$F(x)+F(a)=0$ のとき　$k\left(\dfrac{x^3}{3}-a^2x\right)-\dfrac{2}{3}ka^3=0$

$k\neq 0$ であるから，これを整理すると

$$x^3-3a^2x-2a^3=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+a)^2(x-2a)=0$$

よって，求める x は　$\boldsymbol{x=-a,\ 2a}$

(3) $F'(0)=f(0)$ より　$F'(0)=-ka^2$

$g(x)=\dfrac{F(x)}{F'(0)}$ とおくと　$g(x)=-\dfrac{F(x)}{ka^2}$．これを微分すると

$$g'(x)=-\frac{F'(x)}{ka^2}=-\frac{f(x)}{ka^2}=-\frac{k(x+a)(x-a)}{ka^2}=-\frac{1}{a^2}(x+a)(x-a)$$

このとき，$g(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって，求める極大値は，① により

$$g(a)=-\frac{F(a)}{ka^2}=-\frac{-\frac{2}{3}ka^3}{ka^2}=\boldsymbol{\frac{2}{3}a}$$

■

2.3　2017 年度

$\boxed{1}$ (1) A(2, 0, 0)，B(0, 4, 0)，C(0, 0, c) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 4,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 0,\ c)$$

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角が θ であるから

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{4}{2\sqrt{5}\sqrt{c^2+4}}=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5(c^2+4)}}}$$

また，$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{4}{5(c^2+4)}}=\boldsymbol{\sqrt{\frac{5c^2+16}{5(c^2+4)}}}$$

(2) H(x, y, z) とおくと，H は原点 O を中心とする半径 1 の球面上の点であるから

$$x^2+y^2+z^2=1\quad\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{HA}}=(2-x,-y,-z)$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=(-x,\ 4-y,-z)$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}=(-x,-y,\ c-z)$ がいずれも $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x,\ y,\ z)$ に垂直であるから

$$\begin{aligned}(2-x)x-y^2-z^2&=0\\-x^2+(4-y)y-z^2&=0\\-x^2-y^2+(c-z)z&=0\end{aligned}$$

① に注意してこれらを整理すると

$$2x=1,\quad 4y=1,\quad cz=1$$

上の 3 式から，$x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{4}$，$z=\dfrac{1}{c}$ を ① に代入して

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{c^2}=1$$

$c>0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{c=\dfrac{4}{\sqrt{11}}}$

(3) (1) の結果から

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\sqrt{c^2+4}\times\sqrt{\frac{5c^2+16}{5(c^2+4)}}=\sqrt{5c^2+16}$$

これに (2) の結果を代入すると

$$S=\sqrt{5\times\frac{16}{11}+16}=\boldsymbol{\frac{16}{\sqrt{11}}}$$

■

2 (1) $n-1$ 回目までに赤玉が 2 度出て，n 回目に赤玉が出る確率であるから

$$\begin{aligned} {}_{n-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^{n-3}\times\frac{3}{10} &= \frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\frac{3^2}{10^2}\cdot\frac{7^{n-3}}{10^{n-3}}\times\frac{3}{10} \\ &= \boldsymbol{\frac{27(n-1)(n-2)\cdot 7^{n-3}}{2\cdot 10^n}} \end{aligned}$$

(2) n 回の試行で 2 度以上連続することなく赤玉が 3 度出る順の総数は，$n-3$ 個の白玉を一列に並べ，赤玉をその間と両側を含めた $n-2$ 箇所から赤玉を配置する 3 箇所を選ぶ組合せの総数であるから，求める確率は

$$\begin{aligned} {}_{n-2}\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^{n-3} &= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}\cdot\frac{27}{10^3}\cdot\frac{7^{n-3}}{10^{n-3}} \\ &= \boldsymbol{\frac{9(n-2)(n-3)(n-4)\cdot 7^{n-3}}{2\cdot 10^n}} \end{aligned}$$

(3) n 回目に 3 度目の赤玉が出る事象を A，2 度以上連続することなく 3 度赤玉が出る事象を B とすると，求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

事象 $A\cap B$ は，$n-1$ 回目まで赤玉が連続することなく 2 度出て，n 回目に赤玉が出ることである．その総数は，(2) と同様に $n-3$ 個の白玉とその最後に赤玉 1 個を一列に並べ，白玉の間とその前を含めた $n-3$ 箇所から赤玉を配置する 2 箇所を選ぶ組合せの総数であるから，その確率は

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= {}_{n-3}\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^{n-3}\times\frac{3}{10} \\ &= \frac{(n-3)(n-4)}{2}\cdot\frac{9}{10^2}\cdot\frac{7^{n-3}}{10^{n-3}}\times\frac{3}{10} \\ &= \frac{27(n-3)(n-4)\cdot 7^{n-3}}{2\cdot 10^n} \end{aligned}$$

また，$P(A)$ は，(1) で求めた確率であるから，求める条件付き確率は

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{27(n-3)(n-4)\cdot 7^{n-3}}{2\cdot 10^n}\times\frac{2\cdot 10^n}{27(n-1)(n-2)\cdot 7^{n-3}} \\ &= \boldsymbol{\frac{(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=x^2+x$ を微分すると $f'(x)=2x+1$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)$$

すなわち $y=(2t+1)x-t^2$

これと直線 $y=x$ の方程式から y を消去すると

$$(2t+1)x-t^2=x \quad \text{ゆえに} \quad 2t\left(x-\frac{1}{2}t\right)=0$$

$t={a_n}^2$ とすると，$a_n>0$ のとき，$t\neq 0$ であるから

$$x=\frac{1}{2}t \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1}=\frac{1}{2}{a_n}^2>0$$

$a_1=8>0$ により，すべての自然数 n に対して $a_n>0$

(2) $a_n>0$ より $(n\geqq 1)$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}{a_n}^2$ の両辺を 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2\frac{1}{2}{a_n}^2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 a_{n+1}=2\log_2 a_n-1$$

$b_n=\log_2 a_n$ であるから $\boldsymbol{b_{n+1}=2b_n-1}$

(3) (2) の結果から $b_{n+1}-1=2(b_n-1)$

また $b_1=\log_2 a_1=\log_2 8=3$

数列 $\{b_n-1\}$ は，初項が $b_1-1=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n-1=2\cdot 2^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad b_n=2^n+1$$

$b_n=\log_2 a_n$ より，$a_n=2^{b_n}$ であるから $\boldsymbol{a_n=2^{2^n+1}}$ ■

4 (1) C_1，C_2 の方程式から，y を消去すると

$$
\begin{aligned}
2x^3-x^2&=(x-t)^2+2t^3-t^2\\
2(x^3-t^3)-2x^2+2tx&=0\\
(x-t)(x^2+tx+t^2)-x(x-t)&=0\\
(x-t)\{x^2+(t-1)x+t^2\}&=0 \quad \cdots(*)
\end{aligned}
$$

2 曲線 C_1，C_2 の共有点が 2 個となるのは，$(*)$ から，次の場合がある．

(i) $x=t$ が方程式 $x^2+(t-1)x+t^2=0$ の解であるとき

$$t^2+(t-1)t+t^2=0 \quad \text{すなわち} \quad t(3t-1)=0$$

ここで，$t\neq 0$ に注意して，$t=\dfrac{1}{3}$ を $(*)$ に代入すると

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)=0 \quad \text{すなわち} \quad \left(x-\frac{1}{3}\right)^3=0$$

