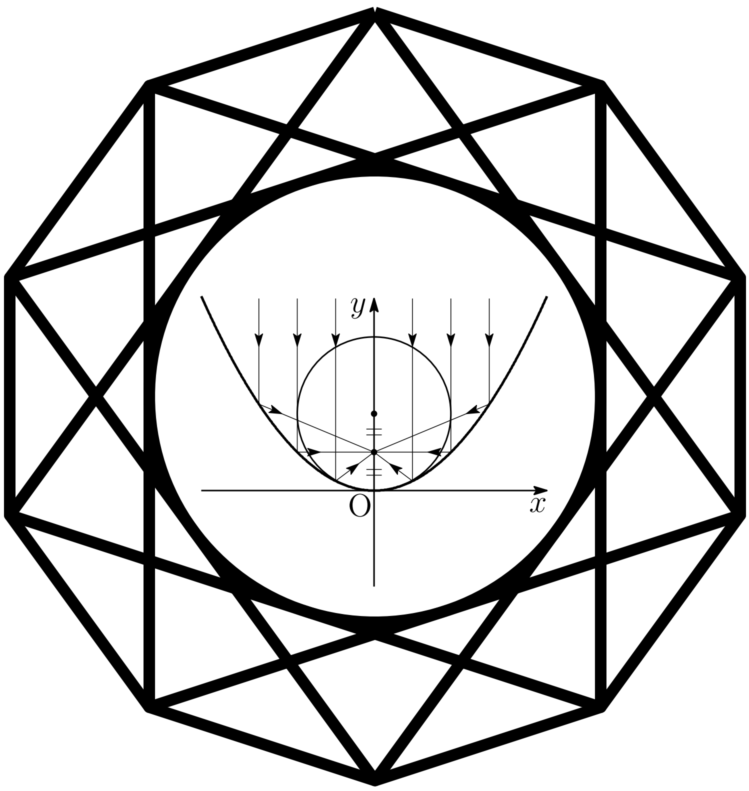
入 試 の 軌 跡

熊 本 大 学　文 系

2001 － 2014

数　学



平成 31 年 2 月 24 日

Typed by LaTeX 2_ε

序

本書は，熊本大学教育学部および医学部 (保健学科看護学専攻) 受験者のための入試問題集である．本書には，平成 13 年 (2001 年) 度から平成 26 年 (2014 年) 度までの 2 次試験前期日程の問題をすべて掲載した．

第 1 章では，過去 14 年分の問題 (56 題) を分野別に掲載し，分野ごとに学習できるように配慮した．

第 2 章では，年度別に掲載しているので，120 分の制限時間で，どれから解くべきであるかなど各自が実践的な取り組みを心掛けてもらいたい．

また，年度ごとの問題および解答については，次のサイトに掲載している．

http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html

本書の編集にあたり，以下の点に留意した．

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮した．

2. 本書は，電子文書 (PDF) での利用を想定し，ハイパーリンクを施した．利用する際には，全画面表示 ($\boxed{\text{Ctrl}}$+L) および描画領域に合わせる ($\boxed{\text{Ctrl}}$+3) と見やすくなる．ページスクロールには，($\boxed{\text{Ctrl}}$+▲，$\boxed{\text{Ctrl}}$+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る ($\boxed{\text{Alt}}$+◀)，進む ($\boxed{\text{Alt}}$+▶) も利用できる．なお，全画面表示を解除するには $\boxed{\text{ESC}}$．

3. 本書の最新版は，次のサイトにある．

http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_kiseki_bun.pdf

また，本書の姉妹版である「入試の軌跡　熊本大学　英語」も次のサイトに掲載しており，併せて活用いただけることを切に願うものである．

http://kumamoto.s12.xrea.com/lis.html

平成 26 年 3 月　編者

目 次

第 1 章　分野別問題

1.1　方程式と不等式

問題 1 以下の問いに答えよ。 (2012) $\boxed{\text{解答 (p.49)}}$

(1) k を整数とするとき，x の方程式 $x^2 - k^2 = 12$ が整数解をもつような k の値をすべて求めよ。

(2) x の方程式 $(2a-1)x^2 + (3a+2)x + a + 2 = 0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつような整数 a の値とそのときの整数解をすべて求めよ。

1.2　2 次関数 (数学 I)

問題 2 a を実数とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y = a\cos\theta - 2\sin^2\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ $M(a)$，$m(a)$ とする。以下の問いに答えよ。 (2008) $\boxed{\text{解答 (p.50)}}$

(1) $M(a)$ と $m(a)$ を求めよ。

(2) a が実数全体を動くとき，$M(a)$ の最小値と $m(a)$ の最大値を求めよ。

1.3　図形と計量 (数学 I)

問題 3 二等辺三角形 ABC において $\angle\mathrm{BAC} = 120^\circ$，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 1$ とする。辺 BC 上に点 D をとり，AD を一辺とする正三角形 ADE をつくるとき，次の問いに答えよ。 (2002) $\boxed{\text{解答 (p.52)}}$

(1) $\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = m : n$ とするとき，正三角形 ADE の面積を m，n で表せ。

(2) 二等辺三角形 ABC の面積が正三角形 ADE の面積の 3 倍になるとき，$m : n$ を求めよ。

問題 4 四角形 ABCD において，

$$\mathrm{AB}=a,\quad \mathrm{BC}=b,\quad \mathrm{CD}=c,\quad \mathrm{DA}=d,\quad \mathrm{AC}=x,\quad \mathrm{BD}=y$$

とする。以下の問いに答えよ。 (2011) 解答 (p.53)

(1) $\cos A$，$\cos B$，$\cos C$，$\cos D$ を a，b，c，d，x，y を用いて表せ。

(2) 四角形 ABCD が円に内接するとき，

$$xy=ac+bd$$

が成り立つことを示せ。

1.4 図形と方程式 (数学 II)

問題 5 点 $(x,\ y)$ が連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2-1 \\ y \leqq x+1 \end{cases}$$

の表す領域を動くとき，x^2+y^2-4y の最大値と最小値を求めよ。(2001) 解答 (p.55)

問題 6 $a>1$，$a>p>0$ とする。2 直線 $l_1: y=2x-1$，$l_2: y=a$ の交点を S，l_1 と x 軸の交点を T とし，y 軸上の点 $\mathrm{P}(0,\ p)$，l_1 上の点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，l_2 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ a)$ をとる。$\angle\mathrm{PQS}=135^\circ$，$\angle\mathrm{AQS}=45^\circ$ であるとき，次の問いに答えよ。 (2002) 解答 (p.56)

(1) p，q それぞれを a で表せ。

(2) $\angle\mathrm{PAT}=\angle\mathrm{QAS}$ であるとき，p，a それぞれの値を求めよ。

問題 7 円 $C: x^2+y^2-4kx+2ky-5=0$ について，次の問いに答えよ。

(2003) 解答 (p.57)

(1) C は k の値に関係なくある 2 つの点 A，B を通る。A，B の座標を求めよ。ただし，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする。

(2) $\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=2:1$ となる点 P の軌跡を求めよ。

問題 8 円 $C_1: x^2+y^2=1$ と円 $C_2: (x-2)^2+(y-4)^2=5$ とに点 P から接線を引く。P から C_1 の接点までの距離と C_2 の接点までの距離との比が $1:2$ になるとする。このとき，P の軌跡を求めよ。 (2004) 解答 (p.58)

1.5 三角関数 (数学 II)

問題 9 整数 m，n が $1 \leqq m < n$ を満たすとき，次の問いに答えよ。(2004) 解答 (p.59)

(1) $x > 3$ ならば，不等式

$$(mx-1)(nx-1) > x^2+1$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\tan\alpha = \dfrac{1}{m}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{n}$ を満たし，かつ $\tan(\alpha+\beta)$ の値が整数となる角度 α，β があるとする。このような，$(m,\ n)$ の組をすべて求めよ。

問題 10 次の問いに答えよ。

(1) 三角関数の加法定理またはド・モアブルの定理を用いて，任意の角 θ に対し，次の等式が成り立つことを証明せよ。(2005) 解答 (p.61)

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

(2) $\theta = 18^\circ$ のとき，$\cos 2\theta = \sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3) $\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

問題 11 a，b を定数とし，$a > b$ をみたすものとする。

$$f(x) = a\cos^2 x + \sqrt{3}(a-b)\cos x\sin x + b\sin^2 x$$

とするとき，次の問いに答えよ。(2009) 解答 (p.62)

(1) $f(x)$ の最大値が 6，最小値が 2 となるときの a，b を求めよ。

(2) (1) で求めた a，b に対して，$f(x)$ を考える。$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$f(x) > 5$ となる x の範囲を求めよ。

1.6 指数関数と対数関数 (数学 II)

問題 12 関数 $f(x) = \log_2 x + 2\log_2(6-x)$ の最大値を求めよ。(2003) 解答 (p.63)

1.7　微分法と積分法 (数学 II)

問題 13 a を正の定数とし，放物線 $y=x^2$ の $x \geqq 0$ の部分が表す曲線を C とする。また $a<t$ をみたす t に対して，曲線 C と 2 つの直線 $x=a$，$y=t^2$ によって囲まれる図形の面積を $S(t)$ とおく。このとき次の問いに答えよ。(2001) 解答 (p.63)

(1) $\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}$ を a，t で表せ。

(2) $\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}<8$ を示せ。

問題 14 $a<-\dfrac{1}{2}$，$b>1$ とする。放物線 $C : y=ax^2+b$ と円 $x^2+y^2=1$ の共有点が，$\mathrm{P_1}(p,\ q)$，$\mathrm{P_2}(-p,\ q)$ の 2 点のみとなるとき，次の問いに答えよ。ただし，$p>0$ とする。(2002) 解答 (p.64)

(1) b を a で表せ。

(2) p，q それぞれを a で表せ。

(3) 座標平面の原点を O とする。$\angle \mathrm{P_1OP_2}=90^\circ$ のとき，$\mathrm{P_1}$ における放物線 C の接線と放物線 C および y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

問題 15 放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P，Q がある。P，Q の x 座標がそれぞれ a，$a+2$ であるとき，次の問いに答えよ。ただし，$-2<a<0$ とする。(2003) 解答 (p.65)

(1) 原点を O とするとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積 S_1 を求めよ。

(2) 直線 PQ と放物線で囲まれた部分の面積 S_2 を求めよ。

(3) $S_2=2S_1$ となる a の値を求めよ。

問題 16 関数 $f(x)=x^2$，$g(x)=|2x^2-4|$ について，次の問いに答えよ。(2004) 解答 (p.66)

(1) $f(x)=g(x)$ を満たす x の値を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフとで囲まれた部分の面積を求めよ。

問題 17 座標平面上の点 P から放物線 $y=x^2$ へ 2 本の接線が引けて，かつ，この 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。(2005) 解答 (p.67)

問題 18 関数 $f(x) = |x(x+1)| - x + 1$ に対して，$y = f(x)$ のグラフを C とする。次の問いに答えよ。 (2006) 解答 (p.68)

(1) 曲線 C 上の点 $(a,\ f(a))$ $(-1 < a < 0)$ における接線が 2 点 $\mathrm{P}(-1,\ 2)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1)$ を通る直線に平行になるとき，a の値およびその接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 放物線 $y = x^2 + 1$ と曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) (1) の接線 ℓ と曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ。

問題 19 a を定数とする。2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2, \qquad C_2 : y = 3(x-1)^2 + a$$

について，以下の問いに答えよ。 (2007) 解答 (p.69)

(1) C_1，C_2 の両方に接する直線が 2 本存在するための a の条件を求めよ。

(2) C_1，C_2 の両方に接する 2 本の直線が，直交するときの a の値を求めよ。

問題 20 放物線 $y = 4x^2 + 3$ を C とする。x 軸上に点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ $(p \neq 0$ とする$)$，C 上に点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2+3)$ をとり，点 A における C の接線 l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ とする。さらに，点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2+3)$ における C の接線を m とする。以下の問いに答えよ。 (2008) 解答 (p.71)

(1) q を p を用いて表せ。

(2) 接線 m が点 P を通るとする。p，q の値を求めよ。

(3) (2) で求めた p，q に対して，放物線 C と 2 つの接線 l，m で囲まれた部分の面積を求めよ。

問題 21 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{7}t^2 - \frac{2}{3}t - 3 \right) dt$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。 (2009) 解答 (p.72)

(1) $f(x) = 0$ をみたす x をすべて求めよ。

(2) $-3 \leqq x \leqq 6$ における $f(x)$ の最小値を求めよ。

問題 22 関数 $y = \sin^3 x - \cos^3 x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ について，以下の問いに答えよ。
(2010) 解答 (p.73)

(1) $\sin x - \cos x = t$ とおいて，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) y を t の式で表せ。

(3) y の最大値および最小値を求めよ。

問題 23 曲線 $C_1 : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線が曲線 $C_2 : y = x^2 - 4$ と交わる点を B，C とする。ただし，B の x 座標は C の x 座標より小さいとする。以下の問いに答えよ。
(2010) 解答 (p.74)

(1) 線分 BC の中点 M および C の座標を a を用いて表せ。

(2) M を通り y 軸に平行な直線，線分 MC および曲線 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

問題 24 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = -x^2+2x-\dfrac{1}{2}$ を考える。点 $\mathrm{A}\left(t, -t^2 + 2t - \dfrac{1}{2}\right)$ における C_2 の接線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。
(2011) 解答 (p.75)

(1) ℓ と C_1 との交点の x 座標を，t を用いて表せ。

(2) 点 A の x 座標を $t = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ とするとき，第 1 象限において ℓ，C_1 および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

問題 25 $f(\theta) = 4\left(\sin^3 \dfrac{\theta}{2} + \cos^3 \dfrac{\theta}{2}\right)+6\left(\sin \dfrac{\theta}{2} + \cos \dfrac{\theta}{2}\right)(\sin\theta-2)-\sqrt{6}(\sin\theta+1)$ とおく。ただし，θ の範囲は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ とする。以下の問いに答えよ。(2012) 解答 (p.76)

(1) $x = \sin \dfrac{\theta}{2} + \cos \dfrac{\theta}{2}$ とおくとき，$f(\theta)$ を x のみの式で表せ。

(2) $f(\theta)$ の最小値そのときの θ の値を求めよ。

問題 26 定数 a は $0 < a < 1$ をみたすとする。曲線 $C : y = (x-1)^2$ と C 上の点 $(a,\ (a-1)^2)$ における接線 ℓ について，以下の問いに答えよ。
(2012) 解答 (p.77)

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と接線 ℓ および 2 直線 $x = 0$，$x = 1$ とで囲まれた 2 つの部分の面積の和 $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

(3) 曲線 C と 2 直線 $x = 0$，$y = 0$ とで囲まれ，接線 ℓ の上側にある 2 つの部分の面積の和 $T(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

問題 27 $f(x)$ を $x=-1$ で極大，$x=2$ で極小となる 3 次関数で

$$\int_0^2 f'(x)\,dx = -5$$

を満たすものとする。以下の問いに答えよ。 (2013) 解答 (p.78)

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の極大値と極小値の差を求めよ。

問題 28 $\triangle\mathrm{ABC}$ において，

$$\angle\mathrm{BAC} = \theta, \qquad \mathrm{AB} = \sin\theta, \qquad \mathrm{AC} = |\cos\theta|$$

とする。ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とする。以下の問いに答えよ。

(2014) 解答 (p.79)

(1) BC^2 の最大値と最小値を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積の最大値を求めよ。

問題 29 放物線 $C : y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ が点 P$(1, -2)$ と Q$(5,\ 10)$ を通るとし，P，Q における C の接線をそれぞれ l，m とする。以下の問いに答えよ。

(2014) 解答 (p.80)

(1) b，c をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) l と m の交点の y 座標が -4 であるとき，a，b，c を求めよ。

(3) (2) で求めた a，b，c について，放物線 C と l，m で囲まれた部分の面積を求めよ。

問題 30 1 次関数 $f_n(x)=a_nx+b_n \ (n=1,2,3,\cdots)$ は以下の 2 つの条件を満たすとする。

(i) $f_1(x)=x$

(ii) $f_{n+1}(x)$ は整式 $P_n(x)=\displaystyle\int_1^x 6tf_n(t)\,dt$ を x^2+x で割った余りに等しい。

