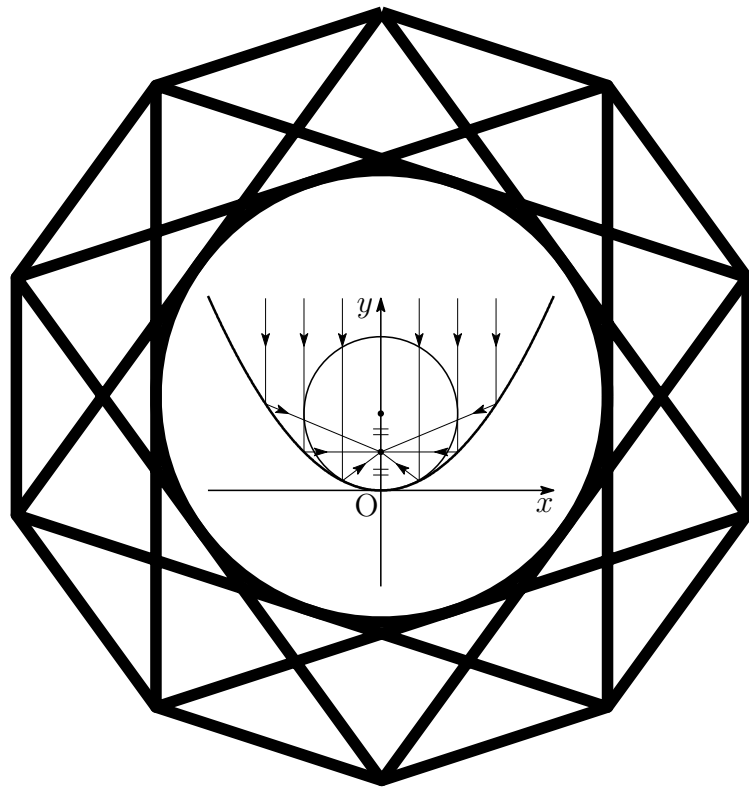


入試の軌跡

熊本大学 文系

2015 - 2020

数 学



2020 年 10 月 13 日

Typed by L^AT_EX 2_ε

序

本書は、熊本大学教育学部および医学部(保健学科看護学専攻)受験者のための入試問題集である。本書には、平成27年(2015年)度から令和2年(2020年)度までの2次試験前期日程の問題(現行課程)をすべて掲載した。

また、平成9年(1997年)度から令和2年(2020年)度までの年度ごとの問題および解答については、次のサイトに掲載している。

<http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html>

本書の編集にあたり、以下の点に留意した。

1. 本書は、電子文書(PDF)での利用を想定し、問題と解答を相互にハイパーリンクを施した(内部リンクは青、外部リンクは赤)。
2. 本書は、ICT授業を想定し、スクリーンは、全画面表示(**[Ctrl]+L**)および描画領域に合わせる(**[Ctrl]+3**)と見やすくなる。ページスクロールには、(**[Ctrl]+▲**、**[Ctrl]+▼**)が利用でき、リンク(ジャンプ)先から戻る(**[Alt]+◀**)、進む(**[Alt]+▶**)も利用できる。なお、全画面表示を解除するには**[ESC]**。
3. 平成13年(2001年)度から平成26年(2014年)度までの旧課程の一般前期試験問題をまとめた『入試の軌跡 熊本大学 文系 数学』は、次である。

http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_kiseki_bun.pdf

4. また、本書の姉妹版である『入試の軌跡 熊本大学 英語』も次のサイトに掲載しており、併せて活用いただけることを切に願うものである。

<http://kumamoto.s12.xrea.com/lis.html>

令和2年5月 編者

目次

序	i
第 1 章 一般前期問題	1
1.1 2015 年度	5
1.2 2016 年度	7
1.3 2017 年度	9
1.4 2018 年度	11
1.5 2019 年度	13
1.6 2020 年度	15
第 2 章 一般前期解答	17
2.1 2015 年度	18
2.2 2016 年度	22
2.3 2017 年度	26
2.4 2018 年度	31
2.5 2019 年度	36
2.6 2020 年度	42

第 1 章 一般前期問題

数学の試験時間は 120 分で、数学 I・II・III・A・B の範囲から 4 題出題され問題冊子 (A4 で 4 ページ) は、見開きで ①, ② が偶数ページ, ③, ④ が奇数ページに配置されている。解答用紙は、① ~ ④ の番号が書かれた A3 用紙 (4 枚) と白紙 (計算用紙) がはさみ込まれている。なお、解答用紙以外は持ち帰ることができる。

一般前期試験における文系数学の出題範囲は「数学 I・II・A・B」であるが、過去 10 年の出題傾向をみると、数学 II の「微分法と積分法」は毎年出題されており、数学 B の「ベクトル」と「数列」については少なくとも 1 題は出題されている。近年では、2013 年, 2015 年, 2017 年, 2020 年には、「空間ベクトル」と「数列」の両分野から出題されている。「ベクトル」は過去 7 回出題された中の 6 回が「空間ベクトル」で、近年、6 回連続で「空間ベクトル」からの出題となっている。つまり、「微分法と積分法」, 「空間ベクトル」, 「数列」の 3 分野から毎年 4 題中 2, 3 題が出題されている。

現行課程へ完全移行に伴い、この間、6 年連続で数学 B の「数列」の分野から出題されていることにも注意したい。

出題分野は限られているが、文系数学としては発想力や計算力を要求される問題が中心で、問題演習を重ねていくことが大切なようだ。

出題分野

2015年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	やや難	数学II	積分法	放物線と面積
2	標準	数学B	空間のベクトル	平面と直線
3	標準	数学B	数列	数列の図形への応用
4	標準	数学II	微分法	3次方程式の実数解の個数

2016年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学I	図形と計量	余弦定理, 面積
2	標準	数学I	データの分析	中央値・平均値
		数学A	場合の数と確率	データの分析の確率への応用
3	標準	数学A	整数の性質	4で割った余り
		数学B	数列	総和計算の応用
4	標準	数学II	微分法と積分法	定積分の上端 x による微分

2017年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学B	空間のベクトル	内積・球面の方程式
2	やや難	数学A	場合の数と確率	復元試行による条件付き確率
3	標準	数学B	数列	グラフの接線を用いた融合問題
4	やや難	数学II	微分法と積分法	グラフの接線, 面積

2018年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学II	微分法	3次方程式の実数解
2	標準	数学II	三角関数	加法定理の図形への応用
3	やや難	数学A	場合の数と確率	サイコロを転がす確率
4	標準	数学B	数列	S_n を用いた漸化式

2019年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学B	数列	分数漸化式
2	標準	数学A	場合の数と確率	サイコロの目と条件式
3	標準	数学II	微分法と積分法	放物線と直線, 面積, 共有点の個数
4	標準	数学II	図形と方程式	軌跡の方程式

2020年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学Ⅱ	三角関数	最大値・最小値
2	標準	数学Ⅱ	微分法と積分法	関数の決定, 面積
3	標準	数学B	数列	格子点の個数
4	標準	数学B	空間のベクトル	四角錐の体積

出題分野 (2011-2020)

		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式		1								
	2次関数										
	図形と計量	1					1				
	データの分析						2				
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式									4	
	三角関数								2		1
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	3	3・4	2	2・3・4	1・4	4	4	1	3	2
A	場合の数と確率						2	2	3	2	
	整数の性質	2		1			3				
	図形の性質										
B	平面上のベクトル										
	空間のベクトル	4		3	1	2		1			4
	数列		2	4		3	3	3	4	1	3
	確率分布と統計										

数字は問題番号

1.1 2015 年度

1 a を実数とする。曲線 $C_1 : y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線を l とする。曲線 C_2 を $y = x^2 - 1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) l と C_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とする。曲線 $C_3 : y = -x^2 + 1$ と C_2 とで囲まれた部分は l によって 2 つの部分に分けられる。これらのうち、点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を含む部分の面積を求めよ。

2 座標空間内の 3 点 $A(1, 1, 1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(1, 2, 0)$ を含む平面を H とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 $P(-3, 2, 2)$ は H 上の点であることを示せ。

(2) 点 $Q(1, -3, -4)$ を通る直線が H と直交するとき、その交点の座標を求めよ。

- 3 $\triangle ABC$ において、 $\angle B$ と $\angle C$ は鋭角とする。点Aを通り辺BCに直交する直線を引き、辺BCとの交点を X_1 とし、線分 AX_1 の長さを1とする。また、 $BX_1 = 1$ 、 $CX_1 = 8$ とする。各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して以下の操作を行う。

辺BC上の点 X_n を通り辺ACに平行な直線を引き、辺ABとの交点を Y_n とする。また、点 Y_n を通り辺BCに平行な直線を引き、辺ACとの交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺BCに直交する直線を引き、辺BCとの交点を X_{n+1} とする。

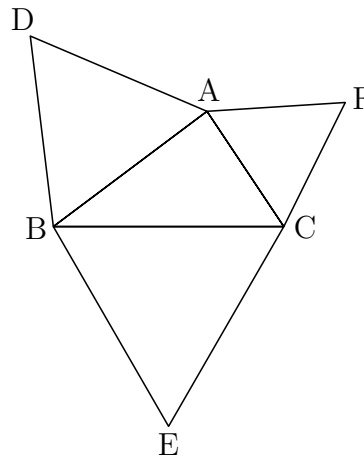
線分 $Z_n X_{n+1}$ の長さを l_n とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) l_1 を求めよ。
 - (2) l_{n+1} を l_n を用いて表せ。
 - (3) 数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ。
- 4 $f(x)$ は x の3次多項式とし、 x^3 の係数は1、定数項は0とする。2つの異なる実数 α, β に対して $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ が満たされているとする。以下の問いに答えよ。
- (1) $f(\alpha), f(\beta)$ を α, β を用いて表せ。
 - (2) 不等式 $\alpha < \beta < 3\alpha$ が成り立つとき、3次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数を求めよ。

1.2 2016 年度

1 下図のように、 $\triangle ABC$ の外部に 3 点 D, E, F を $\triangle ABD, \triangle BCE, \triangle CAF$ がそれぞれ正三角形になるようにとる。 $\triangle ABC$ の面積を S 、3 辺の長さを $BC = a, CA = b, AB = c$ とおくと、以下の問いに答えよ。