このとき，方程式 $(*)$ が 3 重解をもち，不適．

(ii) 方程式 $x^2+(t-1)x+t^2=0$ が重解をもつとき，係数について

$$(t-1)^2-4t^2=0 \quad \text{すなわち} \quad (3t-1)(t+1)=0$$

$t=\dfrac{1}{3}$ は (i) から，不適であるから，$t=-1$ を方程式 $(*)$ に代入すると

$$(x+1)(x^2-2x+1)=0 \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(x-1)^2=0$$

このとき，2 曲線 C_1，C_2 の共有点の x 座標は　$x=-1,\ 1$

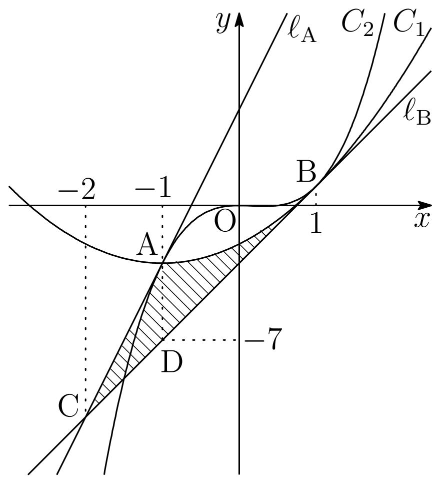
(i)，(ii) より，求める t の値は　　$\boldsymbol{t=-1}$

(2) (1) の結果から　$C_1 : y=(x+1)^2-3$，$C_2 : y=2x^3-x^2$

条件により　A$(-1,-3)$，B$(1,\ 1)$

$y=2x^3-x^2$ を微分すると

$$y'=6x^2-2x$$



$x=-1$ のとき，$y'=8$
$x=1$ のとき，$y'=4$
2 直線 ℓ_{A}，ℓ_{B} の方程式は

$$\begin{aligned} \ell_{\mathrm{A}}:\ y-(-3)&=8(x+1) \\ y&=8x+5 \\ \ell_{\mathrm{B}}:\quad y-1&=4(x-1) \\ y&=4x-3 \end{aligned}$$

2 直線 ℓ_{A}，ℓ_{B} の交点を C とすると，その x 座標は

$$8x+5=4x-3 \quad \text{これを解いて} \quad x=-2$$

ℓ_{B} 上の $x=1$ における点を D とすると　D$(1,-7)$

求める面積は上の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S&=\triangle\mathrm{ACD}+\int_{-1}^{1}\{(x^2+2x-2)-(4x-3)\}\,dx \\ &=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\{-3-(-7)\}+\int_{-1}^{1}(x-1)^2\,dx \\ &=2+\left[\,\frac{1}{3}(x-1)^3\,\right]_{-1}^{1}=\boldsymbol{\frac{14}{3}} \end{aligned}$$

■

2.4　2018 年度

1　(1) $f(x) = x^3 - px^2 + (p^2 - 2p)x + q$ より　$f'(x) = 3x^2 - 2px + p^2 - 2p$

$f'(x) = 0$ の判別式を D とすると，$D/4 > 0$ であるから

$$(-p)^2 - 3(p^2 - 2p) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad p(p-3) < 0$$

p は整数であるから　　$\boldsymbol{p = 1,\ 2}$

(2) (1) の結果は，方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつための必要条件である．

(i) $p = 1$ のとき，$f(x) = x^3 - x^2 - x + q$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (x-1)(3x+1)$$

与えられた条件を満たすとき，$f(0) > 0$，$f(1) < 0$ であるから

$$q > 0, \quad q - 1 < 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < q < 1$$

q は整数であるから，これを満たす q は存在しない．

(ii) $p = 2$ のとき，$f(x) = x^3 - 2x^2 + q$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4)$$

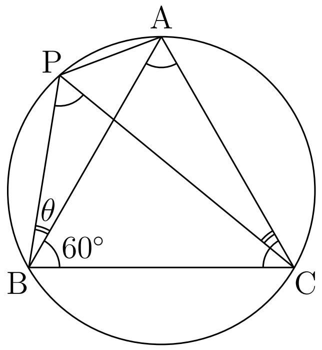
与えられた条件を満たすとき，$f(0) > 0$，$f\left(\dfrac{4}{3}\right) < 0$ であるから

$$q > 0, \quad q - \frac{32}{27} < 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < q < \frac{32}{27}$$

q は整数であるから　$q = 1$

(i),(ii) より　　$\boldsymbol{p = 2,\ q = 1}$　■

2 (1) $\angle\mathrm{PBA} = \theta$ より，右の図から



$$\angle\mathrm{PBC} = 60^\circ + \theta,\quad \angle\mathrm{PCB} = 60^\circ - \theta$$

$\triangle\mathrm{PBA}$，$\triangle\mathrm{PBC}$ は半径1の円に内接しているから，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin\theta} = 2\cdot 1,$$
$$\frac{\mathrm{PB}}{\sin(60^\circ - \theta)} = \frac{\mathrm{PC}}{\sin(60^\circ + \theta)} = 2\cdot 1$$

ゆえに $\quad \mathbf{PA = 2\sin\boldsymbol{\theta}}$

$\mathbf{PB = 2\sin(60^\circ - \boldsymbol{\theta})}$，$\mathbf{PC = 2\sin(60^\circ + \boldsymbol{\theta})}$

加法定理により $\quad \sin(60^\circ - \theta) + \sin(60^\circ + \theta) = 2\sin 60^\circ\cos\theta = \sqrt{3}\cos\theta$

したがって
$$\begin{aligned}\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC} &= 2\{\sin\theta + \sin(60^\circ - \theta) + \sin(60^\circ + \theta)\}\\ &= 2(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\\ &= 4\sin(\theta + 60^\circ)\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC}$ は，$\theta = 30^\circ$ のとき，最大値 **4** をとる．

(2) $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2 &= 2\{2\sin^2\theta + 2\sin^2(60^\circ - \theta) + 2\sin^2(60^\circ + \theta)\}\\ &= 2\{3 - \cos 2\theta - \cos(120^\circ - 2\theta) - \cos(120^\circ + 2\theta)\}\\ &= 6 - 2\{\cos 2\theta + \cos(120^\circ - 2\theta) + \cos(120^\circ + 2\theta)\}\end{aligned}$$

ここで，加法定理により

$$\cos(120^\circ - 2\theta) + \cos(120^\circ + 2\theta) = 2\cos 120^\circ\cos 2\theta = -\cos 2\theta$$

上式より，$\cos 2\theta + \cos(120^\circ - 2\theta) + \cos(120^\circ + 2\theta) = 0$ であるから

$$\mathbf{PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6}$$

■

3 (1) さいころが $R_{(m,n)}$ から $R_{(m+i,n+j)}$ の位置に移る確率を $P_{(i,j)}$ とすると

$$P_{(i,j)} = {}_{i+j}\mathrm{C}_i\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \frac{{}_{i+j}\mathrm{C}_i}{2^{i+j}} \quad \cdots (*)$$

である (i，j は 0 以上の整数)．

$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,4)}$ に移る確率であるから，$(*)$ に $i=2$，$j=3$ を代入して

$$P_{(2,3)} = \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{2^5} = \frac{10}{32} = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