以下の問いに答えよ。 (2014) 解答 (p.81)

(1) $n \geqq 1$ のとき，a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数であることを示せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は 3 の倍数ではないことを示せ。

1.8　場合の数と確率 (数学 A)

問題 31 袋の中に 1 から 5 までのいずれかの数字を書いた同じ形の札が 15 枚入っていて，それらは 1 の札が 1 枚，2 の札が 2 枚，3 の札が 3 枚，4 の札が 4 枚，5 の札が 5 枚からなる。袋の中からこれらの札のうち 3 枚を同時にとり出すとき，札に書かれている数の和が偶数，奇数である確率をそれぞれ求めよ。　(2001) 解答 (p.82)

問題 32 さいころを繰り返し投げて，n 回目に出た目の数を X_n とし，$a_n = X_1X_2\cdots X_n$ とする。このとき，各 n について，$a_n \leqq 9$ となる確率を求めよ。(2002) 解答 (p.82)

問題 33 袋の中に 1 から 3 までの数を書いた札が 2 枚ずつ，計 6 枚入っている。この中から同時に 2 枚の札を取り出し，その数を m，n とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$m \geqq n$ とする。　(2003) 解答 (p.83)

(1) $m = n$ となる確率を求めよ。

(2) 直線 $y = x + c$ と点 $(m,\ n)$ との距離の 2 乗を S とする。S の期待値を求めよ。

(3) S の期待値が最小になる c の値を求めよ。

問題 34 ボタンを 1 回押すごとに，画面に 1，2，3，4 のいずれかの数を表示する機械がある。この機械が数 X を表示する確率は次のとおりである。

X	1	2	3	4
確率	$2a$	b	b	a

次の問いに答えよ。　(2005) 解答 (p.84)

(1) b を a で表せ。

(2) ボタンを 2 回押したときに表示される数のうち小さくないほうの数を Z とするとき，Z の期待値 m を a で表せ。

(3) m を最大にする a の値を求めよ。

問題 35 大小2つのサイコロを投げて，大きいサイコロの目の数を a，小さいサイコロの目の数を b とする。次の問いに答えよ。 (2006) 解答 (p.85)

(1) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ の最小値が -5 より小さくなる確率を求めよ。

(2) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと x 軸との交点で，x 座標の大きい方を選ぶ。その x 座標が1より大きくなる確率を求めよ。

(3) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと関数 $y = bx^2$ のグラフが異なる2点で交わる確率を求めよ。

問題 36 xy 平面上で，点Pは原点を出発点とし，さいころを1回投げるたびに以下のように進むものとする。1または2の目が出たときは x 軸方向に1だけ進み，3の目が出たときは x 軸方向に -1 だけ進み，4または5の目が出たときは y 軸方向に1だけ進み，6の目が出たときは y 軸方向に -1 だけ進む。以下の問いに答えよ。 (2007) 解答 (p.86)

(1) さいころを5回投げるとき，点Pが座標 $(2, -3)$ の位置にいる確率を求めよ。

(2) さいころを4回投げるとき，点Pが x 軸上のみを動いて最後に原点にいる確率を求めよ。

(3) さいころを2回投げるとき，点Pの x 座標の期待値を求めよ。

問題 37 大小2個のサイコロを投げ，大きいサイコロの目の数を p，小さいサイコロの目の数を q とする。$y = px^2$ のグラフと $y = qx + \dfrac{1}{4}$ のグラフの交点のうち，x 座標が負のものをA，正のものをBとする。このとき，次の問いに答えよ。 (2009) 解答 (p.87)

(1) 線分ABの中点の x 座標が1より大きくなる確率を求めよ。

(2) Aの x 座標が有理数となる確率を求めよ。

問題 38 赤球，白球，黒球，黄球，青球が各1個ずつ入っている袋が3つある。各袋から球を1個ずつ取り出す。以下の問いに答えよ。 (2010) 解答 (p.88)

(1) 取り出した球の色が2種類となる確率を求めよ。

(2) 取り出した球の色の数の期待値を求めよ。

問題 39 n を3以上の奇数として，次の集合を考える。

$$A_n = \left\{ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}} \right\}$$

以下の問いに答えよ。 (2013) 解答 (p.89)

(1) A_9 のすべての要素を求め，それらの和を求めよ。

(2) ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$ が A_n 内の最大の数であることを示せ。

(3) A_n 内の奇数の個数を m とする。m は奇数であることを示せ。

1.9 論理と集合 (数学 A)

問題 40 2 つの整数の平方の和で表される整数の集合を A とする。以下の問いに答えよ。 (2011) 解答 (p.90)

(1) 集合 A のある要素 a^2+b^2 (a, b は整数) が 3 で割り切れるとき，a，b はともに 3 で割り切れることを示せ。

(2) x を整数とする。$9x$ が集合 A の要素であるとき，x は集合 A の要素であることを示せ。

1.10 平面上のベクトル (数学 B)

問題 41 座標平面上の点 $\mathrm{P}_n(n,\ 1)$，$n=1,2,\cdots$ に対して，点 P_1 から原点 O と点 P_n $(n \geqq 2)$ を通る直線へ下ろした垂線を $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_n$ とし，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ のなす角を θ_n とする。このとき，次の問いに答えよ。 (2001) 解答 (p.91)

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ の成分を求めよ。

(2) $\cos\theta_n$ を求めよ。

(3) $\tan\theta_n < 1.01$ をみたす最小の n の値を求めよ。

問題 42 △OAB の辺 AB，OB の中点をそれぞれ C，D とする。辺 OA 上に OE : EA = 1 : 4 となる点 E をとる。線分 OC と線分 BE，AD との交点をそれぞれ P，Q とし，線分 AD と線分 BE の交点を R とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，次の問いに答えよ。 (2006) 解答 (p.93)

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3) $|\vec{a}|=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=1$，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ のとき，△PQR の面積を求めよ。

問題 43 原点 O を中心として半径 1 の円の第 1 象限の部分 C について考える。
C 上に 3 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1)$ をとる。
$s+t=1$ を満たす s，t $(0<s<1,\ 0<t<1)$ に対し，弧 AQ 上に点 X を 2 つのベクトル

$$s^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-s\,\overrightarrow{\mathrm{OX}},\quad t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}-t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$

が垂直になるようにとる。以下の問いに答えよ。 (2010) 解答 (p.95)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を t を用いて表せ。

(2) $\cos\theta$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) △OAX の面積の最大値を求めよ。

1.11　空間のベクトル (数学 B)

問題 44 座標空間内に 4 点 A(3, 0, 0)，B(0, 2, 1)，C(0, 2, 0)，D(3, 2, 0) を考え，線分 CD 上の点 P(x, 2, 0) に対して，三角形 PAB の面積を S とするとき，次の問いに答えよ。 (2005) 解答 (p.96)

(1) $\angle\mathrm{APB} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ を x で表せ。

(2) S の最小値を求めよ。

問題 45 四面体 OABC の 6 つの辺の長さを

$$\mathrm{OA} = \sqrt{10},\ \mathrm{OB} = \sqrt{5},\ \mathrm{OC} = \sqrt{6},\ \mathrm{AB} = \sqrt{5},\ \mathrm{AC} = 2\sqrt{2},\ \mathrm{BC} = \sqrt{5}$$

とする。以下の問いに答えよ。 (2007) 解答 (p.98)

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のいずれとも直交することを示せ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

問題 46 四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であり，△OAB の面積と △OAC の面積が等しいとする。このとき，次の問いに答えよ。 (2009) 解答 (p.100)

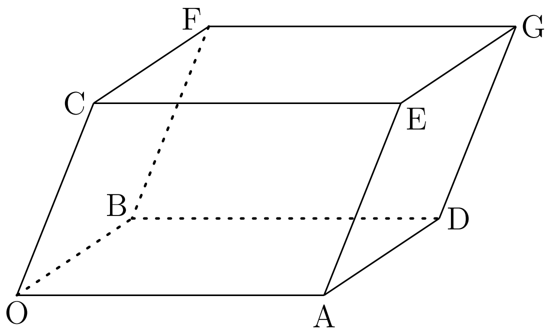
(1) OB = OC を示せ。

(2) △ABC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であることを示せ。

問題 47 平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を 2 : 3 に内分する点を N，辺 DG を 1 : 2 に内分する点を L とする。また，辺 OC を $k : 1-k$ $(0 < k < 1)$ に内分する点を K とする。このとき，以下の問いに答えよ。 (2011) 解答 (p.101)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 M，N，K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ。

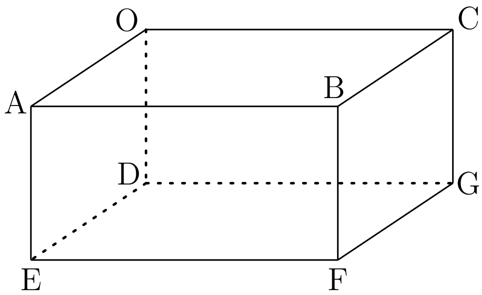


問題 48 長方形 OABC-DEFG において，OA = OD = 1，OC = 2 とし，辺 EF の中点を M とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とし，点 P から線分 CM におろした垂線と線分 CM との交点を H とする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。 (2013) 解答 (p.102)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，t を用いて表せ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PH}}|^2$ の最小値を求めよ。



問題 49 空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。また，点 D を $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{b} - \vec{a}$ を満たす点，点 E を $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \vec{c} - \vec{a}$ を満たす点とし，点 P を OA の中点とする。以下の問いに答えよ。 (2014) 解答 (p.97)

(1) $0 < t < 1$ に対し，BD を $t : (1-t)$ に内分する点を R とし，CE を $(1-t) : t$ に内分する点を S とする．また，OB と PR の交点を M とし，OC と PS の交点を N とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) △OMN の面積を t を用いて表せ。

(3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，△OMN の面積の最小値を求めよ。

1.12　数列 (数学 B)

問題 50 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} + a_n = 3n - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

次の問いに答えよ。 (2006) 解答 (p.104)

(1) $b_n = a_n - \dfrac{6n-7}{4}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} a_n$ の値を求めよ。

問題 51 数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ は以下の条件を満たしているものとする。

$$\begin{aligned} &x_1 = 8, \qquad y_1 = -5 \\ &x_{n+1} = 2x_n + y_n + 3n - 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ &y_{n+1} = 2y_n + x_n - 3n + 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

以下の問いに答えよ。 (2007) 解答 (p.105)

(1) $z_n = x_n + y_n$，また $w_n = x_n - y_n$ とおく。数列 $\{z_n\}$ および $\{w_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) xy 平面上の点 $(x_n,\ y_n)$ と直線 $y = x$ との距離が最小になるような n の値をすべて求めよ。

問題 52 n を 3 以上の自然数とする。以下の問いに答えよ。 (2008) 解答 (p.106)

(1) $2 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k について，$k(k-1)_n\mathrm{C}_k = n(n-1)_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ を示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。

問題 53 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 0,\ a_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

によって定められている。以下の問いに答えよ。 (2008) 解答 (p.107)

(1) $b_n = n + a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，$b_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を示せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が等比数列であることを示せ。

(3) a_n を求めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

問題 54 数列 $\{a_n\}$ に対して次の漸化式が成り立つとする。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。 (2012) 解答 (p.108)

(1) 定数 c に対して $b_n = a_n + c$ で定められた数列 $\{b_n\}$ を考える。

$$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

を満たす c の値を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。

問題 55 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n + n^2$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ。 (2013) 解答 (p.109)

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2) a_n を n の式で表せ。

複素数平面 (2005 年以前は数学 B の範囲) は，2015 年度入試問題から復活することにになったが，新教育課程では数学 III の範囲に入っている．そのため，新課程においても出題の範囲外であり，学習する必要はないが，参考までに掲載した．

1.13　複素数平面 (数学 B 旧課程)

問題 56 複素数 α，β を $\alpha = 1 + 2i$，$\beta = 4 + 4i$ とする。次の問いに答えよ。
(2004) 解答 (p.110)

(1) $|\alpha - \overline{\beta}|$ の値を求めよ。ただし，$\overline{\beta}$ は β の共役複素数を表す。

(2) 次の値を最小にする実数 x を求めよ。

$$|x - \alpha| + |x - \beta|$$

第 2 章　年度別問題

2008 年度までの一般前期試験において，数学の問題は文系・理系の 2 種類の試験問題であり，文系の問題 4 題中 1 題または 2 題が理系 (医学科を含む) との共通問題であった．そのため，文系の受験生にとってやや難しい問題にも取り組まなければならなかった．

2001	文系 3 は理系 2 に同じ
2002	文系 2 は理系 1，文系 3 は理系 2 に同じ
2003	文系 1 は理系 1 に同じ
2004	文系 1 は理系 1，文系 2 は理系 2 に同じ
2005	文系 3 は理系 1，文系 4 は理系 2 同じ
2006	文系 1 は理系 1 に同じ
2007	文系 3 は理系 1(1)(2) に同じ
2008	文系 3 は理系 1，文系 4 は理系 2 に同じ

2009 年度以降，医学部医学科は独自問題となり，一般前期の数学の試験問題は，文系 (保健学科を含む)，理系 (医学科の除く)，医学科の 3 種類となる．これ以降，文系数学と理系数学の共通問題は少なくなり，文系数学の試験問題は易化した．

2009	共通問題なし
2010	共通問題なし
2011	文系 4 は理系 2(1)(2) に同じ
2012	文系 1 は理系 1 に同じ
2013	文系 4 は理系 1 に同じ
2014	文系 1 は理系 1 に同じ

近年，文系数学の高得点者が増えており，教育学部を中心に数学選択者が一般前期試験で挽回したケースが顕著になったという受験調査機関の報告がある．

文系 (2009 年度) 出題分野

	科 目	分 野	出 題 内 容
1	数学 II	微分法と積分法	関数の最小値
2	数学 A	場合の数と確率	さいころ目と関数の係数
3	数学 II	三角関数	最大値・最小値，三角不等式
4	数学 B	空間のベクトル	図形への応用

1 (1) 式のとおりに計算するだけの基本題

(2) (1) の結果から 3 次関数の増減を調べ，その最小値を求める．

2 (1) まず，p，q の値に関係なく，2 つのグラフは 2 点で交わることを示し，解と係数の関係を用いて，p，q のみたす条件を導き，その確率を求める．

(2) $px^2 - qx - \dfrac{1}{4} = 0$ の判別式 $q^2 + p$ が平方数となる確率を求める．

3 (1) 2 倍角の公式から

$$cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

であり，さらに三角関数の合成の公式に適用する．

(2) (1) の結果を用いて三角不等式を解く．

4 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$$

上式と次の面積の公式を利用して証明することもできる．

$$\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}, \quad \triangle \mathrm{OAC} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{c})^2}$$

(2) (1) で示した $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$，$|\vec{b}| = |\vec{c}|$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ を示す．

文系 (2010 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 II	微分法と積分法	三角関数の最大値・最小値
2	数学 II	微分法と積分法	接線・面積
3	数学 II	場合の数と確率	確率・期待値
4	数学 B	平面上のベクトル	円周上の点の位置ベクトルと内積

1 (1) $0 \leqq x \leqq \pi$ であることに注意して，三角関数の合成により t の値の範囲を定める．

(2) 典型的な頻出問題であり，2012 年にも類題が出題されている．

(3) (2) の結果から，3 次関数の最大値・最小値を求める問題である．

2 (1) 基本題

(2) 単なる面積を計算する問題であるが，適切に積分公式を適用することがポイントである．

3 (1) 球の色が 1 色である確率は　$\dfrac{5}{5^3} = \dfrac{1}{25}$,

球の色が 3 色である確率は　$\dfrac{{}_5\mathrm{P}_3}{5^3} = \dfrac{12}{25}$

したがって，球の色が 2 色である確率は，次のように求めることもできる．

$$1 - \left(\frac{1}{25} + \frac{12}{25}\right) = \frac{12}{25}$$

(2) 基本題

4 (1) 2 つのベクトルの内積が 0 であることを利用する．

(2) $0 < t < 1$ のとき $\dfrac{5}{4} \leqq -t^2 + t + 1 < 1$ であることを利用する．

(3) (2) の結果から，$0 < \sin\theta \leqq \dfrac{3}{5}$ であり，$\triangle\mathrm{OAX}$ の面積は $\dfrac{1}{2}\sin\theta$ である．