- (1) $\angle BAC = \theta$ とおくと、 $\sin \theta$ を b, c, S を用いて、 $\cos \theta$ を a, b, c を用いて表せ。
- (2) DC^2 を a, b, c, S を用いて表し、 $DC^2 = EA^2 = FB^2$ が成り立つことを示せ。
- (3) 3 つの正三角形の面積の平均を T とおくと、 DC^2 を S と T を用いて表せ。



2 1 つのさいころを 3 回投げる。1 回目に出る目の数、2 回目に出る目の数、3 回目に出る目の数をそれぞれ X_1, X_2, X_3 とし、5 つの数

$$2, 5, 2 - X_1, 5 + X_2, X_3$$

からなるデータを考える。以下の問いに答えよ。

- (1) データの範囲が 7 以下である確率を求めよ。
- (2) X_3 がデータの中央値に等しい確率を求めよ。
- (3) X_3 がデータの平均値に等しい確率を求めよ。
- (4) データの中央値と平均値が一致するとき、 X_3 が中央値に等しい条件付き確率を求めよ。

3 自然数 a に対して

$$S(a) = \sum_{k=1}^a \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 和 $S(a)$ を求めよ。
- (2) $S(a)$ が整数となる自然数 a を小さい順に並べた数列を

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

とする。一般項 a_n を求めよ。

- (3) (2) の数列 $\{a_n\}$ について、 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を 4 で割った余りは 0 か 3 であることを示せ。
- (4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と自然数 N に対して和 $\sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n}$ を求めよ。

4 2次関数 $f(x)$ に対して

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

とおく。 a を正の数とし、 $F(x)$ が $x = a$ と $x = -a$ で極値をとるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) すべての x について $F(-x) = -F(x)$ が成り立つことを示せ。
- (2) $F(x) + F(a) = 0$ を満たす x をすべて求めよ。
- (3) 関数 $\frac{F(x)}{F'(0)}$ の極大値を求めよ。

1.3 2017年度

- 1** 原点を O とする座標空間内に 3 点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある。ただし, $c > 0$ とする。 $\angle BAC = \theta$ とし, $\triangle ABC$ の面積を S とするとき, 以下の問いに答えよ。
- (1) $\cos \theta$, $\sin \theta$ を c を用いて表せ。
 - (2) 点 O を中心とする半径 1 の球面上の点を H とする。ベクトル \vec{HA} , \vec{HB} , \vec{HC} がいずれもベクトル \vec{OH} に垂直であるとき, c の値を求めよ。
 - (3) (2) の条件のもとで, 面積 S を求めよ。
- 2** n は 5 以上の自然数とする。赤玉 3 個と白玉 7 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し, 色を確認してからもとに戻すという試行を n 回行う。以下の問いに答えよ。
- (1) n 回目に 3 度目の赤玉が出る確率を求めよ。
 - (2) 2 度以上連続することなく 3 度赤玉が出る確率を求めよ。
 - (3) n 回目に 3 度目の赤玉が出たとき, 2 度以上連続することなく 3 度赤玉が出ている条件付き確率を求めよ。

3 $f(x) = x^2 + x$ とし、数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$a_1 = 8$ とする。 a_n ($n \geq 1$) に対して、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a_n^2, f(a_n^2))$ における接線と直線 $y = x$ との交点の x 座標を a_{n+1} とする。ただし、 a_n^2 は a_n の 2 乗を表す。

以下の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対し、 $a_n > 0$ が成り立つことを示せ。
- (2) $b_n = \log_2 a_n$ とおくと、 b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

4 t は 0 でない実数とする。座標平面上の曲線 $C_1 : y = (x - t)^2 + 2t^3 - t^2$ と曲線 $C_2 : y = 2x^3 - x^2$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点が 2 個になるような t を求めよ。
- (2) t を (1) で求めた値とし、曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点を A, B とする。ただし、点 A の x 座標は、点 B の x 座標より小さいとする。このとき、点 A, B における曲線 C_2 の接線 ℓ_A, ℓ_B と曲線 C_1 で囲まれた部分の面積を求めよ。

1.4 2018年度

- 1** p, q を整数とする。関数 $f(x) = x^3 - px^2 + (p^2 - 2p)x + q$ について、以下の問いに答えよ。
- (1) $f(x)$ が極値をもつときの整数 p の値をすべて求めよ。
 - (2) 方程式 $f(x) = 0$ が負の解1つと相異なる正の解2つをもつとき、整数 p, q の値を求めよ。
- 2** 正三角形 ABC が半径1の円に内接しているとする。P は点 A, B と異なる点で、A, B を両端とし点 C を含まない弧の上を動くものとする。以下の問いに答えよ。
- (1) $\angle PBA = \theta$ とおくとき、PA, PB, PC をそれぞれ θ を用いて表せ。また、 $PA + PB + PC$ の最大値を求めよ。
 - (2) $PA^2 + PB^2 + PC^2$ を求めよ。

3 m, n を整数とする。 xy 平面上の 4 点 $(m, n), (m-1, n), (m-1, n-1), (m, n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し、裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし、さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

- (1) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある確率を求めよ。
- (2) 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で、硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。
- (3) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころの 1 の目が上にある確率を求めよ。

4 初項が 1 である数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおく。 $\{S_n\}$ が

$$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n \quad (n \geq 1)$$

をみたすとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 a_{n+1} を a_n と n を用いて表せ。
- (3) $n \geq 2$ のとき、 a_n を n の式で表せ。

1.5 2019 年度

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n に対して $a_n \neq 2$ を示せ。
- (2) $b_n = \frac{3}{a_n - 2} + 1$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (4) $a_n > \frac{5}{2}$ を満たす自然数 n を求めよ。

2 1 個のさいころを投げて、出た目の数を a とする。 a が偶数のときは $b = \frac{1}{2}a$, a が奇数のときは $b = \frac{1}{2}(a + 3)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $a > b$ となる確率を求めよ。
- (2) $\sin \frac{\pi}{5} > 0.5$ および $\cos \frac{\pi}{5} < 0.9$ を示せ。
- (3) $S = \cos \frac{\pi}{a} + \sin \frac{\pi}{b}$ とおく。 $a > b$ であるとき、 $S < 1.7$ となる条件付き確率を求めよ。

3 以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 a, b に対して, $f(x) = x^2 + ax + b$ とおく。 $y = f(x)$ は x 軸および直線 $y = 2x + 3$ に接しているとする。実数 a, b を求めよ。このとき, $y = f(x)$, x 軸および直線 $y = 2x + 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (2) 座標平面上の曲線 $C_1 : y = x^2 + 2px - 2p$ および $C_2 : y = x^3$ の共有点がちょうど2個になるような実数 p の値をすべて求めよ。

4 座標平面上の直線 l を $y = ax - a - 2$, 直線 m を $y = bx + 3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし, a, b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。
- (2) 点 $A(1, -2)$, 点 $B(-3, 0)$ に対して, 線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。
- (3) $\triangle APB$ の面積が最大となるときの a の値を求めよ。

1.6 2020 年度

1 a を定数とし, $y = (\sin \theta + a)(\cos \theta + a)$ とする。ただし, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とするとき, y を a と t を用いて表せ。
- (2) t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) y の最大値と最小値を a を用いて表せ。

2 $a < b < c$ を満たす実数 a, c と整数 b に対し, $g(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ とする。また, $f(x) = g(x) - g'(x)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(a) < 0, f(b) > 0, f(c) < 0$ となることを示せ。
- (2) $f(x) = (x + 1)(x^2 - 4x + 2)$ のとき, a, b, c の値を求めよ。
- (3) (2) で求めた a, b, c から定まる曲線 $y = g(x)$ と $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

3 xy 平面において、 x, y がともに整数であるとき、点 (x, y) を格子点とよぶ。 n を自然数とすると、3 直線 $y = \frac{2}{3}x + \frac{n}{3}$, $y = x - n$, $x = n$ で囲まれた図形を D_n とする。また、 D_n の周上および内部の格子点の個数を L_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) L_3 を求めよ。
- (2) k を 0 以上の整数とする。直線 $l: x = n + 3k$ が D_n と交わる時、 D_n の周上および内部の格子点で l 上にあるものの個数を n と k を用いて表せ。
- (3) L_n を n を用いて表せ。

4 k, s, t を実数とする。座標空間に原点 O , $A(1, -1, 1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(-1, 0, k)$ の 4 点をとる。 $\overrightarrow{OD} = (1-s)\overrightarrow{OA}$ で定まる点を D , $\overrightarrow{OE} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OC}$ で定まる点を E とし、 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{DE}$ により定まる点を P とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標を k, s, t を用いて表せ。
- (2) 点 P が $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ を満たしながら動くとき、点 P が動いてできる平行四辺形を $P(k)$ とし、その面積を $S(k)$ とする。 k が実数全体を動くとき、 $S(k)$ の最小値と、そのときの k の値を求めよ。
- (3) (2) で求めた k に対し、平行四辺形 $P(k)$ を底面とし、点 O を頂点とする四角錐の体積を求めよ。

第 2 章 一般前期解答

熊大入試の特徴として、文系数学でも計算力を要求する問題が目立つ。特に「微分法と積分法」の分野の問題には煩雑な計算に陥る受験生も少なくないと思われる。

積分の分野の公式として、次の公式があるが、2010年、2012年、2014年、2017年、2019年の試験問題では、これを利用した方が効率的である。

$$1 \quad \int (x+k)^n dx = \frac{1}{n+1}(x+k)^{n+1} + C \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$2 \quad \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

定積分の代表的な公式に、次の公式があるが、2013年、2015年の試験問題では、これを利用した方が煩雑な計算をせずに、正解を導くことができる。

$$3 \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$4 \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

上の1, 2, 4の積分公式は数学IIIの内容であるが、熊大は公式の使用に関しては寛容である。中には、空間ベクトルの問題で大学で学ぶ外積¹(ベクトル積)を使用した受験生もいたが、間違いではないということで減点はされなかったそうである。