(2) 事象 A，B を，次のように定める

A : 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にある．

B : 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある．

$P(A)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置に移る確率であるから，$(*)$ により

$$P(A) = P_{(2,0)} + P_{(0,2)} = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$P(A\cap B)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置を通って，$R_{(3,4)}$ の位置に移る確率であるから

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P_{(2,0)}P_{(0,3)} + P_{(0,2)}P_{(2,1)} \\ &= \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_0}{2^3} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{2^3} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころの 1 の目が上にあるとき，途中反転する (1 の目が上から下，下から上)．5 回投げる中で反転は 2 度起き，さいころの 1 の目が下にくるのは硬貨を 2 回目または 3 回目に投げたあとである．

さいころが 2 回で反転する事象を X とすると，X が起きるのは．硬貨が「表表」または「裏裏」の順に出るときであるから，その確率は

$$P(X) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

さいころが 3 回で反転する事象を Y とすると，Y が起きるのは，硬貨が「表裏表」または「裏表裏」の順に出るときであるから，その確率は

$$P(Y) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

求める確率は，X, Y または Y, X の順に起こる確率であるから

$$P(X)P(Y) + P(Y)P(X) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $S_1 = a_1 = 1$，$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n \quad \cdots (*)$

$(*)$ に $n = 1,\ 2$ を代入すると

$$S_2 = 2S_1 + 1^2 + 2{\cdot}1 = 5$$
$$S_3 = 2S_2 + 2^2 + 2{\cdot}2 = 18$$

よって　$a_2 = S_2 - S_1 = 5 - 1 = \mathbf{4}$**,**　$a_3 = S_3 - S_2 = 18 - 5 = \mathbf{13}$

(2) $(*)$ より
$$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n$$
$$S_n = 2S_{n-1} + (n-1)^2 + 2(n-1)$$

上の 2 式の辺々を引くと　$\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1}$

(3) 1 次関数 $f(n) = pn + q$ が，すべての n について，次式を満たすとき

$$f(n+1) = 2f(n) + 2n + 1 \quad \cdots ①$$

したがって　$p(n+1) + q = 2(pn + q) + 2n + 1$

整理すると　$pn + p + q = (2p+2)n + 2q + 1$

上式は，n に関する恒等式であるから

$p = 2p + 2,\ \ p + q = 2q + 1$　これを解いて　$p = -2,\ \ q = -3$

ゆえに　$f(n) = -2n - 3 \quad \cdots ②$

(2) の結果と ① の辺々を引くと

$$a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$$

$f(2) = -2{\cdot}2 - 3 = -7$ であるから，$a_2 - f(2) = 4 - (-7) = 11$ より

$a_n - f(n) = 11{\cdot}2^{n-2}$　ゆえに　$a_n = 11{\cdot}2^{n-2} + f(n)$

これに ② を代入して　$\boldsymbol{a_n = 11{\cdot}2^{n-2} - 2n - 3 \ \ (n \geqq 2)}$ ■

2.5 2019年度

$\boxed{1}$ (1) $a_1 \neq 2$ であるから，第 $m+1$ 項で初めて $a_{m+1}=2$ になると仮定すると，漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n}+1\cdots(*)$ に $n=m$ を代入すると

$$2=\frac{2}{a_m}+1 \quad \text{すなわち} \quad a_m=2$$

第 m 項ですでに $a_m=2$ となり，矛盾を生じる．
よって，すべての自然数 n に対して　$a_n \neq 2$

(2) $b_n=\dfrac{3}{a_n-2}+1\cdots(**)$ より　$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-2}$　これと $(*)$ により

$$a_{n+1}+1=\frac{2}{a_n}+2=\frac{2(a_n+1)}{a_n}$$
$$a_{n+1}-2=\frac{2}{a_n}-1=\frac{-(a_n-2)}{a_n}$$

上の2式から　$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-2}=-2\cdot\dfrac{a_n+1}{a_n-2}$　すなわち　$b_{n+1}=-2b_n$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{a_1+1}{a_1-2}=\dfrac{1+1}{1-2}=-2$，公比 -2 の等比数列であるから

$$b_n=b_1\cdot(-2)^{n-1}=\boldsymbol{(-2)^n}$$

補足 $\{a_n\}$ の特性方程式 $x=\dfrac{2}{x}+1$ の解が $2,-1$ であるから，数列 $\left\{\dfrac{a_n+1}{a_n-2}\right\}$ は等比数列である．

(3) $(**)$ より　$b_n-1=\dfrac{3}{a_n-2}$　ゆえに　$a_n-2=\dfrac{3}{b_n-1}$

上式および (2) の結果から　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{3}{(-2)^n-1}+2}$

(4) (3) の結果を $a_n>\dfrac{5}{2}$ に代入すると

$$\frac{3}{(-2)^n-1}+2>\frac{5}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{(-2)^n-1}>\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$$

したがって　$0<(-2)^n-1<6$　ゆえに　$1<(-2)^n<7$

これを満たす自然数 n は　$\boldsymbol{n=2}$

分数漸化式

p，q，$r \neq 0$，s を定数とする漸化式

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \cdots (*)$$

の一般項について，以下に述べる．
$ps - qr = 0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps - qr \neq 0$ とする．
$(*)$ の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s - p)x - q = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α，β とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \cdots (***)$$
$$a_{n+1} - \beta = \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき，上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$$

したがって　$$\frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \frac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha}\left(\frac{r\alpha + s}{r\beta + s}\right)^{n-1}$$

上式から，a_n が求まる．

ii) $\alpha = \beta$ のとき，$(*)$ の係数の係数について

$$(s - p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p + s)^2 = 4(ps - qr) \quad \cdots ①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha = \frac{p - s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \cdots ②$$

①，② により，$(***)$ は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p + s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p + s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p + s)\}} \end{aligned}$$

逆数をとると $$\frac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{1}{a_n-\alpha}+\frac{2r}{p+s}$$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項が $\dfrac{1}{a_1-\alpha}$，公差が $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる．

例えば，大分大学 2001 年の漸化式 [2]

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=\frac{2a_n}{3a_n+5}$$

の特性方程式 $x=\dfrac{2x}{3x+5}$ の解が $0,-1$ であるから

$$a_{n+1}+1=\frac{5(a_n+1)}{3a_n+5}$$

したがって $\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1}+1}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{a_n}{a_n+1}$ ゆえに $\dfrac{a_n}{a_n+1}=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$

よって $$a_n=\frac{3\cdot2^{n-1}}{4\cdot5^{n-1}-3\cdot2^{n-1}}$$

次に，宮崎大学 2003 年の漸化式 [3]

$$a_1=\frac{q}{p}\ (p>q>0),\quad a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}\ (n=1,2,\cdots)$$

の特性方程式 $x=\dfrac{1}{2-x}$，すなわち $x^2-2x+1=0$ は重解 1 をもつから

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$$

ゆえに $\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{1}{\frac{q}{p}-1}-(n-1)$ よって $a_n=\dfrac{(n-1)p-(n-2)q}{np-(n-1)q}$ ■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2001.pdf $\boxed{1}$
[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/miyazaki/miyazaki_2003.pdf $\boxed{12}$