文系 (2011 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 I	図形と計量	トレミーの定理
2	数学 A	論理と集合	整数と集合
3	数学 II	微分法と積分法	接線の方程式，面積
4	数学 B	空間のベクトル	ベクトルの図形への応用

1　(1) 余弦定理に関する基本題

(2) 余弦定理によるパターン化した証明法で演習問題などで解いたことのある受験生にとっては落ちついて解答できた問題である．なお，トレミーの定理は複素数平面でよく登場した問題でもある．

2　(1) k を整数とし，a，b を $3k$，$3k\pm 1$ の形で表すとよい．

(2) (1) の結果を利用すれば，論理的展開は簡単である．

3　(1) 典型的な接線の問題と放物線と直線の共有点に関する問題であり，計算力だけを問う問題である．

(2) 単純な定積分による面積を求める問題であるが，(1) の結果を利用して ℓ と C_1 の共有点の x 座標を求める計算がポイント．

4　(1) 基本題

(2) 3点 M，N，K を通る平面を α とする．α を1次独立なベクトル $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ を用いて媒介変数表示をする．これと L の位置ベクトルが $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて一意的に表されることにより k を求める．

文系 (2012 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 I	方程式と不等式	2 次方程式の整数解
2	数学 B	数列	漸化式
3	数学 II	微分・積分	三角関数の最小値
4	数学 II	微分・積分	接線・面積

1
(1) 偶奇性および $x^2 - k^2 = |x|^2 - |k|^2$ と変形することがポイント．

(2) 有理数を解に持つから，2 次方程式の判別式 $a^2 + 12$ が整数かつ平方数となることに注目する．このとき，整数 l を用いて，$a^2 + 12 = l^2$ とおくと，$l^2 - a^2 = 12$ となり，(1) の結果が利用できる．

2
(1) 基本題

(2) 数列 $\{b_{n+1} - 2b_n\}$ および数列 $\{b_{n+1} - 3b_n\}$ は等比数列である．

3
(1) 2010 年にも類題が出題されている頻出問題である．

(2) (1) の結果から，x の 3 次関数のとして最小値を求める．

4
(1) 基本題

(2) $S(a)$ は a の 2 次式となり，a の 2 次関数としてその最小値を求める．

(3) $T(a)$ は a の 3 次式となり，a の 3 次関数として，その増減を調べる．

文系 (2013 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 A	場合の数と確率	場合の数
2	数学 II	微分・積分	関数の極値
3	数学 B	空間のベクトル	ベクトルの応用
4	数学 B	数列	漸化式

1 (1) 基本問題

(2) 最後の理論的な根拠を示すのが難しい．

2 (1) $f'(x)$ は 2 次式で，$x+1$，$x-2$ を因数にもつことに注意する．

(2) $f'(x)$ を積分してから求めてもよい．

3 (1) 基本問題

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}})}{|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ を利用する．

(3) 2 次関数の最小値の問題．

4 (1) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用する．

(2) (1) で得られた漸化式 $a_{n+1} = 2a_n - 2n - 1$ に対して，$-2n-1$ が n の 1 次式であるから，n の 1 次式 $f(n)$ を用いた補助方程式 $f(n+1) = 2f(n) - 2n - 1$ を利用する．

文系 (2014 年度) 出題分野

	科　目	分　野	出　題　内　容
1	数学 B	空間のベクトル	ベクトルの図形への応用
2	数学 II	微分・積分	関数の極値
3	数学 II	微分・積分	面積
4	数学 II	微分・積分	数列との融合問題

1 理系と共通問題

(1) 相似な三角形に気付くかがポイント．

(2) (1) の結果から容易に求められる．

(3) 分子は定数であるから，分母の 2 次式だけに注意すればよい．

2 (1) 余弦定理

(2) $u = |\cos\theta|$ とおく．

3 (1) 基本問題

(2) 2 本の接線 l，m を a を用いて表す．

(3) 放物線とその接線で囲まれた図形の面積は熊大文系の頻出問題．

4 (1) 積分法と数列 (融合問題)．数列の融合問題は新傾向．

(2) a_k と b_k が偶数であるとき，次式から a_{k+1} と b_{k+1} はともに偶数．

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k - 3b_k, \\ &= 2(a_k - b_k) - b_k \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b_{k+1} &= -2a_k - 3b_k \\ &= -2(a_k + b_k) - b_k \end{aligned}$$

(3) a_k と b_k が 3 の倍数でないとき，次式から a_{k+1} と b_{k+1} はともに 3 の倍数でない．

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k - 3b_k, \\ &= 3(a_k - b_k) - a_k \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b_{k+1} &= -2a_k - 3b_k \\ &= -3(a_k + b_k) + a_k \end{aligned}$$

文系 (2001-2005) 出題分野

		01	02	03	04	05
I	方程式と不等式					
	2 次関数					
	図形と計量		1			
II	式と証明					
	複素数と方程式					
	図形と方程式	1	3	3	1	
	三角関数				2	2
	指数関数と対数関数			2		
	微分法と積分法	2	4	4	4	1
A	場合の数と確率	4	2	1		4
	論理と集合					
	平面図形					
B	平面上のベクトル	3				
	空間のベクトル					3
	数列					
	複素数平面 (旧課程)				3	

1〜4 は問題番号

文系 (2006-2014) 出題分野

		06	07	08	09	10	11	12	13	14
I	方程式と不等式							1		
	2 次関数			1						
	図形と計量						1			
II	式と証明									
	複素数と方程式									
	図形と方程式									
	三角関数				3					
	指数関数と対数関数									
	微分法と積分法	3	3	3	1	1 2	3	3 4	2	2 3 4
A	場合の数と確率	1	1		2	3			1	
	論理と集合						2			
	平面図形									
B	平面上のベクトル	4				4				
	空間のベクトル		2		4		4		3	1
	数列	2	4	2 4				2	4	

1〜4 は問題番号

数学 II の『微分法と積分法』の分野からは常に出題されており，微分法だけの出題 (01,05,07)，積分法だけの出題 (03,04)，微分法･積分法からの出題 (02,06,08,09,10,11,12,13,14) であった．また,『図形と方程式』の分野との融合問題 (02,05,07),『三角関数』の分野との融合問題 (10,12),『対数関数』の分野との融合問題 (03) が出題されている．

数学 A の『場合の数と確率』の分野からの出題も多く，1 次関数・2 次関数のグラフとの融合問題が出題されている (03,06,09)．

数学 I の分野からの出題は少ないが，計算力や判別式を使った処理能力を習得する必要がある．また，数学 II の『複素数と方程式』の解と係数の関係なども重要な計算法である．

入学試験には，制限時間があるので，効率的に取り組まなければならない．

積分の分野の公式として，次の公式があるが，2002 年度，2010 年度，2012 年度，2014 年度の試験問題では，これを利用した方が効率的である．

$$\mathbf{1}\quad \int (x+k)^n\,dx = \frac{1}{n+1}(x+k)^{n+1}+C \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$\mathbf{2}\quad \int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

定積分の代表的な公式に，次の公式があるが，2003 年度および 2006 年度の試験問題では，これを利用した方が煩雑な計算をせずに，正解を導くことができる．

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ベクトルの分野では，2006 年度の『平面上のベクトル』，2005 年度および 2009 年度の『空間のベクトル』で三角形の面積の公式を利用できる問題が出題されていることも特徴である．

△ABC の面積 S について，次が成り立つ．

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

数列の分野から出題は，すべて設問による誘導があるので，解き易い．また，問題パターンが決まっているので，準備さえしておけば高得点が狙える分野でもある．

2.1 2001 年度

1 点 $(x,\ y)$ が連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 - 1 \\ y \leqq x + 1 \end{cases}$$

の表す領域を動くとき，x^2+y^2-4y の最大値と最小値を求めよ。解答 5 (p.55)

2 a を正の定数とし，放物線 $y = x^2$ の $x \geqq 0$ の部分が表す曲線を C とする。また $a < t$ をみたす t に対して，曲線 C と 2 つの直線 $x = a$，$y = t^2$ によって囲まれる図形の面積を $S(t)$ とおく。このとき次の問いに答えよ。解答 13 (p.63)

(1) $\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}$ を a，t で表せ。

(2) $\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)} < 8$ を示せ。

3 座標平面上の点 $\mathrm{P}_n(n,\ 1)$，$n = 1, 2, \cdots$ に対して，点 P_1 から原点 O と点 P_n $(n \geqq 2)$ を通る直線へ下ろした垂線を $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_n$ とし，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ のなす角を θ_n とする。このとき，次の問いに答えよ。解答 41 (p.91)

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ の成分を求めよ。

(2) $\cos\theta_n$ を求めよ。

(3) $\tan\theta_n < 1.01$ をみたす最小の n の値を求めよ。

4 袋の中に 1 から 5 までのいずれかの数字を書いた同じ形の札が 15 枚入っていて，それらは 1 の札が 1 枚，2 の札が 2 枚，3 の札が 3 枚，4 の札が 4 枚，5 の札が 5 枚からなる。袋の中からこれらの札のうち 3 枚を同時にとり出すとき，札に書かれている数の和が偶数，奇数である確率をそれぞれ求めよ。解答 31 (p.82)

2.2 2002年度

1 二等辺三角形 ABC において $\angle \mathrm{BAC} = 120^\circ$，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 1$ とする。辺 BC 上に点 D をとり，AD を一辺とする正三角形 ADE をつくるとき，次の問いに答えよ。 解答 3 (p.52)

(1) $\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = m : n$ とするとき，正三角形 ADE の面積を m，n で表せ。

(2) 二等辺三角形 ABC の面積が正三角形 ADE の面積の3倍になるとき，$m : n$ を求めよ。

2 さいころを繰り返し投げて，n 回目に出た目の数を X_n とし，$a_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ とする。このとき，各 n について，$a_n \leqq 9$ となる確率を求めよ。 解答 32 (p.82)

3 $a > 1$，$a > p > 0$ とする。2直線 $l_1 : y = 2x - 1$，$l_2 : y = a$ の交点を S，l_1 と x 軸の交点を T とし，y 軸上の点 $\mathrm{P}(0,\ p)$，l_1 上の点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，l_2 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ a)$ をとる。$\angle \mathrm{PQS} = 135^\circ$，$\angle \mathrm{AQS} = 45^\circ$ であるとき，次の問いに答えよ。 解答 6 (p.56)

(1) p，q それぞれを a で表せ。

(2) $\angle \mathrm{PAT} = \angle \mathrm{QAS}$ であるとき，p，a それぞれの値を求めよ。

4 $a < -\dfrac{1}{2}$，$b > 1$ とする。放物線 $C : y = ax^2 + b$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の共有点が，$\mathrm{P}_1(p,\ q)$，$\mathrm{P}_2(-p,\ q)$ の2点のみとなるとき，次の問いに答えよ。ただし，$p > 0$ とする。 解答 14 (p.64)

(1) b を a で表せ。

(2) p，q それぞれを a で表せ。

(3) 座標平面の原点を O とする。$\angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2 = 90^\circ$ のとき，P_1 における放物線 C の接線と放物線 C および y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

2.3　2003 年度

1 袋の中に 1 から 3 までの数を書いた札が 2 枚ずつ，計 6 枚入っている。この中から同時に 2 枚の札を取り出し，その数を m，n とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$m \geqq n$ とする。 解答 33 (p.83)

(1) $m = n$ となる確率を求めよ。

(2) 直線 $y = x + c$ と点 $(m,\ n)$ との距離の 2 乗を S とする。S の期待値を求めよ。

(3) S の期待値が最小になる c の値を求めよ。

2 関数 $f(x) = \log_2 x + 2\log_2(6 - x)$ の最大値を求めよ。 解答 12 (p.63)

3 円 $C : x^2 + y^2 - 4kx + 2ky - 5 = 0$ について，次の問いに答えよ。 解答 7 (p.57)

(1) C は k の値に関係なくある 2 つの点 A，B を通る。A，B の座標を求めよ。ただし，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする。

(2) PA : PB = 2 : 1 となる点 P の軌跡を求めよ。

4 放物線 $y = x^2$ 上に 2 点 P，Q がある。P，Q の x 座標がそれぞれ a，$a + 2$ であるとき，次の問いに答えよ。ただし，$-2 < a < 0$ とする。 解答 15 (p.65)

(1) 原点を O とするとき，△OPQ の面積 S_1 を求めよ。

(2) 直線 PQ と放物線で囲まれた部分の面積 S_2 を求めよ。

(3) $S_2 = 2S_1$ となる a の値を求めよ。

2.4　2004年度

1 円 $C_1: x^2+y^2=1$ と円 $C_2: (x-2)^2+(y-4)^2=5$ とに点Pから接線を引く。Pから C_1 の接点までの距離と C_2 の接点までの距離との比が $1:2$ になるとする。このとき，Pの軌跡を求めよ。 解答8 (p.58)

2 整数 m，n が $1 \leqq m < n$ を満たすとき，次の問いに答えよ。 解答9 (p.59)

(1) $x>3$ ならば，不等式

$$(mx-1)(nx-1) > x^2+1$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\tan\alpha = \dfrac{1}{m}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{n}$ を満たし，かつ $\tan(\alpha+\beta)$ の値が整数となる角度 α，β があるとする。このような，$(m,\ n)$ の組をすべて求めよ。

3 複素数 α，β を $\alpha=1+2i$，$\beta=4+4i$ とする。次の問いに答えよ。

(旧課程) 解答56 (p.110)

(1) $|\alpha-\overline{\beta}|$ の値を求めよ。ただし，$\overline{\beta}$ は β の共役複素数を表す。

(2) 次の値を最小にする実数 x を求めよ。

$$|x-\alpha|+|x-\beta|$$

4 関数 $f(x)=x^2$，$g(x)=|2x^2-4|$ について，次の問いに答えよ。 解答16 (p.66)

(1) $f(x)=g(x)$ を満たす x の値を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフとで囲まれた部分の面積を求めよ。

2.5　2005 年度

1 座標平面上の点 P から放物線 $y = x^2$ へ 2 本の接線が引けて，かつ，この 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。
解答 17 (p.67)

2 次の問いに答えよ。
解答 10 (p.61)

(1) 三角関数の加法定理またはド・モアブルの定理を用いて，任意の角 θ に対し，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

(2) $\theta = 18^\circ$ のとき，$\cos 2\theta = \sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3) $\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

3 座標空間内に 4 点 A(3, 0, 0)，B(0, 2, 1)，C(0, 2, 0)，D(3, 2, 0) を考え，線分 CD 上の点 P(x, 2, 0) に対して，三角形 PAB の面積を S とするとき，次の問いに答えよ。
解答 44 (p.96)

(1) $\angle\mathrm{APB} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ を x で表せ。

(2) S の最小値を求めよ。

4 ボタンを 1 回押すごとに，画面に 1，2，3，4 のいずれかの数を表示する機械がある。この機械が数 X を表示する確率は次のとおりである。

X	1	2	3	4
確率	$2a$	b	b	a

次の問いに答えよ。
解答 34 (p.84)

(1) b を a で表せ。

(2) ボタンを 2 回押したときに表示される数のうち小さくないほうの数を Z とするとき，Z の期待値 m を a で表せ。

(3) m を最大にする a の値を求めよ。

2.6　2006 年度

1 大小 2 つのサイコロを投げて，大きいサイコロの目の数を a，小さいサイコロの目の数を b とする。次の問いに答えよ。 解答 35 (p.85)

(1) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ の最小値が -5 より小さくなる確率を求めよ。

(2) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと x 軸との交点で，x 座標の大きい方を選ぶ。その x 座標が 1 より大きくなる確率を求めよ。

(3) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと関数 $y = bx^2$ のグラフが異なる 2 点で交わる確率を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} + a_n = 3n - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

次の問いに答えよ。 解答 50 (p.104)