2019年に出题された分数漸化式に代表される定型問題など、すでに触れたことのある受験生にとっては安心して解くことができたものと思われる。こうしたパターン化した問題は、微分法と積分法、ベクトル、数列の分野を中心に出题されている。

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_ri_2018.pdf (p.3を参照)

2.1 2015年度

1 (1) $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$

C_1 上の点 (a, a^2) における接線 l の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2$$

l と $C_2: y = x^2 - 1$ の共有点の x 座標は

$$2ax - a^2 = x^2 - 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = a \pm 1$$

求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{a-1}^{a+1} \{(2ax - a^2) - (x^2 - 1)\} dx &= - \int_{a-1}^{a+1} (x - a + 1)(x - a - 1) dx \\ &= - \left(-\frac{1}{6}\right) \{(a+1) - (a-1)\}^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

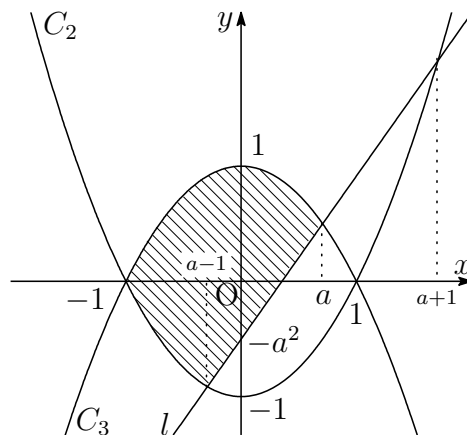
(2) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, l の方程式は

$$l: y = \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$$

l と C_3 の共有点の x 座標は

$$\sqrt{2}x - \frac{1}{2} = -x^2 + 1$$

ゆえに $x = \frac{1}{\sqrt{2}} (= a), -\frac{3}{\sqrt{2}}$



$f(x) = -x^2 + 1$ とし, $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x$ とする.

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{-1}^{a-1} f(x) dx + \int_{a-1}^a \{f(x) - (2ax - a^2)\} dx \\ &= 2 \left[F(x) \right]_{-1}^{a-1} + \left[F(x) \right]_{a-1}^a + \left[-ax^2 + a^2x \right]_{a-1}^a \\ &= F(a) + F(a-1) - 2F(-1) - a^2 + a \\ &= -\frac{1}{3}a^3 + a - \frac{1}{3}(a-1)^3 + a - 1 - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - a^2 + a \\ &= -\frac{2}{3}a^3 + 2a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

このとき, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから $S = \frac{5\sqrt{2} + 4}{6}$ ■

- 2** (1) $A(1, 1, 1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(1, 2, 0)$, $P(-3, 2, 2)$ から

$$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, -1), \quad \overrightarrow{AP} = (-4, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC} \text{ とおくと } (\alpha, \beta \text{ は実数})$$

$$(-4, 1, 1) = \alpha(2, -1, 0) + \beta(0, 1, -1)$$

$$\text{したがって} \quad 2\alpha = -4, \quad -\alpha + \beta = 1, \quad -\beta = 1$$

$$\text{これを解いて} \quad \alpha = -2, \quad \beta = -1$$

ゆえに $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ よって、点 P は平面 H 上の点である。

- (2) 平面 H を媒介変数 s, t を用いて表すと

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ &= (1, 1, 1) + s(2, -1, 0) + t(0, 1, -1) \\ &= (1 + 2s, 1 - s + t, 1 - t) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, -1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (1, 2, 2)$$

とおく。 Q を通り \vec{n} に平行な直線を媒介変数 k を用いて表すと

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (1, -3, -4) + k(1, 2, 2) \\ &= (1 + k, -3 + 2k, -4 + 2k) \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

求める交点 (x, y, z) は、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2s = 1 + k \\ y &= 1 - s + t = -3 + 2k \\ z &= 1 - t = -4 + 2k \end{aligned}$$

$$\text{これを解いて} \quad s = 1, \quad t = 1, \quad k = 2, \quad x = 3, \quad y = 1, \quad z = 0$$

よって、求める交点は $(3, 1, 0)$ ■

- 3 (1) 座標平面上に点 $A(0, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(8, 0)$, $X_n(x_n, 0)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) をとる. 直線 AB の方程式は

$$y = x + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

直線 AC の方程式は

$$y = -\frac{1}{8}x + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

直線 X_nY_n は点 $(x_n, 0)$ を通り, 傾き $-\frac{1}{8}$ の直線であるから

$$y = -\frac{1}{8}(x - x_n) \quad \dots \textcircled{3}$$

点 Y_n の y 座標 l_n は, ①, ③ を解いて $l_n = \frac{1 + x_n}{9} \quad \dots \textcircled{4}$

このとき, $x_1 = 0$ であるから $l_1 = \frac{1}{9}$

- (2) 点 Z_n の y 座標が l_n であるから, その x 座標は, ② より

$$l_n = -\frac{x}{8} + 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = 8(1 - l_n)$$

これが点 X_{n+1} の x 座標であるから $x_{n+1} = 8(1 - l_n)$

したがって, 上式および④から

$$l_{n+1} = \frac{1 + x_{n+1}}{9} = \frac{1 + 8(1 - l_n)}{9} = -\frac{8}{9}l_n + 1$$

- (3) (1), (2) の結果から $l_{n+1} = -\frac{8}{9}l_n + 1 \quad \dots \textcircled{1}$, $l_1 = \frac{1}{9}$

ここで, 定数 c を

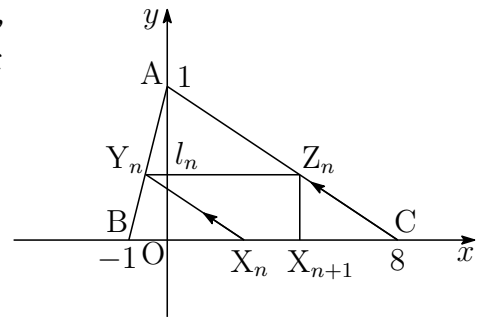
$$c = -\frac{8}{9}c + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

とおくと, ①, ②から

$$l_{n+1} - c = -\frac{8}{9}(l_n - c) \quad \text{ゆえに} \quad l_n - c = (l_1 - c) \left(-\frac{8}{9}\right)^{n-1}$$

$$\textcircled{2} \text{ を解いて} \quad c = \frac{9}{17} \quad \text{また} \quad l_1 - c = \frac{1}{9} - \frac{9}{17} = -\frac{64}{153}$$

$$\text{よって} \quad l_n = \frac{9}{17} - \frac{64}{153} \left(-\frac{8}{9}\right)^{n-1} = \frac{9}{17} + \frac{8}{17} \left(-\frac{8}{9}\right)^n$$



■

- 4 (1) x の3次式 $f(x)$ の x^3 の係数が1, $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ であるから

$$f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta) = 3x^2 - 3(\alpha + \beta)x + 3\alpha\beta$$

また, $f(x)$ の定数項は0であるから

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)x^2 + 3\alpha\beta x$$

したがって

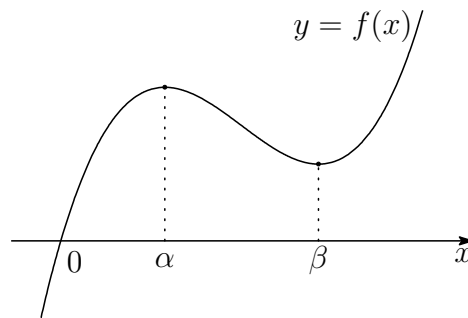
$$f(\alpha) = \alpha^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)\alpha^2 + 3\alpha^2\beta = \frac{\alpha^2(3\beta - \alpha)}{2}$$

$$f(\beta) = \beta^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)\beta^2 + 3\alpha\beta^2 = \frac{\beta^2(3\alpha - \beta)}{2}$$

- (2) $f(x)$ の増減表は

x	...	α	...	β	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	$f(\alpha)$	\searrow	$f(\beta)$	\nearrow

$\alpha < \beta < 3\alpha$ より, $0 < \alpha < \beta$, $3\alpha - \beta > 0$ であるから, $f(\beta) > 0$ したがって, $y = f(x)$ のグラフの概形は, 次のようになる.



よって, $y = f(x)$ および $y = -1$ のグラフから, 3次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数は1個. ■

2.2 2016年度

1 (1) 面積の公式から $S = \frac{1}{2}bc \sin \theta$ ゆえに $\sin \theta = \frac{2S}{bc}$

余弦定理により $\cos \theta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

(2) $\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると, (1) の結果により

$$\begin{aligned} DC^2 &= CA^2 + AD^2 - 2CA \cdot AD \cos(\theta + 60^\circ) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc(\cos \theta \cos 60^\circ - \sin \theta \sin 60^\circ) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2S}{bc} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}S \quad \dots (*) \end{aligned}$$

(*) は, a, b, c に関する対称式であるから $DC^2 = EA^2 = FB^2$

(3) $T = \frac{1}{3}(\triangle BCE + \triangle CAF + \triangle ABD)$ であるから

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2}b^2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2}c^2 \sin 60^\circ \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

ゆえに $a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}T$

これを (*) に代入すると

$$DC^2 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3}T + 2\sqrt{3}S = 2\sqrt{3}(S + T)$$

■

2 (1) 5つのデータの最大値と最小値はそれぞれ $5 + X_2, 2 - X_1$ であるから, データの範囲は

$$(5 + X_2) - (2 - X_1) = X_1 + X_2 + 3$$

これが7以下であるから

$$X_1 + X_2 + 3 \leq 7 \quad \text{ゆえに} \quad X_1 + X_2 \leq 4$$

これを満たす (X_1, X_2) の組は, 次の6通り.

$$(X_1, X_2) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$$

このとき, X_3 は, 1~6の6通りであるから, 求める確率は

$$\frac{6 \times 6}{6^3} = \frac{1}{6}$$

(2) $2 - X_1 < 2 < 5 < 5 + X_2$ であるから, X_3 がデータの中央値であるとき

$$2 \leq X_3 \leq 5 \quad \text{これを満たす } X_3 \text{ は 4 通り}$$

このとき, X_1, X_2 は, ともに 1~6 の 6 通りであるから, 求める確率は

$$\frac{4 \times 6 \times 6}{6^3} = \frac{2}{3}$$

(3) 条件から
$$X_3 = \frac{2 + 5 + (2 - X_1) + (5 + X_2) + X_3}{5}$$

整理すると
$$4(X_3 - 3) = X_2 - X_1 + 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