2 (1) a に対する b の値は，次のようになる．

a	1	2	3	4	5	6
b	2	1	3	2	4	3

このとき，$a > b$ となるのは，次の 4 通り

a	2	4	5	6
b	1	2	4	3

よって，求める確率は　$\dfrac{4}{6} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(2) $\sin\dfrac{\pi}{5} > \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ より　$\sin\dfrac{\pi}{5} > 0.5$

$\cos\dfrac{\pi}{5} < \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} < \sqrt{0.81} = 0.9$　ゆえに　$\cos\dfrac{\pi}{5} < 0.9$

(3) $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{0.5}$,　$\sqrt{0.49} < \sqrt{0.5} < \sqrt{0.64}$ より

$$0.7 < \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} < 0.8$$

(2) および上の結果に注意すると，$a < b$ となる $(a,\ b)$ について

$(a,\ b) = (2,\ 1)$ のとき　$S = \cos\dfrac{\pi}{2} + \sin\pi = 0 < 1.7$

$(a,\ b) = (4,\ 2)$ のとき　$S = \cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{2} > 0.7 + 1 = 1.7$

$(a,\ b) = (5,\ 4)$ のとき　$S = \cos\dfrac{\pi}{5} + \sin\dfrac{\pi}{4} < 0.9 + 0.8 = 1.7$

$(a,\ b) = (6,\ 3)$ のとき　$S = \cos\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} > \sqrt{1.7^2} = 1.7$

よって，求める条件付き確率は　$\dfrac{2}{4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

補足 $a < b$ である事象を X，$S < 1.7$ である事象を Y とすると

$$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{2}$$

$(a,\ b) = (1,\ 2)$ のとき　$S = \cos\pi + \sin\dfrac{\pi}{2} = 0 < 1.7$

$(a,\ b) = (3,\ 3)$ のとき　$S = \cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1.7$

$P(Y) = \dfrac{4}{6}$ より，$P_X(Y) \neq P(Y)$ であるから，X と Y は独立ではない．■

$\boxed{3}$ (1) $y=x^2+ax+b$ が x 軸に接するから，係数について

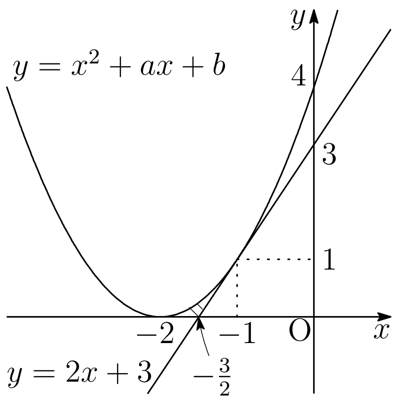
$$a^2-4b=0 \quad \cdots ①$$

$y=x^2+ax+b$ と $y=2x+3$ から y を消去して整理すると

$$x^2+(a-2)x+b-3=0$$

この方程式は重解をもつから

$$(a-2)^2-4(b-3)=0 \quad \cdots ②$$



①，② を解いて　　$\boldsymbol{a=4,\ b=4}$

3 点 $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$，$(-1,\ 0)$，$(-1,\ 1)$ を頂点する三角形の面積は　$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$

よって，求める面積を S とすると [4]

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1}(x^2+4x+4)\,dx-\frac{1}{4} \\ &= \int_{-2}^{-1}(x+2)^2\,dx-\frac{1}{4}=\left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^{-1}-\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{12}} \end{aligned}$$

(2) $y=x^2+2px-2p$ と $y=x^3$ から y を消去すると

$$x^2+2px-2p=x^3 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x^2-2p)=0 \quad \cdots(*)$$

(i) $x^2-2p=0$ が重解をもつとき　$p=0$
これを $(*)$ に代入して　　$(x-1)x^2=0$

(ii) $x^2-2p=0$ が 1 を解にもつとき　$1-2p=0$　ゆえに　$p=\frac{1}{2}$
これを $(*)$ に代入して　　$(x+1)(x-1)^2=0$

(i),(ii) で得られた結果は条件を満たす．よって　$\boldsymbol{p=0,\ \frac{1}{2}}$ ■

---

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ の補足を参照．

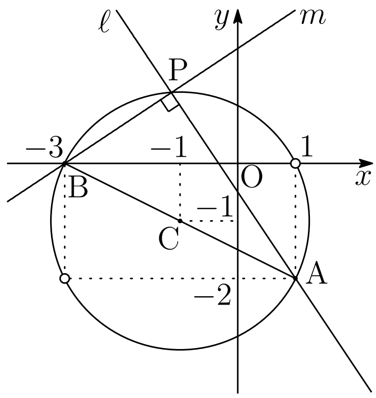
$\boxed{4}$ (1) $\ell : y = ax - a - 2$ は $y + 2 = a(x - 1)$ より，点 $\mathrm{A}(1, -2)$ を通り，傾き a の直線．

$m : y = bx + 3b$ は $y = b(x + 3)$ より，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ を通り，傾き b の直線．

ℓ と m は直交するから，ℓ と m の交点 P は，線分 AB を直径とする円周上を動く．

線分 AB の中点を C とすると　$\mathrm{C}(-1, -1)$

$$\mathrm{CA} = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$$



求める点 P の軌跡は，2 直線 ℓ，m が x 軸と垂直ではないことに注意して

$$\boldsymbol{(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5,\quad (x,\ y) \neq (1,\ 0),\ (-3, -2)}$$

(2) $\ell \perp m$ より，$ab = -1$ であるから

$$\ell : ax - y - a - 2 = 0, \quad m : x + ay + 3 = 0$$

線分 AP の長さは，点 $\mathrm{A}(1, -2)$ と直線 m の距離であるから

$$\mathrm{AP} = \frac{|1 + a\cdot(-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + a^2}} = \boldsymbol{\frac{2|a-2|}{\sqrt{a^2+1}}}$$

線分 BP の長さは，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ と直線 ℓ の距離であるから

$$\mathrm{BP} = \frac{|a\cdot(-3) + 0 - a - 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \boldsymbol{\frac{2|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}}$$

(3) $\triangle\mathrm{APB}$ の面積が最大となるとき，P は線分 AB の垂直二等分線上にあるから，$\mathrm{AP} = \mathrm{BP}$ より

$$\frac{2|a-2|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{2|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}} \quad \text{ゆえに} \quad |a-2| = |2a+1|$$

これを解いて　$\boldsymbol{a = \frac{1}{3}, -3}$

別解 直線 AB の傾きは，その偏角を θ とすると　$\tan\theta = -\dfrac{1}{2}$

$\triangle\mathrm{APB}$ の面積が最大となるとき，ℓ の傾き a は

$$a = \tan(\theta \pm 45^\circ) = \frac{\tan\theta \pm \tan 45^\circ}{1 \mp \tan\theta\tan 45^\circ} = \frac{-\frac{1}{2} \pm 1}{1 \pm \frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm 2}{2 \pm 1} = \frac{1}{3}, -3$$

■

2.6　2020 年度

1　(1) $y = (\sin\theta + a)(\cos\theta + a)$ より

$$y = \sin\theta\cos\theta + a(\sin\theta + \cos\theta) + a^2$$

$t = \sin\theta + \cos\theta$ の両辺を平方すると

$$t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta \qquad \text{ゆえに} \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{t^2-1}{2}$$

よって　$y = \dfrac{t^2-1}{2} + at + a^2 = \boldsymbol{\dfrac{t^2}{2} + at + a^2 - \dfrac{1}{2}}$