(1) $b_n = a_n - \dfrac{6n-7}{4}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} a_n$ の値を求めよ。

3 関数 $f(x) = |x(x+1)| - x + 1$ に対して，$y = f(x)$ のグラフを C とする。次の問いに答えよ。 解答 18 (p.68)

(1) 曲線 C 上の点 $(a,\ f(a))$ $(-1 < a < 0)$ における接線が 2 点 $\mathrm{P}(-1,\ 2)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1)$ を通る直線に平行になるとき，a の値およびその接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 放物線 $y = x^2 + 1$ と曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) (1) の接線 ℓ と曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ。

4 △OAB の辺 AB，OB の中点をそれぞれ C，D とする。辺 OA 上に OE : EA = 1 : 4 となる点 E をとる。線分 OC と線分 BE，AD との交点をそれぞれ P，Q とし，線分 AD と線分 BE の交点を R とする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，次の問いに答えよ。 解答 42 (p.93)

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$，$|\vec{b}| = 1$，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$ のとき，△PQR の面積を求めよ。

2.7　2007 年度

1 xy 平面上で，点 P は原点を出発点とし，さいころを 1 回投げるたびに以下のように進むものとする。1 または 2 の目が出たときは x 軸方向に 1 だけ進み，3 の目が出たときは x 軸方向に -1 だけ進み，4 または 5 の目が出たときは y 軸方向に 1 だけ進み，6 の目が出たときは y 軸方向に -1 だけ進む。以下の問いに答えよ。 解答 36 (p.86)

(1) さいころを 5 回投げるとき，点 P が座標 $(2, -3)$ の位置にいる確率を求めよ。

(2) さいころを 4 回投げるとき，点 P が x 軸上のみを動いて最後に原点にいる確率を求めよ。

(3) さいころを 2 回投げるとき，点 P の x 座標の期待値を求めよ。

2 四面体 OABC の 6 つの辺の長さを

$$\mathrm{OA} = \sqrt{10},\ \mathrm{OB} = \sqrt{5},\ \mathrm{OC} = \sqrt{6},\ \mathrm{AB} = \sqrt{5},\ \mathrm{AC} = 2\sqrt{2},\ \mathrm{BC} = \sqrt{5}$$

とする。以下の問いに答えよ。 解答 46 (p.98)

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のいずれとも直交することを示せ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

3 a を定数とする。2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2, \qquad C_2 : y = 3(x-1)^2 + a$$

について，以下の問いに答えよ。 解答 19 (p.69)

(1) C_1，C_2 の両方に接する直線が 2 本存在するための a の条件を求めよ。

(2) C_1，C_2 の両方に接する 2 本の直線が，直交するときの a の値を求めよ。

4 数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ は以下の条件を満たしているものとする。

$$\begin{aligned}
&x_1 = 8, \qquad y_1 = -5 \\
&x_{n+1} = 2x_n + y_n + 3n - 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\
&y_{n+1} = 2y_n + x_n - 3n + 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)
\end{aligned}$$

以下の問いに答えよ。 解答 51 (p.105)

(1) $z_n = x_n + y_n$，また $w_n = x_n - y_n$ とおく。数列 $\{z_n\}$ および $\{w_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) xy 平面上の点 $(x_n,\ y_n)$ と直線 $y = x$ との距離が最小になるような n の値をすべて求めよ。

2.8　2008 年度

1 a を実数とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y = a\cos\theta - 2\sin^2\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ $M(a)$，$m(a)$ とする。以下の問いに答えよ。 解答 2 (p.50)

(1) $M(a)$ と $m(a)$ を求めよ。

(2) a が実数全体を動くとき，$M(a)$ の最小値と $m(a)$ の最大値を求めよ。

2 n を 3 以上の自然数とする。以下の問いに答えよ。 解答 52 (p.106)

(1) $2 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k について，$k(k-1)_n\mathrm{C}_k = n(n-1)_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ を示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。

3 放物線 $y = 4x^2 + 3$ を C とする。x 軸上に点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ $(p \neq 0$ とする$)$，C 上に点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2+3)$ をとり，点 A における C の接線 l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ とする。さらに，点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2+3)$ における C の接線を m とする。以下の問いに答えよ。 解答 20 (p.71)

(1) q を p を用いて表せ。

(2) 接線 m が点 P を通るとする。p，q の値を求めよ。

(3) (2) で求めた p，q に対して，放物線 C と 2 つの接線 l，m で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 0,\ a_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

によって定められている。以下の問いに答えよ。

解答 53 (p.107)

(1) $b_n = n + a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ (n = 2, 3, 4, \cdots)$ を示せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が等比数列であることを示せ。

(3) a_n を求めよ。

(4) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

2.9　2009 年度

1 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_{x}^{2x}\left(\frac{1}{7}t^2-\frac{2}{3}t-3\right)dt$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。 解答 21 (p.72)

(1) $f(x)=0$ をみたす x をすべて求めよ。

(2) $-3 \leqq x \leqq 6$ における $f(x)$ の最小値を求めよ。

2 大小 2 個のサイコロを投げ，大きいサイコロの目の数を p，小さいサイコロの目の数を q とする。$y=px^2$ のグラフと $y=qx+\dfrac{1}{4}$ のグラフの交点のうち，x 座標が負のものを A，正のものを B とする。このとき，次の問いに答えよ。 解答 37 (p.87)

(1) 線分 AB の中点の x 座標が 1 より大きくなる確率を求めよ。

(2) A の x 座標が有理数となる確率を求めよ。

3 a，b を定数とし，$a>b$ をみたすものとする。

$$f(x)=a\cos^2 x+\sqrt{3}(a-b)\cos x\sin x+b\sin^2 x$$

とするとき，次の問いに答えよ。 解答 11 (p.62)

(1) $f(x)$ の最大値が 6，最小値が 2 となるときの a，b を求めよ。

(2) (1) で求めた a，b に対して，$f(x)$ を考える。$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$f(x)>5$ となる x の範囲を求めよ。

4 四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であり，△OAB の面積と △OAC の面積が等しいとする。このとき，次の問いに答えよ。 解答 47 (p.100)

(1) $\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ を示せ。

(2) △ABC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であることを示せ。

2.10　2010 年度

1 関数 $y = \sin^3 x - \cos^3 x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ について，以下の問いに答えよ。
解答 22 (p.73)

(1) $\sin x - \cos x = t$ とおいて，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) y を t の式で表せ。

(3) y の最大値および最小値を求めよ。

2 曲線 $C_1 : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線が曲線 $C_2 : y = x^2 - 4$ と交わる点を B，C とする。ただし，B の x 座標は C の x 座標より小さいとする。以下の問いに答えよ。
解答 23 (p.74)

(1) 線分 BC の中点 M および C の座標を a を用いて表せ。

(2) M を通り y 軸に平行な直線，線分 MC および曲線 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

3 赤球，白球，黒球，黄球，青球が各 1 個ずつ入っている袋が 3 つある。各袋から球を 1 個ずつ取り出す。以下の問いに答えよ。
解答 38 (p.88)

(1) 取り出した球の色が 2 種類となる確率を求めよ。

(2) 取り出した球の色の数の期待値を求めよ。

4 原点 O を中心として半径 1 の円の第 1 象限の部分 C について考える。

C 上に 3 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1)$ をとる。

$s + t = 1$ を満たす s，t $(0 < s < 1,\ 0 < t < 1)$ に対し，弧 AQ 上に点 X を 2 つのベクトル

$$s^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - s\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}, \quad t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$

が垂直になるようにとる。以下の問いに答えよ。
解答 43 (p.95)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を t を用いて表せ。

(2) $\cos\theta$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{OAX}$ の面積の最大値を求めよ。

2.11　2011 年度

1 四角形 ABCD において，

$$\mathrm{AB}=a,\quad \mathrm{BC}=b,\quad \mathrm{CD}=c,\quad \mathrm{DA}=d,\quad \mathrm{AC}=x,\quad \mathrm{BD}=y$$

とする。以下の問いに答えよ。 解答 4 (p.53)

(1) $\cos A$，$\cos B$，$\cos C$，$\cos D$ を a，b，c，d，x，y を用いて表せ。

(2) 四角形 ABCD が円に内接するとき，

$$xy=ac+bd$$

が成り立つことを示せ。

2 2 つの整数の平方の和で表される整数の集合を A とする。以下の問いに答えよ。 解答 40 (p.90)

(1) 集合 A のある要素 a^2+b^2 (a, b は整数) が 3 で割り切れるとき，a，b はともに 3 で割り切れることを示せ。

(2) x を整数とする。$9x$ が集合 A の要素であるとき，x は集合 A の要素であることを示せ。

3 2 つの放物線 $C_1: y=x^2$，$C_2: y=-x^2+2x-\dfrac{1}{2}$ を考える。点 $\mathrm{A}\left(t, -t^2+2t-\dfrac{1}{2}\right)$ における C_2 の接線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。 解答 24 (p.75)

(1) ℓ と C_1 との交点の x 座標を，t を用いて表せ。

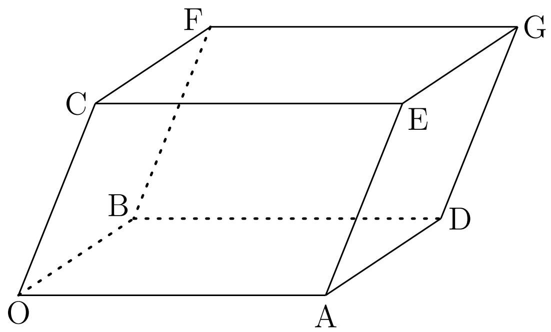
(2) 点 A の x 座標を $t=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ とするとき，第 1 象限において ℓ，C_1 および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を 2 : 3 に内分する点を N，辺 DG を 1 : 2 に内分する点を L とする。また，辺 OC を $k : 1-k$ $(0 < k < 1)$ に内分する点を K とする。このとき，以下の問いに答えよ。

解答 48 (p.101)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 M，N，K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ。



2.12　2012 年度

1 以下の問いに答えよ。 解答 1 (p.49)

(1) k を整数とするとき，x の方程式 $x^2 - k^2 = 12$ が整数解をもつような k の値をすべて求めよ。

(2) x の方程式 $(2a-1)x^2 + (3a+2)x + a + 2 = 0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつような整数 a の値とそのときの整数解をすべて求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ に対して次の漸化式が成り立つとする。

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 3,\quad a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。 解答 54 (p.108)

(1) 定数 c に対して $b_n = a_n + c$ で定められた数列 $\{b_n\}$ を考える。

$$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

を満たす c の値を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。

3 $f(\theta) = 4\left(\sin^3\dfrac{\theta}{2} + \cos^3\dfrac{\theta}{2}\right) + 6\left(\sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\dfrac{\theta}{2}\right)(\sin\theta - 2) - \sqrt{6}(\sin\theta + 1)$ とおく。ただし，θ の範囲は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ とする。以下の問いに答えよ。 解答 25 (p.76)

(1) $x = \sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\dfrac{\theta}{2}$ とおくとき，$f(\theta)$ を x のみの式で表せ。

(2) $f(\theta)$ の最小値そのときの θ の値を求めよ。

4 定数 a は $0 < a < 1$ をみたすとする。曲線 $C : y = (x-1)^2$ と C 上の点 $(a,\ (a-1)^2)$ における接線 ℓ について，以下の問いに答えよ。 解答 26 (p.77)

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と接線 ℓ および 2 直線 $x = 0$，$x = 1$ とで囲まれた 2 つの部分の面積の和 $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

(3) 曲線 C と 2 直線 $x = 0$，$y = 0$ とで囲まれ，接線 ℓ の上側にある 2 つの部分の面積の和 $T(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

2.13　2013 年度

1 n を 3 以上の奇数として，次の集合を考える。

$$A_n = \left\{ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}} \right\}$$

以下の問いに答えよ。 解答 39 (p.89)

(1) A_9 のすべての要素を求め，それらの和を求めよ。

(2) ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$ が A_n 内の最大の数であることを示せ。

(3) A_n 内の奇数の個数を m とする。m は奇数であることを示せ。

2 $f(x)$ を $x = -1$ で極大，$x = 2$ で極小となる 3 次関数で

$$\int_0^2 f'(x)\,dx = -5$$

を満たすものとする。以下の問いに答えよ。 解答 27 (p.78)

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の極大値と極小値の差を求めよ。

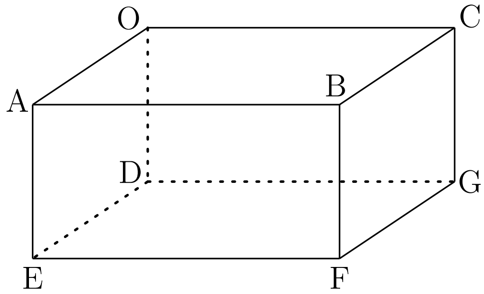
3 直方体 OABC-DEFG において，OA = OD = 1，OC = 2 とし，辺 EF の中点を M とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とし，点 P から線分 CM におろした垂線と線分 CM との交点を H とする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

解答 49 (p.102)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，t を用いて表せ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PH}}|^2$ の最小値を求めよ。



4 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n + n^2$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ。

解答 55 (p.109)

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2) a_n を n の式で表せ。

2.14　2014 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。また，点 D を $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{b} - \vec{a}$ を満たす点，点 E を $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \vec{c} - \vec{a}$ を満たす点とし，点 P を OA の中点とする。以下の問いに答えよ。 解答 45 (p.97)

(1) $0 < t < 1$ に対し，BD を $t : (1-t)$ に内分する点を R とし，CE を $(1-t) : t$ に内分する点を S とする．また，OB と PR の交点を M とし，OC と PS の交点を N とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) △OMN の面積を t を用いて表せ。

(3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，△OMN の面積の最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ △ABC において，

$$\angle\mathrm{BAC} = \theta, \qquad \mathrm{AB} = \sin\theta, \qquad \mathrm{AC} = |\cos\theta|$$

とする。ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とする。以下の問いに答えよ。

解答 28 (p.79)

(1) BC^2 の最大値と最小値を求めよ。

(2) △ABC の面積の最大値を求めよ。

3 放物線 $C : y = ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$ が点 P$(1, -2)$ と Q$(5,\ 10)$ を通るとし，P，Q における C の接線をそれぞれ l，m とする。以下の問いに答えよ。解答 29 (p.80)

(1) b，c をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) l と m の交点の y 座標が -4 であるとき，a，b，c を求めよ。

(3) (2) で求めた a，b，c について，放物線 C と l，m で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 1 次関数 $f_n(x) = a_nx + b_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ は以下の 2 つの条件を満たすとする。

(i) $f_1(x) = x$

(ii) $f_{n+1}(x)$ は整式 $P_n(x) = \displaystyle\int_1^x 6tf_n(t)\,dt$ を $x^2 + x$ で割った余りに等しい。

以下の問いに答えよ。解答 30 (p.81)

(1) $n \geqq 1$ のとき，a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数であることを示せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は 3 の倍数ではないことを示せ。

解答

解答 **1** (2012) 問題 (p.1)

(1) 整数解を m とすると $m^2-k^2=12$

$|m|^2-|k|^2=12$

ゆえに $(|m|+|k|)(|m|-|k|)=12$

ここで，$|m|+|k|=(|m|-|k|)+2|k|$ および上式の偶奇性により，$|m|+|k|$, $|m|-|k|$ はともに偶数であるから

$$\begin{cases} |m|+|k|=6 \\ |m|-|k|=2 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad |m|=4,\quad |k|=2$$

よって $\boldsymbol{k=\pm 2}$

(2) a は整数であるから $2a-1\neq 0$

したがって，x の方程式 $(2a-1)x^2+(3a+2)x+a+2=0$ の解は

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(3a+2)\pm\sqrt{(3a+2)^2-4(2a-1)(a+2)}}{2(2a-1)} \\ &= \frac{-(3a+2)\pm\sqrt{a^2+12}}{2(2a-1)} \end{aligned}$$