このとき, $1 \leq X_1 \leq 6, 1 \leq X_2 \leq 6$ であるから

$$-3 \leq X_2 - X_1 + 2 \leq 7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より, $X_2 - X_1 + 2 = 0, 4$ であるから

$$X_2 = X_1 - 2 \quad (X_1 = 3, 4, 5, 6) \text{ のとき } X_3 = 3$$

$$X_2 = X_1 + 2 \quad (X_1 = 1, 2, 3, 4) \text{ のとき } X_3 = 4$$

よって, 求める確率は
$$\frac{4 + 4}{6^3} = \frac{1}{27}$$

(4) $2 - X_1 < 2 < 5 < 5 + X_2$ より, 中央値は 2, 5, X_3 のいずれかである.

i) 中央値が 2 のとき

$$\frac{2 + 5 + (2 - X_1) + (5 + X_2) + X_3}{5} = 2 \quad \text{ゆえに } X_1 = X_2 + X_3 + 4$$

このとき $(X_1, X_2, X_3) = (6, 1, 1)$ の 1 通り

ii) 中央値が 5 のとき

$$\frac{2 + 5 + (2 - X_1) + (5 + X_2) + X_3}{5} = 5 \quad \text{ゆえに } X_1 + 11 = X_2 + X_3$$

このとき $(X_1, X_2, X_3) = (1, 6, 6)$ の 1 通り

iii) 中央値が X_3 のとき, (3) の結果より 8 通り

i)~iii) から, 求める条件付き確率は
$$\frac{\frac{8}{6^3}}{\frac{1+1+8}{6^3}} = \frac{4}{5} \quad \blacksquare$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \sum_{k=1}^a \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^a (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{a+1} - 1$$

(2) $S(a)$ が整数 $n \geq 1$ に等しいとき, (1) の結果から

$$\sqrt{a+1} - 1 = n \quad \text{ゆえに} \quad a = n(n+2)$$

よって, 求める数列の一般項は $a_n = n(n+2)$

(3) $n = 2m - 1$ のとき (m は整数)

$$\begin{aligned} a_n &= (2m-1)\{(2m-1)+2\} = (2m-1)(2m+1) \\ &= 4m^2 - 1 = 4(m^2 - 1) + 3 \end{aligned}$$

$n = 2m$ のとき (m は整数)

$$a_n = 2m(2m+2) = 4m(m+1)$$

よって, a_n を 4 で割った余りは 0 か 3 である.

(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) \\ &= \frac{N(3N+5)}{4(N+1)(N+2)} \end{aligned}$$

■

- 4 (1) $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ を x で微分すると $F'(x) = f(x)$
 条件より, $F(x)$ は $x = \pm a$ で極値をとるから

$$F'(\pm a) = 0 \quad \text{すなわち} \quad f(\pm a) = 0$$

2次関数 $f(x)$ は, $x + a$, $x - a$ を因数にもつから, 定数 $k \neq 0$ を用いて

$$f(x) = k(x + a)(x - a) = k(x^2 - a^2)$$

とおける. したがって

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^x k(t^2 - a^2) dt \\ &= k \left[\frac{t^3}{3} - a^2 t \right]_0^x = k \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x \right) \quad \dots (*) \end{aligned}$$

$$\text{このとき} \quad F(-x) = k \left\{ \frac{(-x)^3}{3} - a^2(-x) \right\} = -k \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x \right) = -F(x)$$

$$(2) (*) \text{ より } F(a) = -\frac{2}{3}ka^3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$F(x) + F(a) = 0 \text{ のとき } \quad k \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x \right) - \frac{2}{3}ka^3 = 0$$

$k \neq 0$ であるから, これを整理すると

$$x^3 - 3a^2x - 2a^3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x + a)^2(x - 2a) = 0$$

よって, 求める x は $x = -a, 2a$

$$(3) F'(0) = f(0) \text{ より } F'(0) = -ka^2$$

$$g(x) = \frac{F(x)}{F'(0)} \text{ とおくと } g(x) = -\frac{F(x)}{ka^2}. \text{ これを微分すると}$$

$$g'(x) = -\frac{F'(x)}{ka^2} = -\frac{f(x)}{ka^2} = -\frac{k(x + a)(x - a)}{ka^2} = -\frac{1}{a^2}(x + a)(x - a)$$

このとき, $g(x)$ の増減表は

x	\dots	$-a$	\dots	a	\dots
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	\searrow	極小	\nearrow	極大	\searrow

よって, 求める極大値は, ①により

$$g(a) = -\frac{F(a)}{ka^2} = -\frac{-\frac{2}{3}ka^3}{ka^2} = \frac{2}{3}a$$



2.3 2017年度

- 1 (1) A(2, 0, 0), B(0, 4, 0), C(0, 0, c) より

$$\vec{AB} = (-2, 4, 0), \quad \vec{AC} = (-2, 0, c)$$

2つのベクトル \vec{AB} , \vec{AC} のなす角が θ であるから

$$\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{4}{2\sqrt{5}\sqrt{c^2+4}} = \frac{2}{\sqrt{5(c^2+4)}}$$

また, $\sin \theta > 0$ であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{4}{5(c^2+4)}} = \sqrt{\frac{5c^2+16}{5(c^2+4)}}$$

- (2) H(x, y, z) とおくと, H は原点 O を中心とする半径 1 の球面上の点であるから

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$\vec{HA} = (2-x, -y, -z)$, $\vec{HB} = (-x, 4-y, -z)$, $\vec{HC} = (-x, -y, c-z)$ がいずれも $\vec{OH} = (x, y, z)$ に垂直であるから

$$(2-x)x - y^2 - z^2 = 0$$

$$-x^2 + (4-y)y - z^2 = 0$$

$$-x^2 - y^2 + (c-z)z = 0$$

① に注意してこれらを整理すると

$$2x = 1, \quad 4y = 1, \quad cz = 1$$

上の3式から, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$, $z = \frac{1}{c}$ を ① に代入して

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{c^2} = 1$$

$c > 0$ に注意してこれを解くと $c = \frac{4}{\sqrt{11}}$

- (3) (1) の結果から

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{c^2+4} \times \sqrt{\frac{5c^2+16}{5(c^2+4)}} = \sqrt{5c^2+16}$$

これに (2) の結果を代入すると

$$S = \sqrt{5 \times \frac{16}{11} + 16} = \frac{16}{\sqrt{11}}$$



- 2 (1) $n-1$ 回目までに赤玉が2度出て、 n 回目に赤玉が出る確率であるから

$$\begin{aligned} {}_{n-1}C_2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^{n-3} \times \frac{3}{10} &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{3^2}{10^2} \cdot \frac{7^{n-3}}{10^{n-3}} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{27(n-1)(n-2) \cdot 7^{n-3}}{2 \cdot 10^n} \end{aligned}$$

- (2) n 回の試行で2度以上連続することなく赤玉が3度出る順の総数は、 $n-3$ 個の白玉を一行に並べ、赤玉をその間と両側を含めた $n-2$ 箇所から赤玉を配置する3箇所を選ぶ組合せの総数であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} {}_{n-2}C_3 \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{7}{10}\right)^{n-3} &= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} \cdot \frac{27}{10^3} \cdot \frac{7^{n-3}}{10^{n-3}} \\ &= \frac{9(n-2)(n-3)(n-4) \cdot 7^{n-3}}{2 \cdot 10^n} \end{aligned}$$

- (3) n 回目に3度目の赤玉が出る事象を A 、2度以上連続することなく3度赤玉が出る事象を B とすると、求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

事象 $A \cap B$ は、 $n-1$ 回目まで赤玉が連続することなく2度出て、 n 回目に赤玉が出ることである。その総数は、(2)と同様に $n-3$ 個の白玉とその最後に赤玉1個を一行に並べ、白玉の間とその前を含めた $n-3$ 箇所から赤玉を配置する2箇所を選ぶ組合せの総数であるから、その確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= {}_{n-3}C_2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^{n-3} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{(n-3)(n-4)}{2} \cdot \frac{9}{10^2} \cdot \frac{7^{n-3}}{10^{n-3}} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{27(n-3)(n-4) \cdot 7^{n-3}}{2 \cdot 10^n} \end{aligned}$$

また、 $P(A)$ は、(1)で求めた確率であるから、求める条件付き確率は

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{27(n-3)(n-4) \cdot 7^{n-3}}{2 \cdot 10^n} \times \frac{2 \cdot 10^n}{27(n-1)(n-2) \cdot 7^{n-3}} \\ &= \frac{(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$



3 (1) $f(x) = x^2 + x$ を微分すると $f'(x) = 2x + 1$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 + t) = (2t + 1)(x - t)$$

すなわち $y = (2t + 1)x - t^2$

これと直線 $y = x$ の方程式から y を消去すると

$$(2t + 1)x - t^2 = x \quad \text{ゆえに} \quad 2t \left(x - \frac{1}{2}t \right) = 0$$

$t = a_n^2$ とすると, $a_n > 0$ のとき, $t \neq 0$ であるから

$$x = \frac{1}{2}t \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^2 > 0$$

$a_1 = 8 > 0$ により, すべての自然数 n に対して $a_n > 0$

(2) $a_n > 0$ より ($n \geq 1$), $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^2$ の両辺を 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 \frac{1}{2}a_n^2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 a_{n+1} = 2\log_2 a_n - 1$$

$b_n = \log_2 a_n$ であるから $b_{n+1} = 2b_n - 1$

(3) (2) の結果から $b_{n+1} - 1 = 2(b_n - 1)$

また $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 8 = 3$

数列 $\{b_n - 1\}$ は, 初項が $b_1 - 1 = 2$, 公比 2 の等比数列であるから

$$b_n - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad b_n = 2^n + 1$$

$b_n = \log_2 a_n$ より, $a_n = 2^{b_n}$ であるから $a_n = 2^{2^n + 1}$ ■

4 (1) C_1, C_2 の方程式から, y を消去すると

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 &= (x-t)^2 + 2t^3 - t^2 \\ 2(x^3 - t^3) - 2x^2 + 2tx &= 0 \\ (x-t)(x^2 + tx + t^2) - x(x-t) &= 0 \\ (x-t)\{x^2 + (t-1)x + t^2\} &= 0 \quad \dots (*) \end{aligned}$$

2 曲線 C_1, C_2 の共有点が 2 個となるのは, (*) から, 次の場合がある.