(2) $t = \sin\theta + \cos\theta$ より　$t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　　$\boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}}$

(3) $y = f(t)$ とおくと，(1) の結果から

$$f(t) = \frac{1}{2}(t+a)^2 + \frac{a^2-1}{2} \quad (-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})$$

したがって，$y = f(t)$ は，下に凸の放物線である．
軸は $t = -a$，定義域 $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ の中央は　$t = 0$

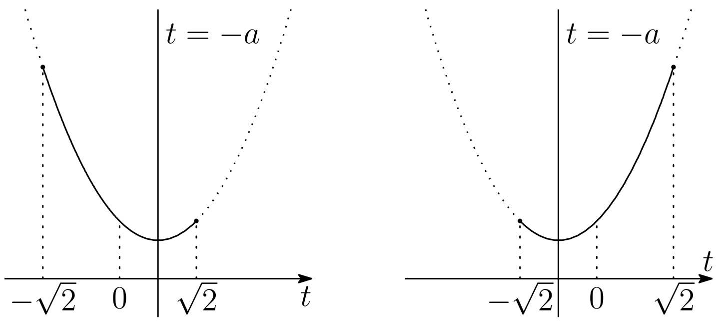
(i) $0 < -a$　すなわち　$a < 0$ のとき

最大値 $f(-\sqrt{2}) = \boldsymbol{a^2 - \sqrt{2}a + \dfrac{1}{2}}$

(ii) $-a \leqq 0$　すなわち　$a \geqq 0$ のとき

最大値 $f(\sqrt{2}) = \boldsymbol{a^2 + \sqrt{2}a + \dfrac{1}{2}}$

(i) $0 < -a$ のとき $(a < 0)$　　　(ii) $-a \leqq 0$ のとき $(a \geqq 0)$



2 次関数 (下に凸の放物線) の閉区間における最大値

定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり，
定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる．

最小値は，次の3つの場合に分けて求める．

(i) $\sqrt{2} < -a$　すなわち　$a < -\sqrt{2}$ のとき

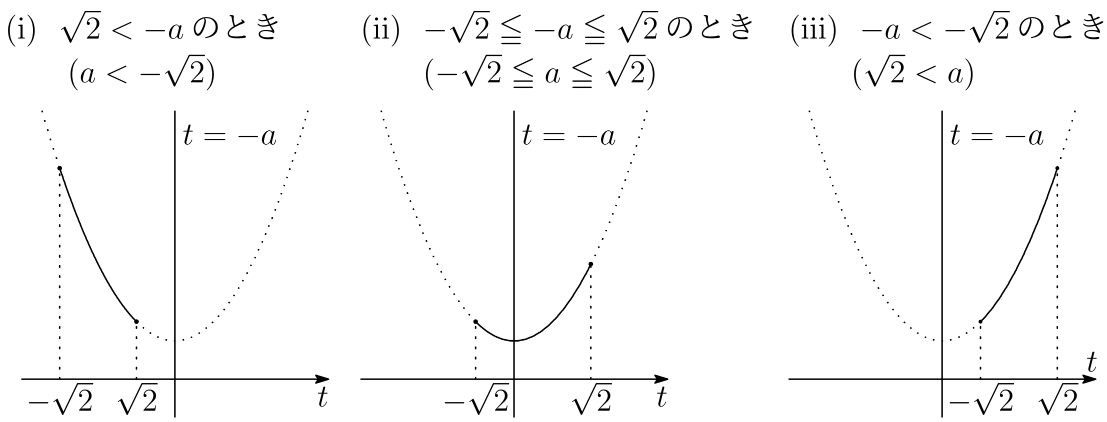
最小値 $f(\sqrt{2}) = \boldsymbol{a^2 + \sqrt{2}a + \frac{1}{2}}$

(ii) $-\sqrt{2} \leqq -a \leqq \sqrt{2}$　すなわち　$-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき

最小値 $f(-a) = \boldsymbol{\dfrac{a^2 - 1}{2}}$

(iii) $-a < -\sqrt{2}$　すなわち　$\sqrt{2} < a$ のとき

最小値 $f(-\sqrt{2}) = \boldsymbol{a^2 - \sqrt{2}a + \frac{1}{2}}$



■

$\boxed{2}$ (1) $g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ より　$g(a) = g(b) = g(c) = 0$　$\cdots(*)$

$g(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ac+bc+ca)x - abc$ であるから

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca \\ &= (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) \end{aligned}$$

$a < b < c$ であるから

$$(**)\quad \begin{cases} g'(a) = (a-b)(a-c) > 0 \\ g'(b) = (b-c)(b-a) < 0 \\ g'(c) = (c-a)(c-b) > 0 \end{cases}$$

$f(x) = g(x) - g'(x)$ は，$(*)$，$(**)$ により

$$\begin{aligned} f(a) &= g(a) - g'(a) < 0, \\ f(b) &= g(b) - g'(b) > 0, \\ f(c) &= g(c) - g'(c) < 0 \end{aligned}$$

(2) $p=a+b+c$，$q=ab+bc+ca$，$r=abc$ とおくと，(1) の結果から

$$g(x)=x^3-px^2+qx-r,\quad g'(x)=3x^2-2px+q$$

ゆえに　$g(x)-g'(x)=x^3-(p+3)x^2+(2p+q)x-q-r$

また　$f(x)=(x+1)(x-2-4x+2)=x^3-3x^2-2x+2$

$f(x)=g(x)-g'(x)$ であるから

$$x^3-3x^2-2x+2=x^3-(p+3)x^2+(2p+q)x-q-r$$

同じ次数の項の係数を比較すると

$$-3=-(p+3),\quad -2=2p+q,\quad 2=-q-r$$

これを解いて　$p=0,\ q=-2,\ r=0$

$a,\ b,\ c$ を解とする3次方程式は，$t^3-pt^2+qt-r=0$，すなわち

$$t^3-2t=0\quad \text{これを解いて}\quad t=0,\ \pm\sqrt{2}$$

$a<b<c$ であるから　$\boldsymbol{a=-\sqrt{2},\ b=0,\ c=\sqrt{2}}$

(3) $y=g(x)$，$y=f(x)$ の共有点の x 座標は，$f(x)-g(x)=-g'(x)$ より

$$f(x)-g(x)=0\quad \text{すなわち}\quad -g'(x)=-(3x^2-2)=0$$

これを解いて　$x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\leqq x\leqq\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ において

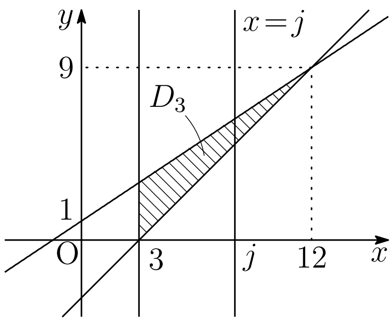
$$f(x)-g(x)=-g'(x)=-3x^2+2\geqq 0$$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}}(-3x^2+2)\,dx\\&=\Big[-x^3+2x\Big]_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{6}}{9}}\end{aligned}$$