この方程式が整数解をもつとき

$$l^2=a^2+12 \quad \text{すなわち} \quad l^2-a^2=12$$

を満たす整数 l が存在するから，(1) の結果から，$a=\pm 2$

ゆえに， $a=2$ のとき $x=-2,-\dfrac{2}{3}$

$a=-2$ のとき $x=0,-\dfrac{4}{5}$

よって $\boldsymbol{a=2}$ **のとき** $\boldsymbol{x=-2}$

$\boldsymbol{a=-2}$ **のとき** $\boldsymbol{x=0}$

解答 2 (2008) 問題 (p.1)

(1) $a\cos\theta - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta + a\cos\theta - 2$ であるから

$\cos\theta = x$ とおくと，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$y = 2x^2 + ax - 2 = 2\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} - 2 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

ゆえに，この関数のグラフは下に凸の放物線で，

軸は $x = -\dfrac{a}{4}$ である．$-1 \leqq x \leqq 1$ の中央は　$x = 0$

最大値 $M(a)$ は，次の 2 つの場合に分けて求める．

2 次関数 (下に凸の放物線) の閉区間における最大値

定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり，
定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる．

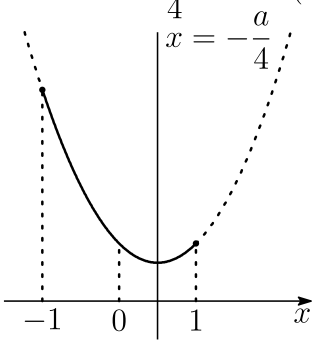
［1］$0 < -\dfrac{a}{4}$　すなわち　$a < 0$ のとき

$x = -1$ で最大値をとるから　$M(a) = 2(-1)^2 + a(-1) - 2 = -a$

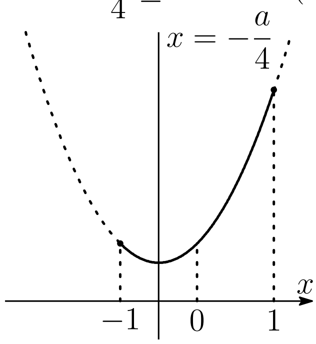
［2］$-\dfrac{a}{4} \leqq 0$　すなわち　$a \geqq 0$ のとき

$x = 1$ で最大値をとるから　$M(a) = 2{\cdot}1^2 + a{\cdot}1 - 2 = a$

［1］$0 < -\dfrac{a}{4}$ のとき $(a < 0)$



［2］$-\dfrac{a}{4} \leqq 0$ のとき $(a \geqq 0)$



したがって　　$\boldsymbol{M(a) = \begin{cases} -a & (a < 0) \\ a & (a \geqq 0) \end{cases}}$

最小値 $m(a)$ は，次の 3 つの場合に分けて求める．

［1］ $1 < -\dfrac{a}{4}$　すなわち　$a < -4$ のとき

$x = 1$ で最小値をとるから　$m(a) = 2 \cdot 1^2 + a \cdot 1 - 2 = a$

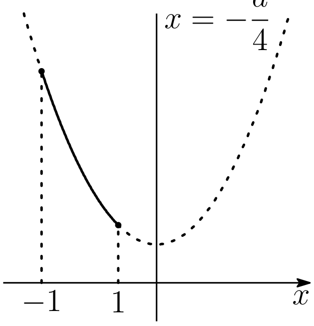
［2］ $-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$　すなわち　$-4 \leqq a \leqq 4$ のとき

$x = -\dfrac{a}{4}$ で最小値をとるから　$m(a) = -\dfrac{a^2}{8} - 2$

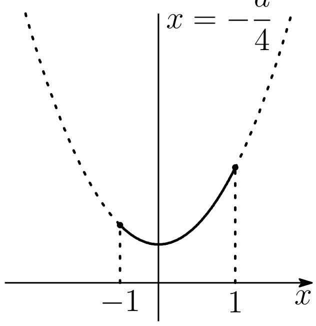
［3］ $-\dfrac{a}{4} < -1$　すなわち　$4 < a$ のとき

$x = -1$ で最小値をとるから　$m(a) = 2 \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1) - 2 = -a$

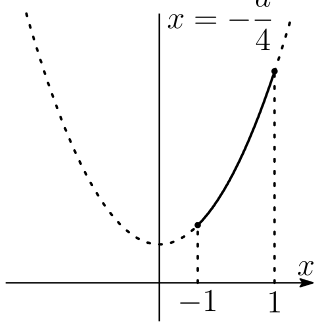
［1］ $1 < -\dfrac{a}{4}$ のとき
$(a < -4)$



［2］ $-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$ のとき
$(-4 \leqq a \leqq 4)$



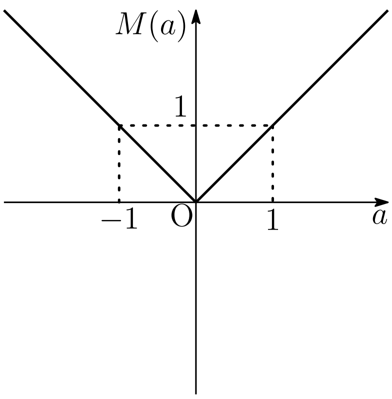
［3］ $-\dfrac{a}{4} < -1$ のとき
$(4 < a)$

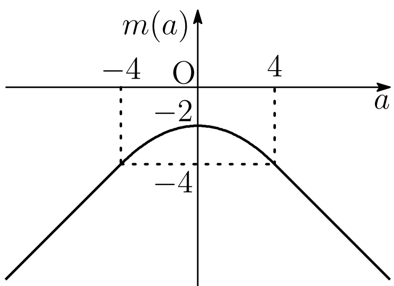


したがって　$$\boldsymbol{m(a) = \begin{cases} a & (a < -4) \\ -\dfrac{a^2}{8} - 2 & (-4 \leqq a \leqq 4) \\ -a & (4 < a) \end{cases}}$$

(2) (1) の結果から

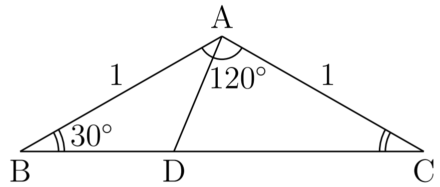
$M(a)$ の最小値は 0，　$m(a)$ の最大値は -2





解答 3 (2002) $\boxed{\text{問題 (p.1)}}$

(1) △ABC に余弦定理を適用して



$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cos A\\ &= 1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos120^\circ\\ &= 3\end{aligned}$$

$\mathrm{BC}>0$ より　$\mathrm{BC}=\sqrt{3}$

D は，BC を $m:n$ に内分する点であるから

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BC}\times\frac{m}{m+n}=\frac{\sqrt{3}m}{m+n}$$

△ABC は，$\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$ の二等辺三角形であるから　$\angle\mathrm{ABD}=30^\circ$

△ABD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cos B\\ &= 1^2+\left(\frac{\sqrt{3}m}{m+n}\right)^2-2\times1\times\frac{\sqrt{3}m}{m+n}\cos30^\circ\\ &= \frac{m^2-mn+n^2}{(m+n)^2}\end{aligned}$$

よって，正三角形 ADE の面積は

$$\triangle\mathrm{ADE}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}^2\sin60^\circ=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}(m^2-mn+n^2)}{4(m+n)^2}}$$

(2)
$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin A=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

このとき，$\triangle\mathrm{ABC}=3\times\triangle\mathrm{ADE}$ であるから

$$\frac{\sqrt{3}}{4}=3\times\frac{\sqrt{3}(m^2-mn+n^2)}{4(m+n)^2}\quad \text{ゆえに}\quad 2m^2-5mn+2n^2=0$$

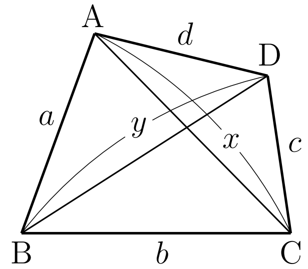
これから　$(m-2n)(2m-n)=0$　すなわち　$m=2n,\ n=2m$

よって　$\boldsymbol{m:n=2:1}$ **または** $\boldsymbol{1:2}$

解答 4 (2011) 問題 (p.2)

(1) 余弦定理により

$$\boldsymbol{\cos A = \frac{a^2+d^2-y^2}{2ad}}$$
$$\boldsymbol{\cos B = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}}$$
$$\boldsymbol{\cos C = \frac{b^2+c^2-y^2}{2bc}}$$
$$\boldsymbol{\cos D = \frac{c^2+d^2-x^2}{2cd}}$$



(2) 四角形 ABCD が円に内接するとき，$B+D=180^\circ$ より　$\cos B+\cos D=0$

(1) の結果をこれに代入して

$$\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}+\frac{c^2+d^2-x^2}{2cd}=0$$

したがって　$(ab+cd)x^2=cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)$

$$x^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \quad \cdots ①$$

同様に，$\cos A+\cos C=0$ に (1) の結果を代入して

$$\frac{a^2+d^2-y^2}{2ad}+\frac{b^2+c^2-y^2}{2bc}=0$$

したがって　$(ad+bc)y^2=bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)$

$$y^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc} \quad \cdots ②$$

①，② より　$x^2y^2=(ac+bd)^2$　よって　$xy=ac+bd$

トレミーの定理

複素数平面上に 4 点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) をとる．このとき次式が成り立つ．

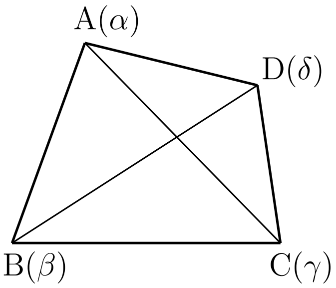
$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)=(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)$$

したがって

$$|\alpha-\beta||\gamma-\delta|+|\alpha-\delta||\beta-\gamma| \geqq |\alpha-\gamma||\beta-\delta|$$

よって，次の定理 (トレミーの定理) が成り立つ．

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC} \geqq \mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD} \quad \cdots(*)$$



とくに，($*$) で等号が成立するとき，正の実数 k を用いて

$$k(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)$$

ゆえに $$\frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\delta-\gamma}=-k$$

したがって $$\arg\frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}+\arg\frac{\beta-\gamma}{\delta-\gamma}=\pi$$

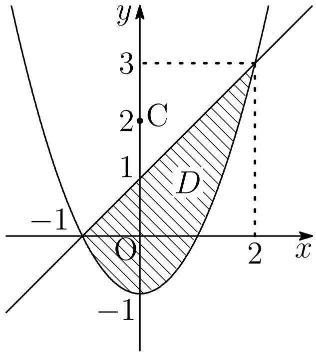
$$\angle\delta\alpha\beta+\angle\beta\gamma\delta=\pi$$

すなわち $$\angle\mathrm{DAB}+\angle\mathrm{BCD}=\pi$$

よって，4 点 A，B，C，D が同一円周上にあるときに限る．

解答 5 (2001) 問題 (p.2)

連立不等式の表す領域を D とすると，D は，右の図の斜線部分で境界を含む．



$$x^2+y^2-4y=x^2+(y-2)^2-4$$

であるから，点 C(0, 2) をとると，D 内の点 P$(x,\ y)$ について

$$x^2+y^2-4y=\mathrm{CP}^2-4$$

CP は D の境界で最大値・最小値をとるので，P が次の Q および R にあるとき，その最大値・最小値を調べる．

$$\mathrm{Q}(s,\ s+1)\ (-1\leqq s\leqq 2),\qquad \mathrm{R}(t,\ t^2-1)\ (-1\leqq t\leqq 2)$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{CQ}^2-4&=s^2+\{(s+1)-2\}^2-4\quad(-1\leqq s\leqq 2)\\&=2s^2-2s-3\\&=2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{CR}^2-4&=t^2+\{(t^2-1)-2\}^2-4\quad(-1\leqq t\leqq 2)\\&=t^4-5t^2+5\\&=\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\end{aligned}$$

ゆえに　$-\dfrac{7}{2}\leqq \mathrm{CQ}^2-4\leqq 1,\qquad -\dfrac{5}{4}\leqq \mathrm{CR}^2-4\leqq 5$

よって，x^2+y^2-4y は，D において**最大値 5，最小値 $-\dfrac{7}{2}$** をとる．

解答 6 (2002) 問題 (p.2)

(1) $a>1$，$a>p$，$\angle\mathrm{PQS}=135^\circ$，$\angle\mathrm{AQS}=45^\circ$ であるから，直線 AQ の傾きは -1，直線 PQ の傾きは 1 である．

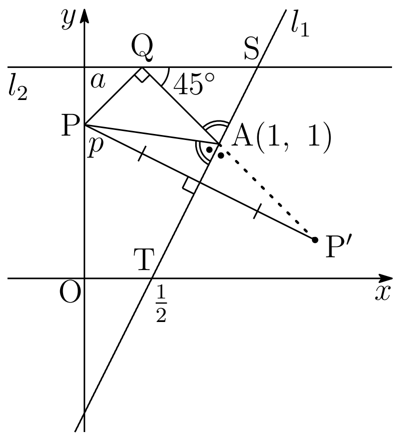
したがって，直線 AQ の方程式は

$$y-1=-1(x-1)$$

すなわち　$y=-x+2 \quad \cdots①$

直線 ① と直線 $l_2: y=a\cdots②$ の交点が Q であるから，①，② を解いて

$$\mathrm{Q}(2-a,\ a)$$



直線 PQ は，Q を通り傾き 1 の直線であるから，その方程式は

$$y-a=1\{x-(2-a)\} \quad \text{すなわち} \quad y=x+2a-2$$

ゆえに，P の座標は　$(0,\ 2a-2)$

よって　　$\boldsymbol{p=2a-2,\ q=2-a}$

(2) l_1 に関して，P と対称な点を $\mathrm{P}'(s,\ t)$ とする．

l_1 の傾きは 2，直線 PP′ の傾きは $\dfrac{t-2a+2}{s}$ である．$l_1 \perp \mathrm{PP}'$ であるから

$$2\times\frac{t-2a+2}{s}=-1 \quad \text{すなわち} \quad s+2t=4a-4 \quad \cdots③$$

線分 PP′ の中点 $\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{2a-2+t}{2}\right)$ が l_1 上にあるから

$$\frac{2a-2+t}{2}=2\times\frac{s}{2}-1 \quad \text{すなわち} \quad 2s-t=2a \quad \cdots④$$

③，④ を解いて $s=\dfrac{8a-4}{5}$，$t=\dfrac{6a-8}{5}$　ゆえに　$\mathrm{P}'\left(\dfrac{8a-4}{5},\ \dfrac{6a-8}{5}\right)$

$\angle\mathrm{PAT}=\angle\mathrm{QAS}$ であるとき，P′ は直線 ① 上にあるので

$$\frac{6a-8}{5}=-\frac{8a-4}{5}+2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=\frac{11}{7}}$$

これを (1) の結果に代入して　　$\boldsymbol{p=\dfrac{8}{7}}$

解答 7 (2003) $\boxed{\text{問題 (p.2)}}$

(1) 円 C の方程式から

$$x^2 + y^2 - 5 - 2k(2x - y) = 0$$

これが k の値に関係なく成り立つための条件は

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, \quad 2x - y = 0$$

上の 2 式を解いて　$(x,\ y) = (-1, -2),\ (1,\ 2)$

求める 2 定点 A，B は，x 座標に注意して　$\mathbf{A(-1, -2)}$，$\mathbf{B(1,\ 2)}$

(2) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．

P に関する条件は　　PA : PB = 2 : 1

これより　　$\mathrm{PA} = 2\mathrm{PB}$

すなわち　　$\mathrm{PA}^2 = 4\mathrm{PB}^2$

上式に

$$\mathrm{PA}^2 = (x+1)^2 + (y+2)^2, \quad \mathrm{PB}^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