(i) $x = t$ が方程式 $x^2 + (t-1)x + t^2 = 0$ の解であるとき

$$t^2 + (t-1)t + t^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t(3t-1) = 0$$

ここで, $t \neq 0$ に注意して, $t = \frac{1}{3}$ を (*) に代入すると

$$\left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left(x - \frac{1}{3}\right)^3 = 0$$

このとき, 方程式 (*) が 3 重解をもち, 不適.

(ii) 方程式 $x^2 + (t-1)x + t^2 = 0$ が重解をもつとき, 係数について

$$(t-1)^2 - 4t^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (3t-1)(t+1) = 0$$

$t = \frac{1}{3}$ は (i) から, 不適であるから, $t = -1$ を方程式 (*) に代入すると

$$(x+1)(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(x-1)^2 = 0$$

このとき, 2 曲線 C_1, C_2 の共有点の x 座標は $x = -1, 1$

(i), (ii) より, 求める t の値は $t = -1$

(2) (1)の結果から $C_1 : y = (x+1)^2 - 3$, $C_2 : y = 2x^3 - x^2$
 条件により $A(-1, -3)$, $B(1, 1)$

$y = 2x^3 - x^2$ を微分すると

$$y' = 6x^2 - 2x$$

$x = -1$ のとき, $y' = 8$

$x = 1$ のとき, $y' = 4$

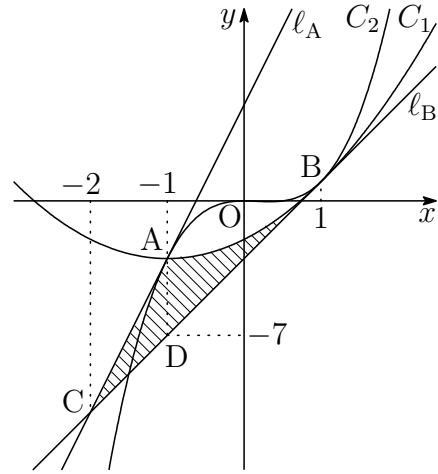
2直線 l_A , l_B の方程式は

$$l_A : y - (-3) = 8(x + 1)$$

$$y = 8x + 5$$

$$l_B : y - 1 = 4(x - 1)$$

$$y = 4x - 3$$



2直線 l_A , l_B の交点を C とすると, その x 座標は

$$8x + 5 = 4x - 3 \quad \text{これを解いて} \quad x = -2$$

l_B 上の $x = 1$ における点を D とすると $D(1, -7)$

求める面積は上の図の斜線部分で, その面積を S とすると

$$S = \triangle ACD + \int_{-1}^1 \{(x^2 + 2x - 2) - (4x - 3)\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \{-3 - (-7)\} + \int_{-1}^1 (x - 1)^2 dx$$

$$= 2 + \left[\frac{1}{3}(x - 1)^3 \right]_{-1}^1 = \frac{14}{3}$$



2.4 2018年度

1 (1) $f(x) = x^3 - px^2 + (p^2 - 2p)x + q$ より $f'(x) = 3x^2 - 2px + p^2 - 2p$

$f'(x) = 0$ の判別式を D とすると, $D/4 > 0$ であるから

$$(-p)^2 - 3(p^2 - 2p) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad p(p-3) < 0$$

p は整数であるから $p = 1, 2$

(2) (1) の結果は, 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつための必要条件である.

(i) $p = 1$ のとき, $f(x) = x^3 - x^2 - x + q$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (x-1)(3x+1)$$

与えられた条件を満たすとき, $f(0) > 0$, $f(1) < 0$ であるから

$$q > 0, \quad q - 1 < 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < q < 1$$

q は整数であるから, これを満たす q は存在しない.

(ii) $p = 2$ のとき, $f(x) = x^3 - 2x^2 + q$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$$

与えられた条件を満たすとき, $f(0) > 0$, $f\left(\frac{4}{3}\right) < 0$ であるから

$$q > 0, \quad q - \frac{32}{27} < 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < q < \frac{32}{27}$$

q は整数であるから $q = 1$

(i),(ii) より $p = 2, q = 1$ ■

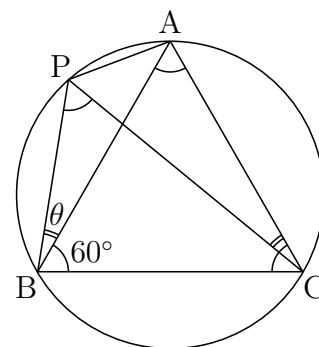
2 (1) $\angle PBA = \theta$ より, 右の図から

$$\angle PBC = 60^\circ + \theta, \quad \angle PCB = 60^\circ - \theta$$

$\triangle PBA$, $\triangle PBC$ は半径 1 の円に内接しているから, 正弦定理により

$$\frac{PA}{\sin \theta} = 2 \cdot 1,$$

$$\frac{PB}{\sin(60^\circ - \theta)} = \frac{PC}{\sin(60^\circ + \theta)} = 2 \cdot 1$$



ゆえに $PA = 2 \sin \theta$

$$PB = 2 \sin(60^\circ - \theta), \quad PC = 2 \sin(60^\circ + \theta)$$

加法定理により $\sin(60^\circ - \theta) + \sin(60^\circ + \theta) = 2 \sin 60^\circ \cos \theta = \sqrt{3} \cos \theta$

したがって $PA + PB + PC = 2\{\sin \theta + \sin(60^\circ - \theta) + \sin(60^\circ + \theta)\}$

$$= 2(\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta)$$

$$= 4 \sin(\theta + 60^\circ)$$

よって, $PA + PB + PC$ は, $\theta = 30^\circ$ のとき, 最大値 4 をとる.

(2) $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ であるから

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2\{2 \sin^2 \theta + 2 \sin^2(60^\circ - \theta) + 2 \sin^2(60^\circ + \theta)\}$$

$$= 2\{3 - \cos 2\theta - \cos(120^\circ - 2\theta) - \cos(120^\circ + 2\theta)\}$$

$$= 6 - 2\{\cos 2\theta + \cos(120^\circ - 2\theta) + \cos(120^\circ + 2\theta)\}$$

ここで, 加法定理により

$$\cos(120^\circ - 2\theta) + \cos(120^\circ + 2\theta) = 2 \cos 120^\circ \cos 2\theta = -\cos 2\theta$$

上式より, $\cos 2\theta + \cos(120^\circ - 2\theta) + \cos(120^\circ + 2\theta) = 0$ であるから

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6$$

■

- 3 (1) さいころが $R_{(m,n)}$ から $R_{(m+i,n+j)}$ の位置に移る確率を $P_{(i,j)}$ とすると

$$P_{(i,j)} = {}_{i+j}C_i \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \frac{{}_{i+j}C_i}{2^{i+j}} \quad \dots (*)$$

である (i, j は 0 以上の整数).

$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,4)}$ に移る確率であるから, (*) に $i = 2, j = 3$ を代入して

$$P_{(2,3)} = \frac{{}_5C_2}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

- (2) 事象 A, B を, 次のように定める

A : 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にある.

B : 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある.

$P(A)$ は, $R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置に移る確率であるから, (*) により

$$P(A) = P_{(2,0)} + P_{(0,2)} = \frac{{}_2C_2}{2^2} + \frac{{}_2C_0}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$P(A \cap B)$ は, $R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置を通過して, $R_{(3,4)}$ の位置に移る確率であるから

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P_{(2,0)}P_{(0,3)} + P_{(0,2)}P_{(2,1)} \\ &= \frac{{}_2C_2}{2^2} \cdot \frac{{}_3C_0}{2^3} + \frac{{}_2C_0}{2^2} \cdot \frac{{}_3C_2}{2^3} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

よって, 求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

- (3) 硬貨を5回投げたあとにさいころの1の目が上にあるとき、途中反転する(1の目が上から下, 下から上). 5回投げる中で反転は2度起き, さいころの1の目が下にくるのは硬貨を2回目または3回目に投げたあとである. さいころが2回で反転する事象を X とすると, X が起きるのは, 硬貨が「表表」または「裏裏」の順に出るときであるから, その確率は

$$P(X) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

さいころが3回で反転する事象を Y とすると, Y が起きるのは, 硬貨が「表裏表」または「裏表裏」の順に出るときであるから, その確率は

$$P(Y) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

求める確率は, X, Y または Y, X の順に起こる確率であるから

$$P(X)P(Y) + P(Y)P(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



4 (1) $S_1 = a_1 = 1, S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n \cdots (*)$

(*) に $n = 1, 2$ を代入すると

$$S_2 = 2S_1 + 1^2 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$S_3 = 2S_2 + 2^2 + 2 \cdot 2 = 18$$

よって $a_2 = S_2 - S_1 = 5 - 1 = 4, a_3 = S_3 - S_2 = 18 - 5 = 13$

(2) (*) より $S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n$
 $S_n = 2S_{n-1} + (n-1)^2 + 2(n-1)$

上の2式の辺々を引くと $a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1$

(3) 1次関数 $f(n) = pn + q$ が、すべての n について、次式を満たすとき

$$f(n+1) = 2f(n) + 2n + 1 \cdots \textcircled{1}$$

したがって $p(n+1) + q = 2(pn + q) + 2n + 1$

整理すると $pn + p + q = (2p + 2)n + 2q + 1$

上式は、 n に関する恒等式であるから

$$p = 2p + 2, p + q = 2q + 1 \quad \text{これを解いて } p = -2, q = -3$$

ゆえに $f(n) = -2n - 3 \cdots \textcircled{2}$

(2)の結果と $\textcircled{1}$ の辺々を引くと

$$a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$$

$f(2) = -2 \cdot 2 - 3 = -7$ であるから、 $a_2 - f(2) = 4 - (-7) = 11$ より

$$a_n - f(n) = 11 \cdot 2^{n-2} \quad \text{ゆえに } a_n = 11 \cdot 2^{n-2} + f(n)$$