■

3　(1) $n=3$ のとき，3 直線



$$y=\frac{2}{3}x+1,\quad y=x-3,\quad x=3$$

で囲まれた領域 D_3 で，直線 $x=j$ 上の格子点の個数は $(3\leqq j\leqq 12)$

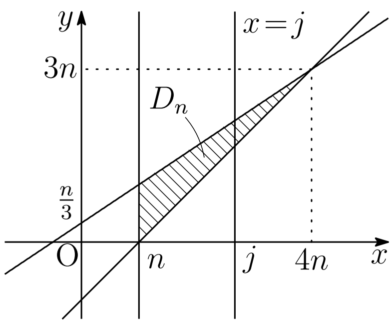
$$\left[\frac{2}{3}j+1\right]-(j-3)+1=\left[\frac{15-j}{3}\right]$$

よって，求める個数は ($[x]$ は x を超えない最大の整数を表す)

$$\begin{aligned}&\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]+\left[\frac{6}{3}\right]+\left[\frac{7}{3}\right]+\left[\frac{8}{3}\right]+\left[\frac{9}{3}\right]+\left[\frac{10}{3}\right]+\left[\frac{11}{3}\right]+\left[\frac{12}{3}\right]\\&=\left(\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]\right)+\left(\left[\frac{6}{3}\right]+\left[\frac{7}{3}\right]+\left[\frac{8}{3}\right]\right)\\&\qquad+\left(\left[\frac{9}{3}\right]+\left[\frac{10}{3}\right]+\left[\frac{11}{3}\right]\right)+\left[\frac{12}{3}\right]\\&=3+6+9+4=\mathbf{22}\end{aligned}$$

補足　次頁の定理を参照.

(2) 3 直線



$$y=\frac{2}{3}x+\frac{n}{3},\quad y=x-n,\quad x=n$$

で囲まれた領域 D_n で，直線 $x=j$ 上の格子点の個数を a_j とすると $(n\leqq j\leqq 4n)$

$$\begin{aligned}a_j&=\left[\frac{2}{3}j+\frac{n}{3}\right]-(j-n)+1\\&=\left[\frac{4n-j}{3}\right]+1\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

求める個数は　$a_{n+3k}=\left[\dfrac{4n-(n+3k)}{3}\right]+1=\boldsymbol{n-k+1}$

(3) (*) より　$a_{n+3k+1}=\left[\dfrac{4n-(n+3k+1)}{3}\right]+1=n-k$

$$a_{n+3k+2}=\left[\dfrac{4n-(n+3k+2)}{3}\right]+1=n-k$$

上の 2 式および (2) の結果により

$$\begin{aligned}L_n&=\sum_{j=n}^{4n}a_j=\sum_{k=0}^{n-1}(a_{n+3k}+a_{n+3k+1}+a_{n+3k+2})+a_{4n}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\{(n-k+1)+(n-k)+(n-k)\}+1\\&=\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)+k+k\}+1=\sum_{k=1}^{n}(3k+1)+1\\&=3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n+1=\boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)}\end{aligned}$$

別解 (*) により

$$\begin{aligned}L_n&=\sum_{j=n}^{4n}a_j=\sum_{j=n}^{4n}\left(\left[\frac{4n-j}{3}\right]+1\right)=\sum_{j=n}^{4n}\left[\frac{4n-j}{3}\right]+\sum_{j=n}^{4n}\\&=\left(\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{3}{3}\right]\right)+\left(\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]+\left[\frac{6}{3}\right]\right)\\&\qquad+\cdots+\left(\left[\frac{3n-2}{3}\right]+\left[\frac{3n-1}{3}\right]+\left[\frac{3n}{3}\right]\right)+(3n+1)\\&=1+4+\cdots+(3n-2)+(3n+1)\\&=\frac{1}{2}(n+1)\{1+(3n+1)\}=\boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)}\end{aligned}$$

定理 a，n を整数とすると，次式が成立する．

$$\text{(A)}\quad \boldsymbol{\left[\frac{a}{n}\right]+\left[\frac{a+1}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{a+n-1}{n}\right]=a}$$

証明 連続する n 個の整数 $a,\ a+1,\cdots,a+n-1$ 中で n の倍数を $a+q$ とする．

$q=0$ のとき　(A) のすべての項が $\dfrac{a}{n}$ であるから，(A) の値は　$\dfrac{a}{n}\cdot n=a$

$q\neq 0$ のとき　$\left[\dfrac{a}{n}\right]=\left[\dfrac{a+1}{n}\right]=\cdots=\left[\dfrac{a+q-1}{n}\right]=\dfrac{a+q}{n}-1,$

$$\left[\frac{a+q}{n}\right]=\left[\frac{a+q+1}{n}\right]=\cdots=\left[\frac{a+n-1}{n}\right]=\frac{a+q}{n}$$

(A) の値は　$\left(\dfrac{a+q}{n}-1\right)q+\dfrac{a+q}{n}(n-q)=a$　**証終**　■

$\boxed{4}$ (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$$

したがって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=\{t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\}-(1-s)\vec{a}\\&=-\vec{a}+\vec{c}+s\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{c})\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

$-\vec{a}+\vec{c}=(-2,\ 1,\ k-1)$，$\vec{b}-\vec{c}=(1,\ 1,\ 1-k)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(-2,\ 1,\ k-1)+s(1,-1,\ 1)+t(1,\ 1,\ 1-k)\\&=(-2+s+t,\ 1-s+t,\ k-1+s+t(1-k))\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{P}(-2+s+t,\ 1-s+t,\ k-1+s+t(1-k))$

(2) $\vec{d}=\vec{b}-\vec{c}$ とおくと，$(*)$ において $0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の描く図形は，2 つのベクトル

$$\vec{a}=(1,-1,\ 1),\quad \vec{d}=(1,\ 1,\ 1-k)$$

によって張られる平行四辺形であるから，その面積 $S(k)$ は

$$S(k)=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{d}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{d})^2}$$

このとき
$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2&=1^2+(-1)^2+1^2=3\\|\vec{d}|^2&=1^2+1^2+(1-k)^2=k^2-2k+3\\\vec{a}\cdot\vec{d}&=1\cdot1+(-1)\cdot1+1(1-k)=1-k\end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned}S(k)&=\sqrt{3(k^2-2k+3)-(1-k)^2}\\&=\sqrt{2(k-1)^2+6}\end{aligned}$$

よって，$S(k)$ は，$\boldsymbol{k=1}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{6}}$ をとる．

別解 $\vec{a}$ と $\vec{d}$ のベクトル積 (外積) は　$\vec{a}\times\vec{d}=(k-2,\ k,\ 2)$

ゆえに　$S(k)=|\vec{a}\times\vec{d}|=\sqrt{(k-2)^2+k^2+4}=\sqrt{2(k-1)^2+6}$

注意 ベクトル積 (外積) は，高校数学の範囲外であるが，検算として利用できる．2018 年度の熊大入試において，四面体の体積についてベクトル積を用いた受験生の解答があったが，間違いではなかったため，減点されることはなかったそうである (熊大入試連絡会).