を代入すると

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4\{(x-1)^2 + (y-2)^2\}$$

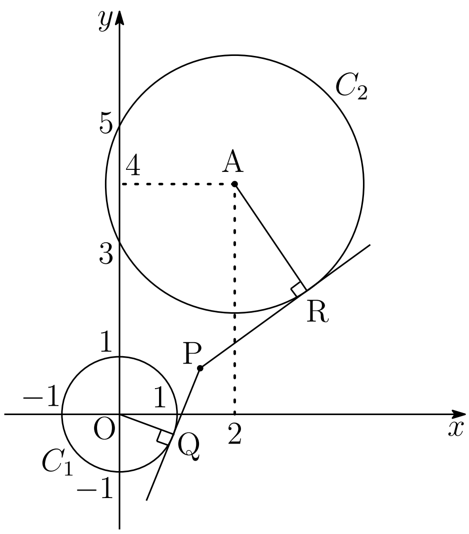
整理すると　　$x^2 + y^2 - \dfrac{10}{3}x - \dfrac{20}{3}y + 5 = 0$

すなわち　　$\left(x - \dfrac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \dfrac{10}{3}\right)^2 = \dfrac{80}{9}$

よって，点 P の軌跡は，**点 $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$ の円**である．

解答 8 (2004) 問題 (p.2)

問題 (p.2)



C_1，C_2 の中心をそれぞれ O，A とし，P から C_1，C_2 に引いた接線の接点を，それぞれ Q，R とする．

P の座標を $(x,\ y)$ とすると，P に関する条件は

$$\mathrm{PQ} : \mathrm{PR} = 1 : 2$$

これより　　$2\mathrm{PQ} = \mathrm{PR}$

すなわち　　$4\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{PR}^2$　$\cdots$ ①

$\triangle$OQP，$\triangle$ARP において，$\angle\mathrm{OQP} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{ARP} = 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{OP}^2 - \mathrm{OQ}^2 = x^2 + y^2 - 1$$
$$\mathrm{PR}^2 = \mathrm{AP}^2 - \mathrm{AR}^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 - 5$$

上の 2 式を ① に代入して，整理すると

$$4(x^2+y^2-1) = (x-2)^2 + (y-4)^2 - 5$$
$$3x^2 + 3y^2 + 4x + 8y - 19 = 0$$
$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{77}{9} \quad \cdots ②$$

C_1，C_2 の半径をそれぞれ r_1，r_2 とすると　　$r_1 = 1$，$r_2 = \sqrt{5}$

$\mathrm{OA} = 2\sqrt{5}$ より，$r_1 + r_2 < \mathrm{OA}$ であるから，2 円 C_1，C_2 は互いに外部にある．

よって，点 P は円 ② 上にある．

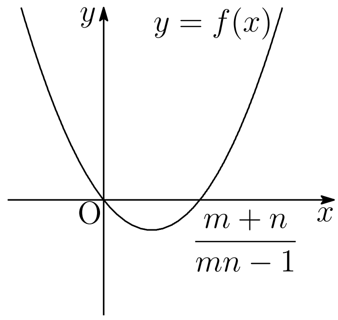
したがって，求める軌跡は，**点 $\left(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$ を中心とする半径 $\frac{\sqrt{77}}{3}$ の円**である．

解答 9 (2004) 問題 (p.3)

(1) $f(x) = (mx-1)(nx-1)-(x^2+1)$ とおくと

$$f(x) = (mn-1)x^2 - (m+n)x$$

$1 \leqq m < n$ より $mn-1 > 0 \cdots ①$ であるから，$y = f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，x 軸との共有点の x 座標は



$$x = 0,\quad \frac{m+n}{mn-1}$$

ここで

$$\begin{aligned} 3 - \frac{m+n}{mn-1} &= \frac{3(mn-1)-(m+n)}{mn-1} \\ &= \frac{(9mn-3m-3n+1)-10}{3(mn-1)} \\ &= \frac{(3m-1)(3n-1)-10}{3(mn-1)} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

m，n は $1 \leqq m < n$ である整数であるから　$n \geqq 2$

ゆえに　　$3m-1 \geqq 2$，$3n-1 \geqq 5$

$mn-1 > 0$，$(3m-1)(3n-1) \geqq 2{\cdot}5$ および ② から

$$3 - \frac{m+n}{mn-1} \geqq 0 \quad すなわち \quad \frac{m+n}{mn-1} \leqq 3 \quad \cdots ③$$

③ より，$x > 3$ のとき　$f(x) > 0$

すなわち　$x > 3$ のとき　$(mx-1)(nx-1) > x^2+1$

(2) $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}}=\frac{m+n}{mn-1}$$

$1 \leqq m < n$，①，③ より，$\tan(\alpha+\beta)$ がとる整数値は，3 以下の自然数であるから，次の 3 つに場合に分けて求める．

［1］$\tan(\alpha+\beta)=1$ のとき

$$\frac{m+n}{mn-1}=1 \quad ゆえに \quad (m-1)(n-1)=2$$

このとき，$0 \leqq m-1 < n-1$ に注意して

$$m-1=1,\ \ n-1=2 \quad すなわち \quad (m,\ n)=(2,\ 3)$$

［2］$\tan(\alpha+\beta)=2$ のとき

$$\frac{m+n}{mn-1}=2 \quad ゆえに \quad (2m-1)(2n-1)=5$$

このとき，$1 \leqq 2m-1 < 2n-1$ に注意して

$$2m-1=1,\ \ 2n-1=5 \quad すなわち \quad (m,\ n)=(1,\ 3)$$

［3］$\tan(\alpha+\beta)=3$ のとき

$$\frac{m+n}{mn-1}=3 \quad ゆえに \quad (3m-1)(3n-1)=10$$

このとき，$2 \leqq 3m-1 < 3n-1$ に注意して

$$3m-1=2,\ \ 3n-1=5 \quad すなわち \quad (m,\ n)=(1,\ 2)$$

［1］～［3］より　　$\boldsymbol{(m,\ n)=(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3)}$

解答 10 (2005) 問題 (p.3)

(1) (加法定理による証明)

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta)\\ &= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta\\ &= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta\\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$

(ド・モアブルの定理による証明) **旧課程 (数学 B) の『複素数平面』**

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\cdot i\sin\theta + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\end{aligned}$$

ド・モアブルの定理により　$(\cos\theta+i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

上の 2 式から

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

上式の虚部は等しいので

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\\ &= 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta\\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$

ド・モアブルの定理

整数 n に対して，次の等式が成り立つ．

$$\boldsymbol{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

(2) $\theta = 18^\circ$ のとき，$5\theta = 90^\circ$ より　$2\theta = 90^\circ - 3\theta$

ゆえに　$\cos 2\theta = \cos(90^\circ - 3\theta) = \sin 3\theta$

(3) (2) の結果に (1) および $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ を代入して整理すると

$$\begin{aligned}1 - 2\sin^2\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\\ 4\sin^3\theta - 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 &= 0\\ (\sin\theta - 1)(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1) &= 0\end{aligned}$$

$0 < \sin 18^\circ < 1$ であるから　$\boldsymbol{\sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

解答 11 (2009) 問題 (p.3)

(1)
$$\begin{aligned} f(x) &= a\cos^2 x + \sqrt{3}(a-b)\cos x\sin x + b\sin^2 x \\ &= a\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} + \sqrt{3}(a-b)\cdot\frac{\sin 2x}{2} + b\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} \\ &= \frac{a-b}{2}(\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x) + \frac{a+b}{2} \\ &= (a-b)\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) + \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

$a > b$ より $a-b>0$，$-1 \leqq \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) \leqq 1$ であるから

$$-(a-b)+\frac{a+b}{2} \leqq (a-b)\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{a+b}{2} \leqq (a-b)+\frac{a+b}{2}$$

ゆえに $$\frac{-a+3b}{2} \leqq f(x) \leqq \frac{3a-b}{2}$$

したがって $\frac{3a-b}{2}=6$，$\frac{-a+3b}{2}=2$　これを解いて　$\boldsymbol{a=5,\ b=3}$

(2) (1) の結果から　$f(x) = 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4$

$f(x)>5$ より　$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$　$\cdots$①

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき　$\frac{\pi}{6} \leqq 2x+\frac{\pi}{6} \leqq \frac{\pi}{6}+2\pi$

この範囲で ① を解くと

$$\frac{\pi}{6} < 2x+\frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{0 < x < \frac{\pi}{3}}$$

解答 12 (2003) 問題 (p.3)

真数は正であるから　$x>0$　かつ　$6-x>0$

すなわち　$0<x<6$

また　$f(x)=\log_2 x(6-x)^2$

ここで，$g(x)=x(6-x)^2$ とおくと

$$g'(x)=3(x-6)(x-2)$$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	極大 32	↘	

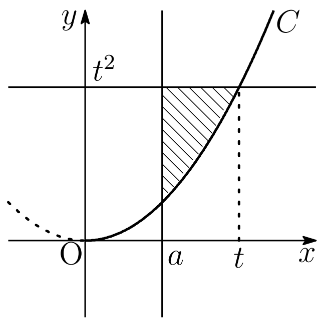
$g(x)$ の増減表は右のようになる．

したがって，$g(x)$ は $x=2$ で極大かつ最大となり，$g(x)$ が最大値をとるとき，$f(x)$ も最大値をとる．

よって，$f(x)$ は，$\boldsymbol{x=2}$ **で最大値** $\log_2 32=\mathbf{5}$ をとる．

解答 13 (2001) 問題 (p.4)

(1) $S(t)$ は，右の図の斜線部分の面積である．



$$\begin{aligned}S(t)&=\int_a^t (t^2-x^2)\,dx\\&=\left[\,t^2x-\frac{1}{3}x^3\,\right]_a^t\\&=\frac{1}{3}(2t^3-3at^2+a^3)\\&=\frac{1}{3}(t-a)^2(2t+a)\qquad\cdots①\end{aligned}$$

① より

$$S\left(\frac{t+a}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{t+a}{2}-a\right)^2\left(2\cdot\frac{t+a}{2}+a\right)=\frac{1}{12}(t-a)^2(t+2a)\qquad\cdots②$$

①，② より

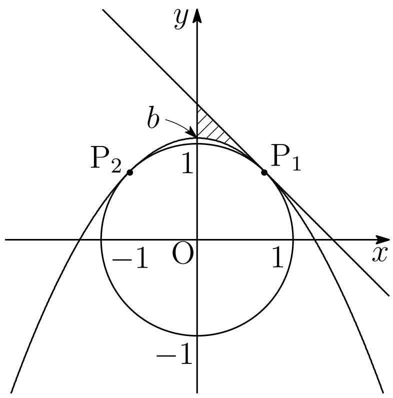
$$\frac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}=\frac{1}{3}(t-a)^2(2t+a)\times\frac{12}{(t-a)^2(t+2a)}=\boldsymbol{\frac{4(2t+a)}{t+2a}}$$

(2) (1) の結果から　$8-\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}=8-\dfrac{4(2t+a)}{t+2a}=\dfrac{12a}{t+2a}$

$0<a<t$ であるから　$\dfrac{12a}{t+2a}>0$

ゆえに　$8-\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}>0$　よって　$\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}<8$

解答 **14** (2002) $\boxed{\text{問題 (p.4)}}$



(1) (2) $\mathrm{P_1}(p,\ q)$ は，C および円周上の点であるから

$$q = ap^2 + b \quad \cdots ①$$
$$p^2 + q^2 = 1 \quad \cdots ②$$

$y = ax^2 + b$ を微分すると　$y' = 2ax$

$\mathrm{P_1}$ における C の接線の傾きは　$2ap$

直線 $\mathrm{OP_1}$ の傾きは　$\dfrac{q}{p}$

$\mathrm{P_1}$ における C の接線と直線 $\mathrm{OP_1}$ は，垂直であるから

$$2ap \times \frac{q}{p} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q = -\frac{1}{2a}} \quad \cdots ③$$

③ を ② に代入すると

$$p^2 + \frac{1}{4a^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p^2 = 1 - \frac{1}{4a^2}$$

$a < -\dfrac{1}{2}$，$p > 0$ に注意して　$\boldsymbol{p = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4a^2}}}$　$\cdots ④$

③，④ を ① に代入すると

$$-\frac{1}{2a} = a\left(1 - \frac{1}{4a^2}\right) + b \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b = -\left(a + \frac{1}{4a}\right)}$$

(3) $\angle \mathrm{P_1OP_2} = 90^\circ$ のとき，直線 $\mathrm{OP_1}$ の傾きは 1 であるから

$$\frac{q}{p} = 1 \quad \text{すなわち} \quad q = p$$

③，④ をこれに代入すると　$-\dfrac{1}{2a} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4a^2}}$

$a < -\dfrac{1}{2}$ に注意して解くと　$a = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$\mathrm{P_1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\mathrm{P_1}$ における C の接線は，傾き -1 の直線であるから，その方程式は

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = -x + \sqrt{2}$$

このとき，b の値は，(1) の結果から　$b=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

よって，求める部分の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{(-x+\sqrt{2}) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\right\} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \mathbf{\frac{1}{12}}
\end{aligned}
$$

解答 15 (2003) 問題 (p.4)

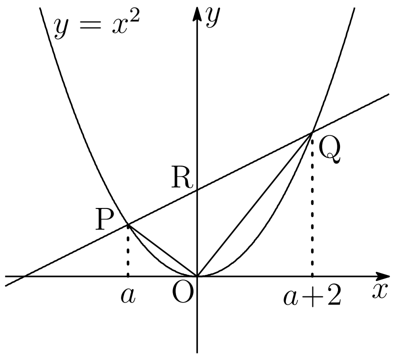
(1) 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(a+2,\ (a+2)^2)$ を通る直線の方程式は

$$
y-a^2=\frac{(a+2)^2-a^2}{(a+2)-a}(x-a)
$$

すなわち　$y=2(a+1)x-a(a+2)$

この直線と y 軸の交点を R とすると，$-2<a<0$ より

$$
\mathrm{OR}=-a(a+2)
$$



ゆえに，$\triangle$OPQ の面積 S_1 は

$$
S_1=\frac{1}{2}\mathrm{OR}\times\{(a+2)-a\}=\frac{1}{2}\{-a(a+2)\}\times 2=\boldsymbol{-a(a+2)}
$$

(2) 直線 PQ と放物線で囲まれた部分の面積は，上の図から

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \int_a^{a+2}\{2(a+1)x-a(a+2)-x^2\}\,dx \\
&= -\int_a^{a+2}(x-a)\{x-(a+2)\}\,dx \\
&= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{(a+2)-a\}^3=\mathbf{\frac{4}{3}}
\end{aligned}
$$

(3) $S_2=2S_1$ に (1)，(2) の結果を代入すると

$$
\frac{4}{3}=-2a(a+2)\quad \text{ゆえに}\quad 3a^2+6a+2=0
$$

$-2<a<0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{a=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{3}}$

解答 16 (2004) 問題 (p.4)

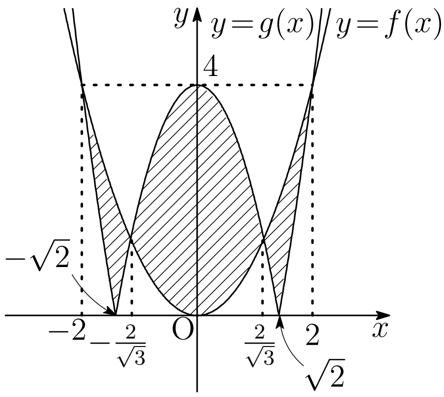
(1) $f(x) = g(x)$ より　$x^2 = |2x^2 - 4|$ すなわち　$2x^2 - 4 = \pm x^2$

したがって　$2x^2 - 4 = x^2$　を解いて　$x = \pm 2$

$2x^2 - 4 = -x^2$　を解いて　$x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

よって　$\boldsymbol{x = \pm 2,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

(2) $f(-x) = f(x)$，$g(-x) = g(x)$ が成り立つので，下の図のように $y = f(x)$，$y = g(x)$ のグラフは，ともに y 軸に関して対称である．



したがって，求める面積を S とすると，(1) で求めた結果により

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \{(4 - 2x^2) - x^2\}\,dx + \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \{x^2 - (4 - 2x^2)\}\,dx$$

$$+ \int_{\sqrt{2}}^{2} \{x^2 - (2x^2 - 4)\}\,dx$$

$$= \Big[-x^3 + 4x\Big]_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} + \Big[\,x^3 - 4x\,\Big]_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} + \Big[-\frac{x^3}{3} + 4x\Big]_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$= \frac{32\sqrt{3}}{9} - \frac{16\sqrt{2}}{3} + \frac{16}{3}$$

よって　$S = \boldsymbol{\dfrac{64\sqrt{3}}{9} - \dfrac{32\sqrt{2}}{3} + \dfrac{32}{3}}$

解答 17 (2005) 問題 (p.4)

P から放物線に引いた 2 本の接線の接点を Q，R とし，それぞれの点における接線の傾きを m_1，m_2 とする $(m_1 \neq m_2)$.