これに $\textcircled{2}$ を代入して $a_n = 11 \cdot 2^{n-2} - 2n - 3 \quad (n \geq 2)$ ■

2.5 2019年度

- 1 (1) $a_1 \neq 2$ であるから、第 $m+1$ 項で初めて $a_{m+1} = 2$ になると仮定すると、漸化式 $a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + 1 \cdots (*)$ に $n = m$ を代入すると

$$2 = \frac{2}{a_m} + 1 \quad \text{すなわち} \quad a_m = 2$$

第 m 項ですでに $a_m = 2$ となり、矛盾を生じる。

よって、すべての自然数 n に対して $a_n \neq 2$

- (2) $b_n = \frac{3}{a_n - 2} + 1 \cdots (**)$ より $b_n = \frac{a_n + 1}{a_n - 2}$ これと $(*)$ により

$$\begin{aligned} a_{n+1} + 1 &= \frac{2}{a_n} + 2 = \frac{2(a_n + 1)}{a_n} \\ a_{n+1} - 2 &= \frac{2}{a_n} - 1 = \frac{-(a_n - 2)}{a_n} \end{aligned}$$

上の2式から $\frac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1} - 2} = -2 \cdot \frac{a_n + 1}{a_n - 2}$ すなわち $b_{n+1} = -2b_n$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \frac{a_1 + 1}{a_1 - 2} = \frac{1 + 1}{1 - 2} = -2$ 、公比 -2 の等比数列であるから

$$b_n = b_1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^n$$

補足 $\{a_n\}$ の特性方程式 $x = \frac{2}{x} + 1$ の解が $2, -1$ であるから、数列 $\left\{ \frac{a_n + 1}{a_n - 2} \right\}$ は等比数列である。

- (3) $(**)$ より $b_n - 1 = \frac{3}{a_n - 2}$ ゆえに $a_n - 2 = \frac{3}{b_n - 1}$

上式および(2)の結果から $a_n = \frac{3}{(-2)^n - 1} + 2$

- (4) (3)の結果を $a_n > \frac{5}{2}$ に代入すると

$$\frac{3}{(-2)^n - 1} + 2 > \frac{5}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{(-2)^n - 1} > \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

したがって $0 < (-2)^n - 1 < 6$ ゆえに $1 < (-2)^n < 7$

これを満たす自然数 n は $n = 2$

分数漸化式

$p, q, r \neq 0, s$ を定数とする漸化式

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \dots (*)$$

の一般項について、以下に述べる.

$ps - qr = 0$ のとき、右辺は定数となるので、 $ps - qr \neq 0$ とする.

(*) の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s - p)x - q = 0 \quad \dots (**)$$

の解を α, β とすると

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \dots (***) \\ a_{n+1} - \beta &= \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)} \end{aligned}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき、上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \frac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha} \left(\frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \right)^{n-1}$$

上式から、 a_n が求まる.

ii) $\alpha = \beta$ のとき、(*) の係数の係数について

$$(s - p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p + s)^2 = 4(ps - qr) \quad \dots \textcircled{1}$$

また、 α は(**) の重解であるから

$$\alpha = \frac{p - s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② により、(***) は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p + s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p + s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p + s)\}} \end{aligned}$$

逆数をとると
$$\frac{1}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{1}{a_n - \alpha} + \frac{2r}{p + s}$$

このとき、数列 $\left\{ \frac{1}{a_n - \alpha} \right\}$ は初項が $\frac{1}{a_1 - \alpha}$ 、公差が $\frac{2r}{p + s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n - \alpha} = \frac{1}{a_1 - \alpha} + \frac{2r}{p + s}(n - 1)$$

これから、 a_n が求まる。

例えば、大分大学 2001 年の漸化式²

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n + 5}$$

の特性方程式 $x = \frac{2x}{3x + 5}$ の解が $0, -1$ であるから

$$a_{n+1} + 1 = \frac{5(a_n + 1)}{3a_n + 5}$$

したがって $\frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + 1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{a_n}{a_n + 1}$ ゆえに $\frac{a_n}{a_n + 1} = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1}$

よって
$$a_n = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{4 \cdot 5^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}}$$

次に、宮崎大学 2003 年の漸化式³

$$a_1 = \frac{q}{p} \quad (p > q > 0), \quad a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

の特性方程式 $x = \frac{1}{2 - x}$ 、すなわち $x^2 - 2x + 1 = 0$ は重解 1 をもつから

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n - 1} - 1$$

ゆえに $\frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{\frac{q}{p} - 1} - (n - 1)$ よって $a_n = \frac{(n - 1)p - (n - 2)q}{np - (n - 1)q}$ ■

²http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2001.pdf [1]

³http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/miyazaki/miyazaki_2003.pdf [12]

- 2 (1) a に対する b の値は、次のようになる。

a	1	2	3	4	5	6
b	2	1	3	2	4	3

このとき、 $a > b$ となるのは、次の 4 通り

a	2	4	5	6
b	1	2	4	3

よって、求める確率は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$(2) \sin \frac{\pi}{5} > \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ より } \sin \frac{\pi}{5} > 0.5$$

$$\cos \frac{\pi}{5} < \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}} < \sqrt{0.81} = 0.9 \quad \text{ゆえに } \cos \frac{\pi}{5} < 0.9$$

$$(3) \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{0.5}, \quad \sqrt{0.49} < \sqrt{0.5} < \sqrt{0.64} \text{ より}$$

$$0.7 < \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} < 0.8$$

(2) および上の結果に注意すると、 $a < b$ となる (a, b) について

$$(a, b) = (2, 1) \text{ のとき } S = \cos \frac{\pi}{2} + \sin \pi = 0 < 1.7$$

$$(a, b) = (4, 2) \text{ のとき } S = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} > 0.7 + 1 = 1.7$$

$$(a, b) = (5, 4) \text{ のとき } S = \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{4} < 0.9 + 0.8 = 1.7$$

$$(a, b) = (6, 3) \text{ のとき } S = \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} > \sqrt{1.7^2} = 1.7$$

よって、求める条件付き確率は $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

補足 $a < b$ である事象を X 、 $S < 1.7$ である事象を Y とすると

$$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{2}$$

$$(a, b) = (1, 2) \text{ のとき } S = \cos \pi + \sin \frac{\pi}{2} = 0 < 1.7$$

$$(a, b) = (3, 3) \text{ のとき } S = \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} < 1.7$$

$P(Y) = \frac{4}{6}$ より、 $P_X(Y) \neq P(Y)$ であるから、 X と Y は独立ではない。■

- 3 (1) $y = x^2 + ax + b$ が x 軸に接するから、係数について

$$a^2 - 4b = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$y = x^2 + ax + b$ と $y = 2x + 3$ から y を消去して整理すると

$$x^2 + (a - 2)x + b - 3 = 0$$

この方程式は重解をもつから

$$(a - 2)^2 - 4(b - 3) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $a = 4, b = 4$

3点 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right), (-1, 0), (-1, 1)$ を頂点する三角形の面積は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$

よって、求める面積を S とすると⁴

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1} (x^2 + 4x + 4) dx - \frac{1}{4} \\ &= \int_{-2}^{-1} (x + 2)^2 dx - \frac{1}{4} = \left[\frac{1}{3}(x + 2)^3 \right]_{-2}^{-1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

- (2) $y = x^2 + 2px - 2p$ と $y = x^3$ から y を消去すると

$$x^2 + 2px - 2p = x^3 \quad \text{ゆえに} \quad (x - 1)(x^2 - 2p) = 0 \quad \dots (*)$$

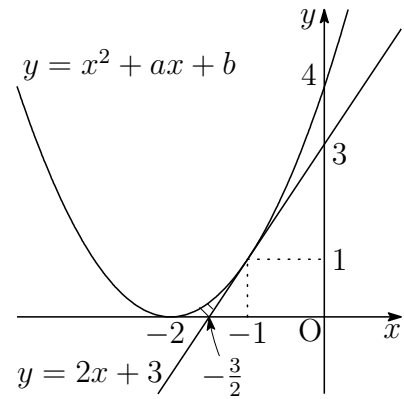
(i) $x^2 - 2p = 0$ が重解をもつとき $p = 0$

$$\text{これを} (*) \text{に代入して} \quad (x - 1)x^2 = 0$$

(ii) $x^2 - 2p = 0$ が1を解にもつとき $1 - 2p = 0$ ゆえに $p = \frac{1}{2}$

$$\text{これを} (*) \text{に代入して} \quad (x + 1)(x - 1)^2 = 0$$

(i),(ii) で得られた結果は条件を満たす. よって $p = 0, \frac{1}{2}$ ■



⁴http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun.2009.pdf 4 の補足を参照.