(3) $k=1$ より，平行四辺形 $P(1)$ は，次の 2 つのベクトルに平行である．

$$\vec{a}=(1,-1,\ 1),\quad \vec{d}=(1,\ 1,\ 0)$$

これらに垂直な単位ベクトルの 1 つは (外積と平行なベクトル)

$$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,\ 1,\ 2)$$

$(*)$ より，$P(1)$ 上の 1 点 $\mathrm{C}(\vec{c})$ をもとに $(s=1,\ t=0)$，点 O から $P(1)$ を含む平面に垂線 OH を引くと，$\vec{c}=(-1,\ 0,\ 1)$ より

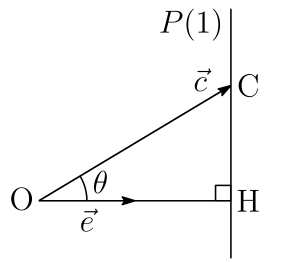
$$\vec{c}\cdot\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{6}}\{-1\cdot(-1)+0\cdot1+1\cdot2\}=\frac{3}{\sqrt{6}},$$
$$\mathrm{OH}=|\vec{c}\cdot\vec{e}|=\frac{3}{\sqrt{6}}$$

求める四角錐の体積は　$\dfrac{1}{3}S(1)\cdot\mathrm{OH}=\dfrac{1}{3}\sqrt{6}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{6}}=\mathbf{1}$

補足 右の図において

$$\vec{c}\cdot\vec{e}=|\vec{c}||\vec{e}|\cos\theta=|\vec{c}|\cos\theta,$$
$$\mathrm{OH}=|\vec{c}||\cos\theta|$$

ゆえに　　$\mathrm{OH}=|\vec{c}\cdot\vec{e}|$



例えば，$P(1)$ 上の位置ベクトル $-\vec{a}+\vec{c}=(-2,\ 1,\ 0)$ でもよい．

$$(-\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{6}}\{-2\cdot(-1)+1\cdot1+0\cdot2\}=\frac{3}{\sqrt{6}}$$

別解 $\vec{f}=-\vec{a}+\vec{c}$ とおくと $(\vec{d}=\vec{b}-\vec{c})$，$(*)$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{f}+s\vec{a}+t\vec{d}\quad(0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1)$$

$P(1)$ の頂点を $\mathrm{P}_0(\vec{f})$，$\mathrm{P}_1(\vec{f}+\vec{a})$，$\mathrm{P}_2(\vec{f}+\vec{d})$，$\mathrm{P}_3(\vec{f}+\vec{a}+\vec{d})$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{P_0O}}=-\vec{f},\quad \overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}=\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}=\vec{d}$$

四面体 $\mathrm{OP_0P_1P_2}$ の体積 V は，$\vec{a}\times\vec{d}=(-1,\ 1,\ 2)$，$-\vec{f}=(2,-1,\ 0)$ より

$$V=\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{d})\cdot(-\vec{f})\right|=\frac{1}{6}|(-1)\cdot2+1\cdot(-1)+2\cdot0|=\frac{1}{2}$$

よって，求める体積は　　$2V=2\times\dfrac{1}{2}=1$

ベクトル積

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積 (外積)** という．
2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のベクトル積は

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

であり，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

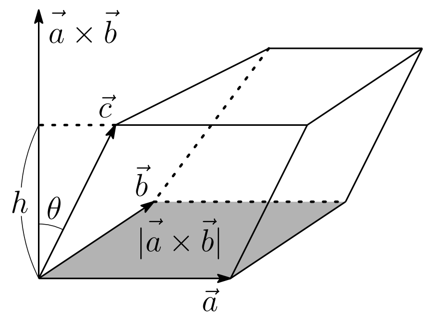
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

両辺の絶対値をとると

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は　$\boldsymbol{V=\dfrac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．■

2.7 2021 年度

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-2x-4$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ について，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標は

$$\frac{3}{2}x^2-2x-4=\frac{1}{2}x^2-x-2 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-2)=0$$

よって，2 つの共有点の x 座標は $(a>b)$ $\boldsymbol{a=2,\ b=-1}$

(2) $-1 \leqq x \leqq 2$ において

$$g(x)-f(x)=-(x^2-x-2)=-(x+1)(x-2) \geqq 0$$

よって $\quad S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\{g(x)-f(x)\}=\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$

(3) (1) の結果から $t>|2|$ かつ $t>|-1|$ すなわち $t>2$

$$S_1=\int_2^t\{f(x)-g(x)\}\,dx, \quad S_2=\int_{-t}^{-1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

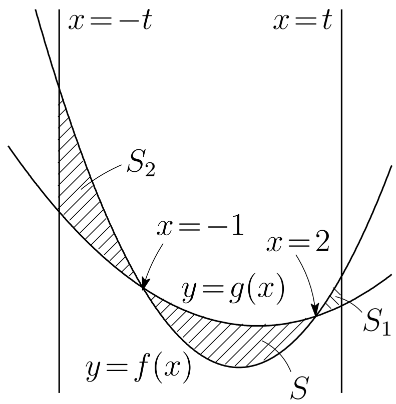
$h(x)=f(x)-g(x)=x^2-x-2$ とおくと

$$-S=\int_{-1}^{2}h(x)\,dx, \quad S_1=\int_2^t h(x)\,dx, \quad S_2=\int_{-t}^{-1}h(x)\,dx$$

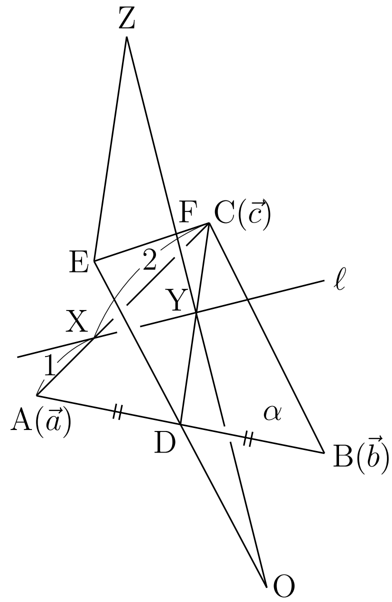
$S_1+S_2=S$ より，$S_2-S+S_1=0$ であるから

$$\begin{aligned}S_2-S+S_1&=\int_{-t}^{-1}h(x)\,dx+\int_{-1}^{2}h(x)\,dx+\int_2^t h(x)\,dx\\&=\int_{-t}^{t}h(x)\,dx=2\int_0^t(x^2-2)\,dx=2\left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_0^t\\&=2\left(\frac{t^3}{3}-2t\right)=\frac{2}{3}t(t^2-6)=0\end{aligned}$$

$t>2$ に注意してこれを解くと $\boldsymbol{t=\sqrt{6}}$



2 (1) ℓ 上の点について



$$\frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$
$$=\frac{2t}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}\quad\cdots(*)$$

このとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数の和は

$$\frac{2t}{3}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)=1$$

よって，ℓ は平面 α 上の点である．

(2) X は $(*)$ の $\vec{b}$ の係数が 0 となる点であるから

$$\frac{1}{3}-\frac{t}{3}=0\quad\text{すなわち}\quad t=1$$

に対応する点であるから　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{c}}{3}}$

(3) ℓ 上の点 Y について，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\dfrac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CY}}=\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})-\vec{c}$$
$$=\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{c})+\frac{t}{3}\{2(\vec{a}-\vec{c})-(\vec{b}-\vec{c})\}$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\frac{t}{3}(2\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}})=\frac{2t}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CY}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})$ と平行であるから

$$\frac{2t}{3}=\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\quad\text{これを解いて}\quad t=\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CY}}=\frac{2}{9}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})=\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\quad\text{すなわち}\quad \mathrm{CY}:\mathrm{YD}=4:5\quad\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ となる点 Z をとると，条件から

$$\triangle\mathrm{OYD}\backsim\triangle\mathrm{OZE},\quad \mathrm{YD}:\mathrm{ZE}=1:2\quad\cdots②$$