$y' = 2x$ より，接点の座標は　　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{m_1}{2},\ \dfrac{{m_1}^2}{4}\right)$，　$\mathrm{R}\left(\dfrac{m_2}{2},\ \dfrac{{m_2}^2}{4}\right)$

Q における接線の方程式は

$$y - \frac{{m_1}^2}{4} = m_1\left(x - \frac{m_1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = m_1 x - \frac{{m_1}^2}{4} \quad \cdots ①$$

同様に，R における接線の方程式は　　$y = m_2 x - \dfrac{{m_2}^2}{4} \quad \cdots ②$

直線 ①，② の交点が P であるから，$m_1 \neq m_2$ に注意して ①，② を解くと

$$x = \frac{m_1 + m_2}{4}, \quad y = \frac{m_1 m_2}{4}$$

①，② は直交するので，$m_1 m_2 = -1$ より，P の座標は　$\left(\dfrac{{m_1}^2 - 1}{4m_1}, -\dfrac{1}{4}\right)$

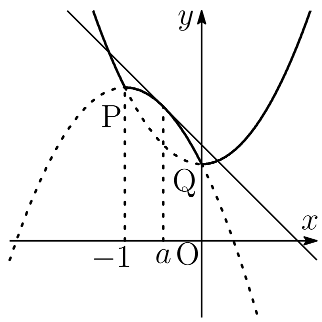
m_1 は 0 でない任意の実数であるから，P の軌跡は　**直線** $\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{4}}$

解答 18 (2006) $\boxed{\text{問題 (p.5)}}$

(1) [1] $x(x+1) \geqq 0$　すなわち

$x \leqq -1$，$0 \leqq x$ のとき

$f(x) = x(x+1) - x + 1 = x^2 + 1$



[2] $x(x+1) < 0$　すなわち

$-1 < x < 0$ のとき

$f(x) = -x(x+1) - x - 1 = -x^2 - 2x + 1$

[1], [2] より，曲線 C は右の図のようになる．

直線 PQ の傾きは　$\dfrac{1-2}{0-(-1)} = -1$

$f'(x) = -2x - 2$ より点 $(a, f(a))$ における接線 ℓ の傾きは　$-2a - 2$

この点における接線が直線 PQ に平行であるから

$$-2a - 2 = -1$$

$-1 < a < 0$ に注意して　　$\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2}}$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{4}$ より，接線 ℓ の方程式は

$$y - \frac{7}{4} = -\left\{x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -x + \frac{5}{4}}$$

(2) 求める面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^{0} \{(-x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 1)\}\,dx \\ &= -2\int_{-1}^{0} (x+1)x\,dx = -2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\{0-(-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(3) 曲線 C と接線 ℓ の接点以外の交点の x 座標は

$$x^2+1=-x+\frac{5}{4} \quad \text{すなわち} \quad x^2+x-\frac{1}{4}=0 \quad \cdots ①$$

の解である．この解を α，β $(\alpha<\beta)$ とおき，求める面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_\alpha^\beta \left\{ \left(-x+\frac{5}{4}\right) - (x^2+1) \right\} dx - S_1 \\ &= -\int_\alpha^\beta \left(x^2+x-\frac{1}{4}\right) dx - \frac{1}{3} \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

① の解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=-\dfrac{1}{4}$

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-1)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=2$$

$\alpha<\beta$ より $\beta-\alpha=\sqrt{2}$ であるから

$$S_2=\frac{1}{6}(\sqrt{2})^3-\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-1}{3}}$$

解答 19 (2007) $\boxed{\text{問題 (p.5)}}$

(1) $y=-x^2$ を微分すると　$y'=-2x$

C_1 上の点 $(t,-t^2)$ における接線を ℓ とすると，ℓ の傾きは $-2t$ であるから，接線の方程式は

$$y-(-t^2)=-2t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=-2tx+t^2$$

ℓ と C_2 の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} & 3(x-1)^2+a=-2tx+t^2 \\ \text{すなわち} \quad & 3x^2+2(t-3)x-t^2+a+3=0 \end{aligned}$$

の解であり，ℓ と C_2 が接するとき，この方程式は重解をもつので

$$(t-3)^2-3\cdot(-t^2+a+3)=0 \quad \text{すなわち} \quad 4t^2-6t-3a=0 \quad \cdots ①$$

このとき，ℓ が 2 本存在するためには，① の判別式を D とすると，$D>0$ であるから

$$D/4=(-3)^2-4\cdot(-3a)>0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a>-\frac{3}{4}}$$

別解

C_1 は上に凸，C_2 は下に凸の放物線であるから，C_1 と C_2 が共有点をもたないとき，C_1，C_2 の両方に接する直線が 2 本存在する．
したがって，$y=-x^2$，$y=3(x-1)^2+a$ から y を消去して

$$-x^2=3(x-1)^2+a \quad \text{すなわち} \quad 4x^2-6x+a+3=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，$D<0$ であるから

$$D/4=(-3)^2-4\cdot(a+3)<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a>-\frac{3}{4}}$$

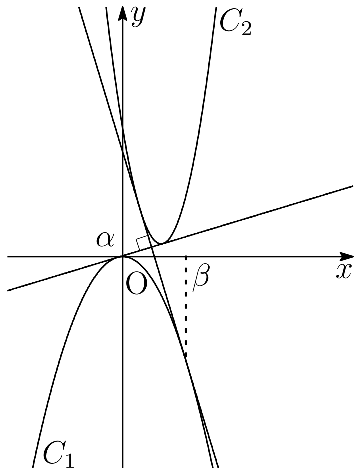
(2) ① の 2 解を α，β とすると，2 点 $(\alpha, -\alpha^2)$，$(\beta, -\beta^2)$ における接線の傾きは，それぞれ 2α，2β であり，これらが直交するとき

$$2\alpha\cdot 2\beta=-1 \quad \text{すなわち} \quad \alpha\beta=-\frac{1}{4}$$

また，① の解と係数の関係から　$\alpha\beta=-\dfrac{3a}{4}$

したがって　$-\dfrac{3a}{4}=-\dfrac{1}{4}$

$a>-\dfrac{3}{4}$ に注意して　$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$



解答 20 (2008) 問題 (p.5)

(1) $y=4x^2+3$ を微分すると　$y'=8x$
点 A$(p,\ 4p^2+3)$ における接線 l の傾きは $8p$ であるから，その方程式は

$$y-(4p^2+3)=8p(x-p)$$

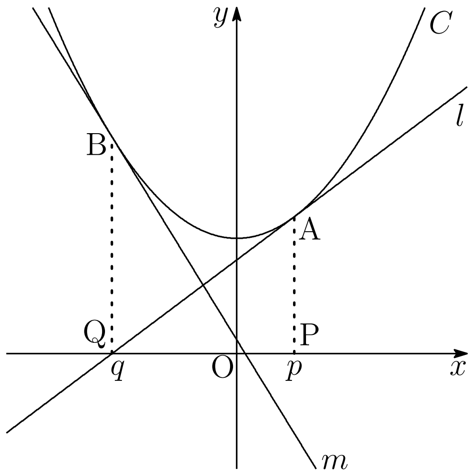
すなわち　$y=8px-4p^2+3$

l は Q$(q,\ 0)$ を通るから

$$0=8pq-4p^2+3 \quad \cdots①$$

$p\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{q=\frac{4p^2-3}{8p}}$$



(2) 点 B$(q,\ 4q^2+3)$ における接線 m の方程式は，(1) と同様にして

$$y=8qx-4q^2+3$$

を得る．これが点 P$(p,\ 0)$ を通るから

$$0=8pq-4q^2+3 \quad \cdots②$$

①，② より　$q=\pm p$

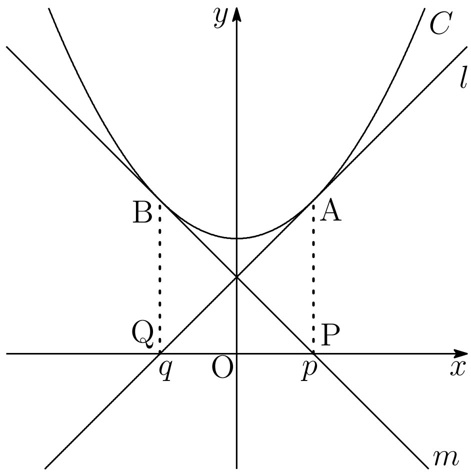
$q=p$ のとき，① より

　$4p^2+3=0$ となり，不適

$q=-p$ のとき，① より

　$0=-12p^2+3$

となり，これを解いて　$\boldsymbol{(p,\ q)=\left(\pm\frac{1}{2},\ \mp\frac{1}{2}\right)}$ **(複号同順)**



(3) (2) の結果から，2 本の接線の方程式は　$y=4x+2$，$y=-4x+2$

これらの接線と放物線で囲まれた部分は，y 軸に関して対称であるから，求める面積 S は

$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\{(4x^2+3)-(4x+2)\}\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

解答 21 (2009) 問題 (p.5)

(1) $f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\left(\frac{1}{7}t^2-\frac{2}{3}t-3\right)dt=\left[\frac{t^3}{21}-\frac{t^2}{3}-3t\right]_x^{2x}$

$$=\frac{(2x)^3-x^3}{21}-\frac{(2x)^2-x^2}{3}-3(2x-x)$$

$$=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$$

$f(x)=0$ より $\quad \dfrac{x^3}{3}-x^2-3x=0$

ゆえに $\quad x(x^2-3x-9)=0$

よって $\quad \boldsymbol{x=0,\ \dfrac{3\pm3\sqrt{5}}{2}}$

(2) (1) の結果から

$$f'(x)=x^2-2x-3$$
$$=(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ とすると $\quad x=-1,\ 3$

$-3\leqq x\leqq 6$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-9	$\nearrow$	極大 $\frac{5}{3}$	$\searrow$	極小 -9	$\nearrow$	18

よって，$f(x)$ は $x=\pm3$ で**最小値 $\boldsymbol{-9}$** をとる．

解答 22 (2010) $\boxed{\text{問題 (p.6)}}$

(1) $$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より $-\dfrac{\pi}{4} \leqq x - \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ よって $\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}}$

(2) $t = \sin x - \cos x \cdots$ ① の両辺を平方すると

$$t^2 = 1 - 2\sin x\cos x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x\cos x = \frac{1-t^2}{2} \quad \cdots ②$$

$y = \sin^3 x - \cos^3 x$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned}\sin^3 x - \cos^3 x &= (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x)\\ &= (\sin x - \cos x)(1 + \sin x\cos x)\end{aligned}$$

上式に ①，② を代入すると

$$\sin^3 x - \cos^3 x = t\left(1 + \frac{1-t^2}{2}\right) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$$

よって $$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}y' &= -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}\\ &= -\frac{3}{2}(t+1)(t-1)\end{aligned}$$

$y' = 0$ とすると $x = -1,\ 1$

$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ における y の増減表は，次のようになる．

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	極大 1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって，y は

$t = 1$ すなわち $x = \dfrac{\pi}{2},\ \pi$ のとき **最大値 1 をとり，**

$t = -1$ すなわち $x = 0$ のとき **最小値 -1 をとる．**

解答 23 (2010) 問題 (p.6)

(1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

C_1 上の点 A における接線の傾きは $2a$ であるから，その方程式は

$$y-a^2=2a(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y=2ax-a^2$$

この接線と $C_2: y=x^2-4$ の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y=2ax-a^2 \\ y=x^2-4 \end{cases}$$

の解であるから，2 式から y を消去して

$$x^2-4=2ax-a^2$$

ゆえに　$(x-a)^2=4$

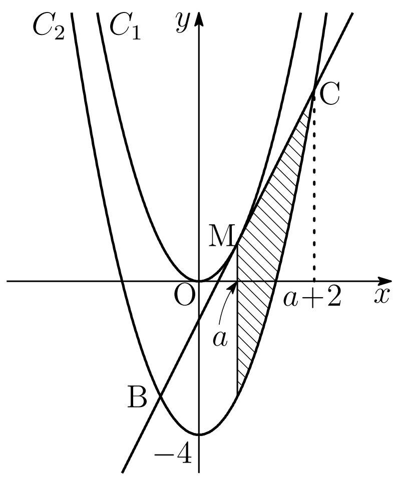
したがって　$x=a\pm 2$

B，C の x 座標は，それぞれ $a-2$，$a+2$ であるから

$$\mathrm{B}(a-2,\ a^2-4a),\quad \boldsymbol{\mathrm{C}(a+2,\ a^2+4a)}$$

よって，BC の中点 M の座標は　$\boldsymbol{(a,\ a^2)}$

(2) 求める面積 S は，右の図から



$$\begin{aligned} S &= \int_a^{a+2}\{(2ax-a^2)-(x^2-4)\}\,dx \\ &= \int_a^{a+2}\{4-(x-a)^2\}\,dx \\ &= \left[\,4x-\frac{1}{3}(x-a)^3\,\right]_a^{a+2} \\ &= \boldsymbol{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$

解答 24 (2011) $\boxed{\text{問題 (p.6)}}$

(1) $y=-x^2+2x-\frac{1}{2}$ を微分すると　$y'=-2x+2$

点 $\mathrm{A}\left(t, -t^2+2t-\frac{1}{2}\right)$ における接線 l の方程式は

$$y-\left(-t^2+2t-\frac{1}{2}\right)=(-2t+2)(x-t)$$

すなわち　$y=(-2t+2)x+t^2-\dfrac{1}{2}$

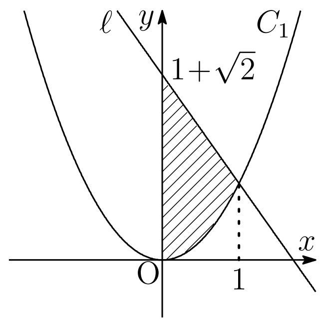
l と C_1 の交点の x 座標は

$$x^2=(-2t+2)x+t^2-\frac{1}{2}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{x=-t+1\pm\frac{2t-1}{\sqrt{2}}}$$

(2) $t=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，ℓ の方程式は，(1) の結果から　$y=-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}$

また，ℓ と C_1 の交点の x 座標は　$x=1, -1-\sqrt{2}$

右の図から，求める面積を S とすると



$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\{(-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2})-x^2\}dx\\&=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+(1+\sqrt{2})x\right]_0^1\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}}\end{aligned}$$

解答 25 (2012) 問題 (p.6)

(1) $x=\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}$ の両辺を平方すると　$x^2=1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=1+\sin\theta$

ゆえに　$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(x^2-1),\quad \sin\theta=x^2-1$

$$\begin{aligned}\sin^3\frac{\theta}{2}+\cos^3\frac{\theta}{2}&=\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^3-3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)\\&=x^3-3\cdot\frac{1}{2}(x^2-1)x=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x\end{aligned}$$

したがって，上の諸式より

$$\begin{aligned}f(\theta)&=4\left(\sin^3\frac{\theta}{2}+\cos^3\frac{\theta}{2}\right)+6\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)(\sin\theta-2)-\sqrt{6}(\sin\theta+1)\\&=4\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x\right)+6x\{(x^2-1)-2\}-\sqrt{6}\{(x^2-1)+1\}\\&=\boldsymbol{4x^3-\sqrt{6}x^2-12x}\end{aligned}$$

(2)
$$x=\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi\right)\quad\cdots①$$

このとき　$\frac{\pi}{4}\leqq\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\leqq\pi$　ゆえに　$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$

(1) の結果より　$g(x)=4x^3-\sqrt{6}x^2-12x\quad(0\leqq x\leqq\sqrt{2})$

ゆえに　$g'(x)=12x^2-2\sqrt{6}x-12=2(2x-\sqrt{6})(3x+\sqrt{6})$

したがって，$g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	極小 $-\frac{9}{2}\sqrt{6}$	$\nearrow$	