- 4 (1) $\ell: y = ax - a - 2$ は $y + 2 = a(x - 1)$ より、
点 $A(1, -2)$ を通り、傾き a の直線。

$m: y = bx + 3b$ は $y = b(x + 3)$ より、点
 $B(-3, 0)$ を通り、傾き b の直線。

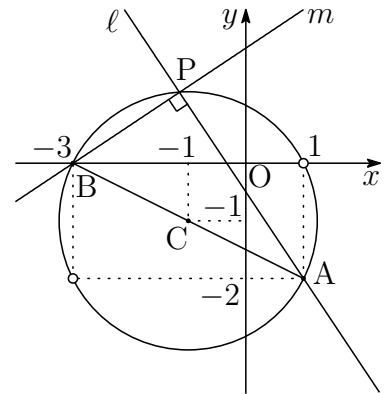
ℓ と m は直交するから、 ℓ と m の交点 P は、
線分 AB を直径とする円周上を動く。

線分 AB の中点を C とすると $C(-1, -1)$

$$CA = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$$

求める点 P の軌跡は、2 直線 ℓ, m が x 軸と垂直ではないことに注意して

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5, \quad (x, y) \neq (1, 0), (-3, -2)$$



- (2) $\ell \perp m$ より、 $ab = -1$ であるから

$$\ell: ax - y - a - 2 = 0, \quad m: x + ay + 3 = 0$$

線分 AP の長さは、点 $A(1, -2)$ と直線 m の距離であるから

$$AP = \frac{|1 + a \cdot (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + a^2}} = \frac{2|a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

線分 BP の長さは、点 $B(-3, 0)$ と直線 ℓ の距離であるから

$$BP = \frac{|a \cdot (-3) + 0 - a - 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{2|2a + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

- (3) $\triangle APB$ の面積が最大となるとき、 P は線分 AB の垂直二等分線上にあるから、 $AP = BP$ より

$$\frac{2|a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{2|2a + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad \text{ゆえに} \quad |a - 2| = |2a + 1|$$

これを解いて $a = \frac{1}{3}, -3$

別解 直線 AB の傾きは、その偏角を θ とすると $\tan \theta = -\frac{1}{2}$

$\triangle APB$ の面積が最大となるとき、 ℓ の傾き a は

$$a = \tan(\theta \pm 45^\circ) = \frac{\tan \theta \pm \tan 45^\circ}{1 \mp \tan \theta \tan 45^\circ} = \frac{-\frac{1}{2} \pm 1}{1 \pm \frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm 2}{2 \pm 1} = \frac{1}{3}, -3$$



2.6 2020年度

- 1 (1) $y = (\sin \theta + a)(\cos \theta + a)$ より

$$y = \sin \theta \cos \theta + a(\sin \theta + \cos \theta) + a^2$$

$t = \sin \theta + \cos \theta$ の両辺を平方すると

$$t^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\text{よって} \quad y = \frac{t^2 - 1}{2} + at + a^2 = \frac{t^2}{2} + at + a^2 - \frac{1}{2}$$

- (2) $t = \sin \theta + \cos \theta$ より $t = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ であるから} \quad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

- (3) $y = f(t)$ とおくと, (1) の結果から

$$f(t) = \frac{1}{2}(t+a)^2 + \frac{a^2-1}{2} \quad (-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$$

したがって, $y = f(t)$ は, 下に凸の放物線である.

軸は $t = -a$, 定義域 $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ の中央は $t = 0$

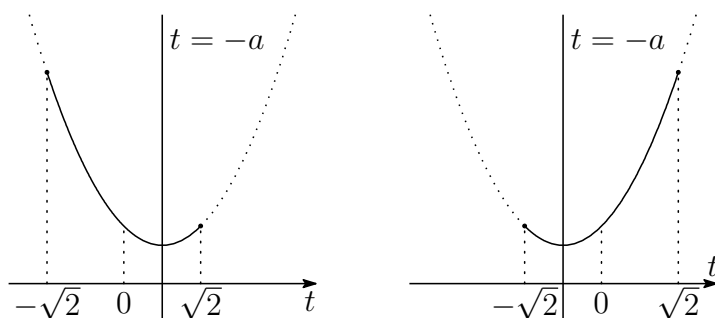
- (i) $0 < -a$ すなわち $a < 0$ のとき

$$\text{最大値 } f(-\sqrt{2}) = a^2 - \sqrt{2}a + \frac{1}{2}$$

- (ii) $-a \leq 0$ すなわち $a \geq 0$ のとき

$$\text{最大値 } f(\sqrt{2}) = a^2 + \sqrt{2}a + \frac{1}{2}$$

- (i) $0 < -a$ のとき ($a < 0$) (ii) $-a \leq 0$ のとき ($a \geq 0$)



2次関数(下に凸の放物線)の閉区間における最大値

定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり,
定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる.

最小値は、次の3つの場合に分けて求める。

(i) $\sqrt{2} < -a$ すなわち $a < -\sqrt{2}$ のとき

$$\text{最小値 } f(\sqrt{2}) = a^2 + \sqrt{2}a + \frac{1}{2}$$

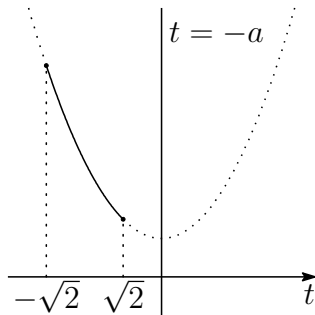
(ii) $-\sqrt{2} \leq -a \leq \sqrt{2}$ すなわち $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$ のとき

$$\text{最小値 } f(-a) = \frac{a^2 - 1}{2}$$

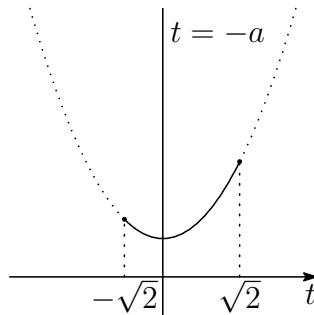
(iii) $-a < -\sqrt{2}$ すなわち $\sqrt{2} < a$ のとき

$$\text{最小値 } f(-\sqrt{2}) = a^2 - \sqrt{2}a + \frac{1}{2}$$

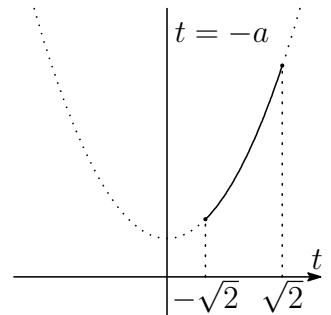
(i) $\sqrt{2} < -a$ のとき
($a < -\sqrt{2}$)



(ii) $-\sqrt{2} \leq -a \leq \sqrt{2}$ のとき
($-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$)



(iii) $-a < -\sqrt{2}$ のとき
($\sqrt{2} < a$)



2 (1) $g(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ より $g(a) = g(b) = g(c) = 0 \dots (*)$

$g(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ac + bc + ca)x - abc$ であるから

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca \\ &= (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) \end{aligned}$$

$a < b < c$ であるから

$$(**) \quad \begin{cases} g'(a) = (a - b)(a - c) > 0 \\ g'(b) = (b - c)(b - a) < 0 \\ g'(c) = (c - a)(c - b) > 0 \end{cases}$$

$f(x) = g(x) - g'(x)$ は, (*), (**) により

$$\begin{aligned} f(a) &= g(a) - g'(a) < 0, \\ f(b) &= g(b) - g'(b) > 0, \\ f(c) &= g(c) - g'(c) < 0 \end{aligned}$$

(2) $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$ とおくと, (1) の結果から

$$g(x) = x^3 - px^2 + qx - r, \quad g'(x) = 3x^2 - 2px + q$$

ゆえに $g(x) - g'(x) = x^3 - (p+3)x^2 + (2p+q)x - q - r$

また $f(x) = (x+1)(x-2-4x+2) = x^3 - 3x^2 - 2x + 2$

$f(x) = g(x) - g'(x)$ であるから

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = x^3 - (p+3)x^2 + (2p+q)x - q - r$$

同じ次数の項の係数を比較すると

$$-3 = -(p+3), \quad -2 = 2p+q, \quad 2 = -q-r$$

これを解いて $p = 0, \quad q = -2, \quad r = 0$

a, b, c を解とする 3 次方程式は, $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$, すなわち

$$t^3 - 2t = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 0, \pm\sqrt{2}$$

$a < b < c$ であるから $a = -\sqrt{2}, \quad b = 0, \quad c = \sqrt{2}$

(3) $y = g(x)$, $y = f(x)$ の共有点の x 座標は, $f(x) - g(x) = -g'(x)$ より

$$f(x) - g(x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad -g'(x) = -(3x^2 - 2) = 0$$

これを解いて $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$ において

$$f(x) - g(x) = -g'(x) = -3x^2 + 2 \geq 0$$

よって, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \{f(x) - g(x)\} dx = \int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} (-3x^2 + 2) dx \\ &= \left[-x^3 + 2x \right]_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{8\sqrt{6}}{9} \end{aligned}$$

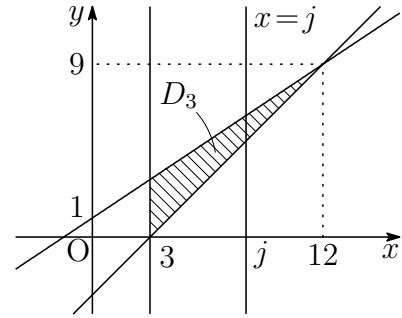


3 (1) $n = 3$ のとき, 3 直線

$$y = \frac{2}{3}x + 1, \quad y = x - 3, \quad x = 3$$

で囲まれた領域 D_3 で, 直線 $x = j$ 上の格子点の個数は ($3 \leq j \leq 12$)

$$\left[\frac{2}{3}j + 1 \right] - (j - 3) + 1 = \left[\frac{15 - j}{3} \right]$$



よって, 求める個数は ($[x]$ は x を超えない最大の整数を表す)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{3}{3} \right] + \left[\frac{4}{3} \right] + \left[\frac{5}{3} \right] + \left[\frac{6}{3} \right] + \left[\frac{7}{3} \right] + \left[\frac{8}{3} \right] + \left[\frac{9}{3} \right] + \left[\frac{10}{3} \right] + \left[\frac{11}{3} \right] + \left[\frac{12}{3} \right] \\ &= \left(\left[\frac{3}{3} \right] + \left[\frac{4}{3} \right] + \left[\frac{5}{3} \right] \right) + \left(\left[\frac{6}{3} \right] + \left[\frac{7}{3} \right] + \left[\frac{8}{3} \right] \right) \\ & \quad + \left(\left[\frac{9}{3} \right] + \left[\frac{10}{3} \right] + \left[\frac{11}{3} \right] \right) + \left[\frac{12}{3} \right] \\ &= 3 + 6 + 9 + 4 = \mathbf{22} \end{aligned}$$

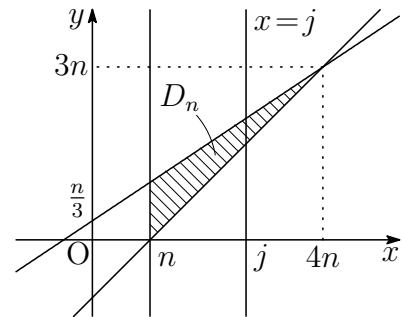
補足 次頁の定理を参照.