①，② および $\triangle\mathrm{CYF}\backsim\triangle\mathrm{EZF}$ より　$\mathrm{CF}:\mathrm{FE}=\mathrm{CY}:\mathrm{ZE}=2:5$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2+5}=\frac{5\vec{c}+2(\vec{a}+\vec{b})}{7}=\boldsymbol{\frac{1}{7}(2\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c})}$$

3 (1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ とおくと $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とすると

$$y - (t^3 - 2t^2 + t) = (3t^2 - 4t + 1)(x - t)$$

整理すると $\ell : y = (3t^2 - 4t + 1)x - 2t^3 + 2t^2$

C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x^3 - 2x^2 + x = (3t^2 - 4t + 1)x - 2t^3 + 2t^2$$

整理すると $(x - t)^2(x + 2t - 2) = 0$ ゆえに $x = t, -2t + 2$

したがって，C と ℓ の共有点で点 $(t,\ f(f))$ と異なる点は

$$(-2t + 2,\ f(-2t + 2)) \qquad (*)$$

点 $\mathrm{P}_1(2,\ f(2))$ のとき

$$\mathrm{P}_2(-2,\ f(-2)) \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{P_2(-2, -18)}$$

(2) ℓ_n は ℓ の方程式において，$t = a_n$ とすればよいから

$$\ell_n : y = (3{a_n}^2 - 4a_n + 1)x - 2{a_n}^3 + 2{a_n}^2$$

よって，ℓ_n の傾き $\boldsymbol{3{a_n}^2 - 4a_n + 1}$，$y$ 切片 $\boldsymbol{-2{a_n}^3 + 2{a_n}^2}$

(3) $\mathrm{P}_1(2,\ 2)$ および $(*)$ から，$a_1 = 2$

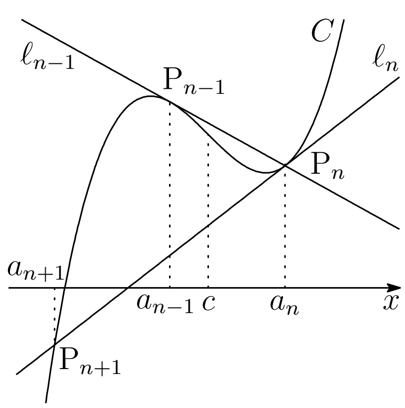
$$a_{n+1} = -2a_n + 2 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - \frac{2}{3} = -2\left(a_n - \frac{2}{3}\right)$$

したがって $a_n - \dfrac{2}{3} = \left(a_1 - \dfrac{2}{3}\right)(-2)^{n-1}$ よって $\boldsymbol{a_n = \dfrac{4}{3}(-2)^{n-1} + \dfrac{2}{3}}$

補足 3 次関数 $C : y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ f(a_n))$ における接線 ℓ_n とする．C と ℓ_n の共有点のうち，P_n と異なるものを $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ f(a_{n+1}))$ とし，C の変曲点の x 座標を c とすると

$$a_{n+1} - c = -2(a_n - c)$$

が成立する．



$\boxed{4}$ (1) $\begin{cases} x^3+2ax^2-a^2x-2a^3<0 \\ 3x^2-x<4a-12ax \end{cases}$

第 1 式から　$(x+2a)(x+a)(x-a)<0$

$a>1$ に注意して　$x<-2a,\ -a<x<a$　$\cdots$①

第 2 式から　$(x+4a)(3x-1)<0$

$a>1$ に注意して　$-4a<x<\dfrac{1}{3}$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて

$$\boldsymbol{-4a<x<-2a,\ -a<x<\frac{1}{3}}$$

(2) $m(a)$ を

$$-\frac{1}{3}<x<a,\ 2a<x<4a$$

に含まれる整数の個数として求めてもよい．集合 $P,\ Q$ を

$$P=\{x\,|\,0\leqq x<a,\ x\text{ は整数}\}$$
$$Q=\{x\,|\,2a<x<4a,\ x\text{ は整数}\}$$

とし，集合 $P,\ Q$ の要素の個数をそれぞれ $n(P),\ n(Q)$ とおくと

$$m(a)=n(P)+n(Q)$$

$[a]$ を a 以下の最大の整数とすると

$$(*)\quad n(P)=\begin{cases} [a] & (a\text{ が整数}) \\ [a]+1 & (a\text{ が整数でない}) \end{cases}$$

$s=a-[a]$ とおくと，$a=[a]+s$ より

$$Q=\{x\,|\,2[a]+2s<x<4[a]+4s,\ x\text{ は整数}\}$$

(i) $s=0$ のとき

$$Q=\{x\,|\,2[a]+1\leqq x\leqq 4[a]-1,\ x\text{ は整数}\}$$
$$n(Q)=4[a]-1-(2[a]+1)+1=2[a]-1$$

(ii) $0<s\leqq\dfrac{1}{4}$ のとき

$$Q=\{x\,|\,2[a]+1\leqq x\leqq 4[a],\ x\text{ は整数}\}$$
$$n(Q)=4[a]-(2[a]+1)+1=2[a]$$

(iii) $\dfrac{1}{4} < s < \dfrac{1}{2}$ のとき

$$Q = \{x \mid 2[a]+1 \leqq x \leqq 4[a]+1,\ x \text{ は整数}\}$$
$$n(Q) = 4[a]+1-(2[a]+1)+1 = 2[a]+1$$

(iv) $s = \dfrac{1}{2}$ のとき

$$Q = \{x \mid 2[a]+2 \leqq x \leqq 4[a]+1,\ x \text{ は整数}\}$$
$$n(Q) = 4[a]+1-(2[a]+2)+1 = 2[a]$$

(v) $\dfrac{1}{2} < s \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき

$$Q = \{x \mid 2[a]+2 \leqq x \leqq 4[a]+2,\ x \text{ は整数}\}$$
$$n(Q) = 4[a]+2-(2[a]+2)+1 = 2[a]+1$$

(vi) $\dfrac{3}{4} < s < 1$ のとき

$$Q = \{x \mid 2[a]+2 \leqq x \leqq 4[a]+3,\ x \text{ は整数}\}$$
$$n(Q) = 4[a]+3-(2[a]+2)+1 = 2[a]+2$$

$(*)$ および (i)〜(vi) から

$$(**)\quad m(a) = \begin{cases} 3[a]-1 & (s=0) \\ 3[a]+1 & (0 < s \leqq \frac{1}{4},\ s = \frac{1}{2}) \\ 3[a]+2 & (\frac{1}{4} < s < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < s \leqq \frac{3}{4}) \\ 3[a]+3 & (\frac{3}{4} < s < 1) \end{cases}$$

$a > 2$ より，$2 < a \leqq \dfrac{9}{4}$, $a = \dfrac{5}{2}$ のとき，$m(a)$ は最小値 **7** をとる.

(3) $m(a) = 4$ となるのは，$(**)$ より

$$3[a]+1 = 4,\quad 0 < s \leqq \frac{1}{4},\ s = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{1 < a \leqq \frac{5}{4},\ a = \frac{3}{2}}$$