(2) 3 直線

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{n}{3}, \quad y = x - n, \quad x = n$$

で囲まれた領域 D_n で, 直線 $x = j$ 上の格子点の個数を a_j とすると ($n \leq j \leq 4n$)

$$\begin{aligned} a_j &= \left[\frac{2}{3}j + \frac{n}{3} \right] - (j - n) + 1 \\ &= \left[\frac{4n - j}{3} \right] + 1 \quad \dots (*) \end{aligned}$$



求める個数は $a_{n+3k} = \left[\frac{4n - (n + 3k)}{3} \right] + 1 = \mathbf{n - k + 1}$

$$(3) (*) \text{ より } \begin{aligned} a_{n+3k+1} &= \left[\frac{4n - (n + 3k + 1)}{3} \right] + 1 = n - k \\ a_{n+3k+2} &= \left[\frac{4n - (n + 3k + 2)}{3} \right] + 1 = n - k \end{aligned}$$

上の2式および(2)の結果により

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{j=n}^{4n} a_j = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{n+3k} + a_{n+3k+1} + a_{n+3k+2}) + a_{4n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \{(n - k + 1) + (n - k) + (n - k)\} + 1 \\ &= \sum_{k=1}^n \{(k + 1) + k + k\} + 1 = \sum_{k=1}^n (3k + 1) + 1 \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} n(n + 1) + n + 1 = \frac{1}{2} (n + 1)(3n + 2) \end{aligned}$$

別解 (*) により

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{j=n}^{4n} a_j = \sum_{j=n}^{4n} \left(\left[\frac{4n - j}{3} \right] + 1 \right) = \sum_{j=n}^{4n} \left[\frac{4n - j}{3} \right] + \sum_{j=n}^{4n} 1 \\ &= \left(\left[\frac{1}{3} \right] + \left[\frac{2}{3} \right] + \left[\frac{3}{3} \right] \right) + \left(\left[\frac{4}{3} \right] + \left[\frac{5}{3} \right] + \left[\frac{6}{3} \right] \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\left[\frac{3n - 2}{3} \right] + \left[\frac{3n - 1}{3} \right] + \left[\frac{3n}{3} \right] \right) + (3n + 1) \\ &= 1 + 4 + \cdots + (3n - 2) + (3n + 1) \\ &= \frac{1}{2} (n + 1) \{1 + (3n + 1)\} = \frac{1}{2} (n + 1)(3n + 2) \end{aligned}$$

定理 a, n を整数とすると、次式が成立する。

$$(A) \quad \left[\frac{a}{n} \right] + \left[\frac{a + 1}{n} \right] + \cdots + \left[\frac{a + n - 1}{n} \right] = a$$

証明 連続する n 個の整数 $a, a + 1, \dots, a + n - 1$ 中で n の倍数を $a + q$ とする。

$q = 0$ のとき (A) のすべての項が $\frac{a}{n}$ であるから、(A) の値は $\frac{a}{n} \cdot n = a$

$q \neq 0$ のとき $\left[\frac{a}{n} \right] = \left[\frac{a + 1}{n} \right] = \cdots = \left[\frac{a + q - 1}{n} \right] = \frac{a + q}{n} - 1,$

$$\left[\frac{a + q}{n} \right] = \left[\frac{a + q + 1}{n} \right] = \cdots = \left[\frac{a + n - 1}{n} \right] = \frac{a + q}{n}$$

(A) の値は $\left(\frac{a + q}{n} - 1 \right) q + \frac{a + q}{n} (n - q) = a$ 証終 ■

4 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと

$$\overrightarrow{OD} = (1-s)\vec{a}, \quad \overrightarrow{OE} = t\vec{b} + (1-t)\vec{c}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} \\ &= \{t\vec{b} + (1-t)\vec{c}\} - (1-s)\vec{a} \\ &= -\vec{a} + \vec{c} + s\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{c}) \quad \dots (*) \end{aligned}$$

$-\vec{a} + \vec{c} = (-2, 1, k-1)$, $\vec{b} - \vec{c} = (1, 1, 1-k)$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (-2, 1, k-1) + s(1, -1, 1) + t(1, 1, 1-k) \\ &= (-2+s+t, 1-s+t, k-1+s+t(1-k)) \end{aligned}$$

よって $P(-2+s+t, 1-s+t, k-1+s+t(1-k))$

(2) $\vec{d} = \vec{b} - \vec{c}$ とおくと, (*) において $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ より, \overrightarrow{OP} の描く図形は, 2つのベクトル

$$\vec{a} = (1, -1, 1), \quad \vec{d} = (1, 1, 1-k)$$

によって張られる平行四辺形であるから, その面積 $S(k)$ は

$$S(k) = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{d}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{d})^2}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad |\vec{a}|^2 &= 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3 \\ |\vec{d}|^2 &= 1^2 + 1^2 + (1-k)^2 = k^2 - 2k + 3 \\ \vec{a} \cdot \vec{d} &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1(1-k) = 1-k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad S(k) &= \sqrt{3(k^2 - 2k + 3) - (1-k)^2} \\ &= \sqrt{2(k-1)^2 + 6} \end{aligned}$$

よって, $S(k)$ は, $k=1$ のとき, 最小値 $\sqrt{6}$ をとる.

別解 \vec{a} と \vec{d} のベクトル積 (外積) は $\vec{a} \times \vec{d} = (k-2, k, 2)$

$$\text{ゆえに} \quad S(k) = |\vec{a} \times \vec{d}| = \sqrt{(k-2)^2 + k^2 + 4} = \sqrt{2(k-1)^2 + 6}$$

注意 ベクトル積 (外積) は, 高校数学の範囲外であるが, 検算として利用できる. 2018年度の熊大入試において, 四面体の体積についてベクトル積を用いた受験生の解答があったが, 間違いではなかったため, 減点されることはなかったそうである (熊大入試連絡会).

(3) $k = 1$ より, 平行四辺形 $P(1)$ は, 次の2つのベクトルに平行である.

$$\vec{a} = (1, -1, 1), \quad \vec{d} = (1, 1, 0)$$

これらに垂直な単位ベクトルの1つは (外積と平行なベクトル)

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)$$

(*) より, $P(1)$ 上の1点 $C(\vec{c})$ をもとに ($s = 1, t = 0$), 点 O から $P(1)$ を含む平面に垂線 OH を引くと, $\vec{c} = (-1, 0, 1)$ より

$$\vec{c} \cdot \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}\{-1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2\} = \frac{3}{\sqrt{6}},$$

$$OH = |\vec{c} \cdot \vec{e}| = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$\text{求める四角錐の体積は } \frac{1}{3}S(1) \cdot OH = \frac{1}{3}\sqrt{6} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} = 1$$

補足 右の図において

$$\vec{c} \cdot \vec{e} = |\vec{c}| |\vec{e}| \cos \theta = |\vec{c}| \cos \theta,$$

$$OH = |\vec{c}| \cos \theta$$

$$\text{ゆえに } OH = |\vec{c} \cdot \vec{e}|$$

例えば, $P(1)$ 上の位置ベクトル $-\vec{a} + \vec{c} = (-2, 1, 0)$ でもよい.

$$(-\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}\{-2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2\} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

別解 $\vec{f} = -\vec{a} + \vec{c}$ とおくと ($\vec{d} = \vec{b} - \vec{c}$), (*) は

$$\overrightarrow{OP} = \vec{f} + s\vec{a} + t\vec{d} \quad (0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1)$$

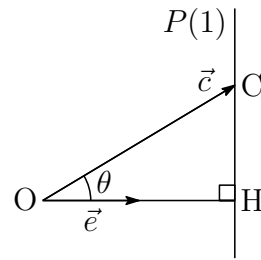
$P(1)$ の頂点を $P_0(\vec{f}), P_1(\vec{f} + \vec{a}), P_2(\vec{f} + \vec{d}), P_3(\vec{f} + \vec{a} + \vec{d})$ とおくと

$$\overrightarrow{P_0O} = -\vec{f}, \quad \overrightarrow{P_0P_1} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{P_0P_2} = \vec{d}$$

四面体 $OP_0P_1P_2$ の体積 V は, $\vec{a} \times \vec{d} = (-1, 1, 2), -\vec{f} = (2, -1, 0)$ より

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{d}) \cdot (-\vec{f})| = \frac{1}{6} |(-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0| = \frac{1}{2}$$

よって, 求める体積は $2V = 2 \times \frac{1}{2} = 1$



ベクトル積

2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が平行でないとき、ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

は、 \vec{a} および \vec{b} に直交する。このベクトルを、 \vec{a} と \vec{b} のベクトル積 (外積) という。

2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のベクトル積は

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

であり、 $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ が成り立つ。また、その大きさについて

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \end{aligned}$$

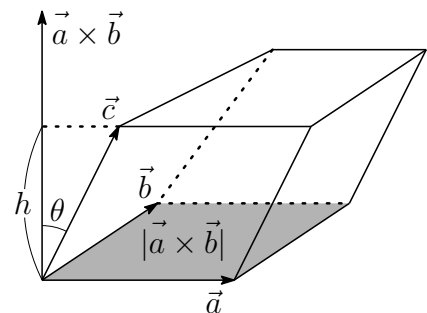
であるから、 $\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさは、 \vec{a} , \vec{b} の張る平行四辺形の面積に等しい。

$\vec{a} \times \vec{b}$ と \vec{c} のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \theta$$

両辺の絶対値をとると

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| |\cos \theta|$$



\vec{a} , \vec{b} , \vec{c} の張る平行六面体について、 \vec{a} , \vec{b} の張る平面を底面とすると、 $|\vec{c}| \cos \theta$ は、その高さ h であるから、この平行六面体の体積 V_1 は

$$V_1 = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は $V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

また、対称性により、 $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}|$ が成り立つ。 ■