また，① により $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$　すなわち　$\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

$\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}$　ゆえに　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

よって，$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{-\frac{9}{2}\sqrt{6}}$ をとる．

解答 26 (2012) 問題 (p.6)

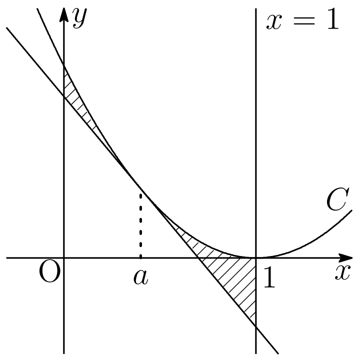
(1) $y=(x-1)^2$ を微分すると　$y'=2(x-1)$

ゆえに，ℓ の方程式は

$$y-(a-1)^2=2(a-1)(x-a)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=2(a-1)x-a^2+1}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_0^1\Big[(x-1)^2-\{2(a-1)x-a^2+1\}\Big]dx\\&=\int_0^1(x^2-2ax+a^2)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+a^2x\right]_0^1\\&=a^2-a+\frac{1}{3}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\end{aligned}$$

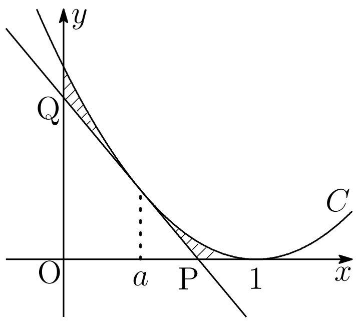


$0<a<1$ より，

$S(a)$ は $\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$ で最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{12}}$ をとる．

(3) ℓ の x 軸および y 軸との交点を，それぞれ

$\mathrm{P}\left(\frac{a+1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}(0,-a^2+1)$ とすると



$$\begin{aligned}T(a)&=\int_0^1(x-1)^2dx-\triangle\mathrm{OPQ}\\&=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1-\frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{2}\cdot(-a^2+1)\\&=\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a+\frac{1}{12}\end{aligned}$$

これを微分すると　$T'(a)=\frac{1}{4}(3a^2+2a-1)=\frac{1}{4}(a+1)(3a-1)$

ゆえに，$T(a)$ の増減表は，右のようになる．

よって，$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{27}}$ をとる．

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$T'(a)$		$-$	0	$+$	
$T(a)$		$\searrow$	極小 $\frac{1}{27}$	$\nearrow$	

解答 27 (2013) 問題 (p.7)

(1) 3次関数 $f(x)$ は，$x=-1,\ 2$ で極値をとるから，定数 a を用いて

$$f'(x)=a(x+1)(x-2)=a(x^2-x-2)$$

とおける．

$$\begin{aligned}\int_0^2 f'(x)\,dx &= a\int_0^2 (x^2-x-2)\,dx\\ &= a\left[\,\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{x}-2x\,\right]_0^2=-\frac{10}{3}a\end{aligned}$$

このとき　$-\dfrac{10}{3}a=-5$　ゆえに　$a=\dfrac{3}{2}$

よって　　$\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{3}{2}(x^2-x-2)}$

(2) 極大値 $f(-1)$ と極小値 $f(2)$ の差は

$$\begin{aligned}f(-1)-f(2) &= \int_2^{-1} f'(x)\,dx\\ &= \frac{3}{2}\int_2^{-1}(x+1)(x-2)\,dx\\ &= \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(-1-2)^3=\boldsymbol{\frac{27}{4}}\end{aligned}$$

解答 28 (2014) 問題 (p.8)

(1) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \sin^2\theta + |\cos\theta|^2 - 2\sin\theta|\cos\theta|\cos\theta \\ &= 1 - 2\sin\theta|\cos\theta|\cos\theta\end{aligned}$$

(i) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき，$|\cos\theta| = \cos\theta$ であるから

$$\mathrm{BC}^2 = 1 - 2\sin\theta\cos^2\theta = 1 - 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) = 2\sin^3\theta - 2\sin\theta + 1$$

(ii) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき，$|\cos\theta| = -\cos\theta$ であるから

$$\mathrm{BC}^2 = 1 + 2\sin\theta\cos^2\theta = 1 + 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) = -2\sin^3\theta + 2\sin\theta + 1$$

ここで，関数 $f(t) = -2t^3 + 2t$ $(0 < t < 1)$ をおくと　$f'(t) = -2(3t^2 - 1)$

$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	(0)

$t = \sin\theta$ とおくと　$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき　$\mathrm{BC}^2 = -f(t) + 1$
$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき　$\mathrm{BC}^2 = f(t) + 1$

よって，BC^2 の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{9} + 1}$，最小値は $\boldsymbol{-\dfrac{4\sqrt{3}}{9} + 1}$

(2) $$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\sin\theta|\cos\theta|\sin\theta = \frac{1}{2}\sin^2\theta|\cos\theta| \\ &= \frac{1}{2}(1-|\cos\theta|^2)|\cos\theta| = \frac{1}{2}(-|\cos\theta|^3 + |\cos\theta|)\end{aligned}$$

$u = |\cos\theta|$ とおくと，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ に注意して

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}(-u^3 + u) = \frac{1}{4}(-2u^3 + 2u) = \frac{1}{4}f(u) \quad (0 < u < 1)$$

よって，(1) の増減表により，求める最大値は

$$\frac{1}{4} \times \frac{4\sqrt{3}}{9} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}}$$

解答 29 (2014) 問題 (p.9)

(1) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ が点 P$(1,-2)$，Q$(5,\ 10)$ を通るから

$$-2=a+b+c,\quad 10=25a+5b+c$$

これを解いて　$\boldsymbol{b=-6a+3,\ c=5a-5}$

(2) $f(x)=ax^2+(-6a+3)x+5a-5$ とおくと，$f'(x)=2ax-6a+3$ より

$$f'(1)=-4a+3,\quad f'(5)=4a+3$$

ゆえに，P における接線 l の方程式は

$$y-(-2)=(-4a+3)(x-1)$$

すなわち　$y=(-4a+3)x+4a-5$　$\cdots$①

また，Q における接線 m の方程式は

$$y-10=(4a+3)(x-5)$$

すなわち　$y=(4a+3)x-20a-5$　$\cdots$②

l と m の交点は，①，② を解いて　$(3,-8a+4)$

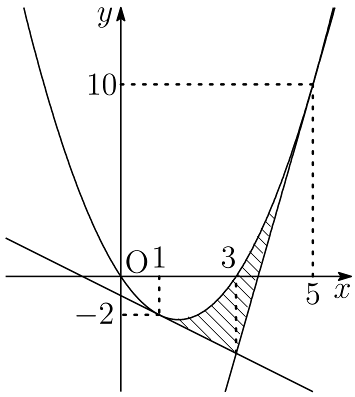
この交点の y 座標が -4 であるから

$$-8a+4=-4\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{a=1}$$

これを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{b=-3,\ c=0}$

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_1^3\{(x^2-3x)-(-x-1)\}dx\\&\qquad+\int_3^5\{(x^2-3x)-(7x-25)\}dx\\&=\int_1^3(x-1)^2\,dx+\int_3^5(x-5)^2\,dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^3+\left[\frac{1}{3}(x-5)\right]_3^5=\boldsymbol{\frac{16}{3}}\end{aligned}$$



解説 l と m の交点の x 座標は　$x=\dfrac{1+5}{2}$

(3) で求めた面積 S に対して，C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は $2S$ である (九大 2009 年一般前期文系数学 $\boxed{\textbf{4}}$ の補足 [1] を参照).

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf

解答 30 (2014) 問題 (p.10)

(1) $f_n(x)=a_nx+b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ より

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\int_1^x 6tf_n(t)\,dt=\int_1^x 6t(a_nt+b_n)\,dt\\&=\int_1^x(6a_nt^2+6b_nt)\,dt=\Big[\,2a_nt^3+3b_nt^2\,\Big]_1^x\\&=2a_nx^3+3b_nx^2-2a_n-3b_n\end{aligned}$$

$P_n(x)$ を x^2+x で割ることにより

$$P_n(x)=(x^2+x)\{2a_nx+(3b_n-2a_n)\}+(2a_n-3b_n)x-2a_n-3b_n$$

$P_n(x)$ を x^2+x で割った余り $(2a_n-3b_n)x-2a_n-3b_n$ が $a_{n+1}x+b_{n+1}$ に等しいので，同じ次数の係数を比較して

$$\boldsymbol{a_{n+1}=2a_n-3b_n,\qquad b_{n+1}=-2a_n-3b_n}$$

(2) $f_1(x)=x$ より　$a_1=1$，$b_1=0$

これと (1) の結果により，a_n と b_n は整数である．

［1］$n=2$ のとき　$a_2=2a_1-3b_1=2$，$b_2=-2a_1-3b_1=-2$
よって，a_2 と b_2 は偶数である．

［2］$n=k$ のとき，a_k と b_k が偶数であると仮定すると

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=2a_k-3b_k, & b_{k+1}&=-2a_k-3b_k\\&=2(a_k-b_k)-b_k & &=-2(a_k+b_k)-b_k\end{aligned}$$

したがって，a_{k+1} と b_{k+1} も偶数である．

［1］,［2］から，$n\geqq 2$ のとき，a_n と b_n は偶数である．

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数である．

(3) ［1］$a_2=2$，$b_2=-2$ より，a_2 と b_2 は 3 の倍数でない．

［2］$n=k$ のとき，a_k と b_k が 3 の倍数でないと仮定すると

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=2a_k-3b_k, & b_{k+1}&=-2a_k-3b_k\\&=3(a_k-b_k)-a_k & &=-3(a_k+b_k)+a_k\end{aligned}$$

したがって，a_{k+1} と b_{k+1} も 3 の倍数でない．

［1］,［2］から，$n\geqq 2$ のとき，a_n と b_n は 3 の倍数でない．

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は 3 の倍数でない．

解答 31 (2001) 問題 (p.11)

和が偶数になるのは，3 枚が偶数または 1 枚が偶数で 2 枚が奇数の場合である．したがって，和が偶数になる確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_9\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_3}=\frac{20+6\times 36}{455}=\boldsymbol{\frac{236}{455}}$$

また，和が奇数になる確率は，この余事象の確率であるから

$$1-\frac{236}{455}=\boldsymbol{\frac{219}{455}}$$

解答 32 (2002) 問題 (p.11)

$a_n \leqq 9$ となる確率を p_n とする．

［1］$n=1$ のとき　すべての X_1 に対して $a_1=X_1\leqq 9$ であるから　$p_1=1$

［2］$n=2$ のとき

1 の目が 2 回出るのは，1 通り

1 の目が 1 回だけ出るのは，残りの目が 1 以外で　$5\times{}_2\mathrm{C}_1$ (通り)

1 の目が出ないのは，次の 6 通り

$$(X_1,\ X_2)=(2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)$$

したがって　$p_2=\dfrac{1+5\times{}_2\mathrm{C}_1+6}{6^2}=\dfrac{17}{36}$

［3］$n\geqq 3$ のとき，1 以外の目が出る回数は 3 回以内であることに注意して

1 の目が n 回出るのは，1 通り

1 の目が $(n-1)$ 回だけ出るのは，残りの目が 1 以外で　$5\times{}_n\mathrm{C}_1$ (通り)

1 の目が $(n-2)$ 回だけ出るのは，残りの目が次の組合せで　$6\times{}_n\mathrm{C}_2$ (通り)

$$(2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)$$

1 の目が $(n-3)$ 回だけ出るのは，残りの目が $(2,\ 2,\ 2)$ で　${}_n\mathrm{C}_3$ (通り)

したがって

$$\begin{aligned}p_n&=\frac{1}{6^n}(1+5\times{}_n\mathrm{C}_1+6\times{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3)\\&=\frac{1}{6^n}\left\{1+5n+3n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right\}\\&=\frac{1}{6^{n+1}}(n^3+15n^2+14n+6)\qquad\cdots①\end{aligned}$$

① は，$n=1$，$n=2$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{p_n=\frac{1}{6^{n+1}}(n^3+15n^2+14n+6)}$$

解答 33 (2003) $\boxed{\text{問題 (p.11)}}$

(1) 6 枚から 2 枚取り出す方法は $\quad {}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\cdot5}{2\cdot1} = 15$ (通り)

$m=n$ となるのは，$(m,\ n)=(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3)$ の 3 通り

よって，求める確率は $\quad \dfrac{3}{15} = \boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

(2) 点 $(m,\ n)$ から直線 $y=x+c$ $(x-y+c=0)$ までの距離を d とすると

$$d = \frac{|m-n+c|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|m-n+c|}{\sqrt{2}}$$

よって $\quad S = d^2 = \dfrac{1}{2}(m-n+c)^2$

$m-n=1$ となるのは，$(m,\ n)=(2,\ 1),\ (3,\ 2)$ で，その確率は

$$\frac{2\times2}{15} + \frac{2\times2}{15} = \frac{8}{15}$$

$m-n=2$ となるのは，$(m,\ n)=(3,\ 1)$ で，その確率は

$$\frac{2\times2}{15} = \frac{4}{15}$$

よって，(1) および上の結果から，S の期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}c^2\times\frac{1}{5} + \frac{1}{2}(1+c)^2\times\frac{8}{15} + \frac{1}{2}(2+c)^2\times\frac{4}{15} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{30}(15c^2+32c+24)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $\quad E = \dfrac{1}{2}\left(c+\dfrac{16}{15}\right)^2 + \dfrac{52}{225}$

よって，期待値 E が最小となる c の値は $\quad \boldsymbol{c = -\dfrac{16}{15}}$

解答 34 (2005) 問題 (p.11)

(1) $X=1$ から $X=4$ までのそれぞれの確率の和は 1 であるから

$$2a+b+b+a=1 \quad \text{これを } b \text{ について解くと} \quad b=\frac{1-3a}{2}$$

また，$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ に注意して　$\boldsymbol{b=\frac{1-3a}{2}} \quad \boldsymbol{\left(0 \leqq a \leqq \frac{1}{3}\right)}$

(2) ともに 1 である確率は　$(2a)^2=4a^2$

ともに 2 以下である確率は　$(2a+b)^2=\left(2a+\dfrac{1-3a}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}$

ともに 3 以下である確率は　$(1-a)^2=a^2-2a+1$

ゆえに

$$\begin{aligned}
P(Z=1)&=4a^2\\
P(Z=2)&=\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)-4a^2=-\frac{15}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\\
P(Z=3)&=(a^2-2a+1)-\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}a^2-\frac{5}{2}a+\frac{3}{4}\\
P(Z=4)&=1-(a^2-2a+1)=-a^2+2a
\end{aligned}$$

よって，m は

$$\begin{aligned}
m&=\sum_{k=1}^{4}k\cdot P(Z=k)\\
&=1\cdot 4a^2+2\left(-\frac{15}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)+3\left(\frac{3}{4}a^2-\frac{5}{2}a+\frac{3}{4}\right)+4\left(-a^2+2a\right)\\
&=\boldsymbol{-\frac{21}{4}a^2+\frac{3}{2}a+\frac{11}{4}} \quad \boldsymbol{\left(0 \leqq a \leqq \frac{1}{3}\right)}
\end{aligned}$$

(3) したがって，(2) の結果から

$$m=-\frac{21}{4}\left(a-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{20}{7} \quad \left(0 \leqq a \leqq \frac{1}{3}\right)$$

よって，m は，$\boldsymbol{a=\frac{1}{7}}$ **で最大となる．**

解答 35 (2006) 問題 (p.12)

(1) $y = ax^2 + 2x - b = a\left(x + \dfrac{1}{a}\right)^2 - \dfrac{1}{a} - b$

$a > 0$ であるから　最小値は $-\dfrac{1}{a} - b$

条件より　$-\dfrac{1}{a} - b < -5$　すなわち　$5 - b < \dfrac{1}{a}$

$0 < \dfrac{1}{a} \leqq 1$ であり，$5 - b$ は整数であるから

$$5 - b \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = 5,\ 6$$

また，a は 1，2，3，4，5，6 の 6 通りある．

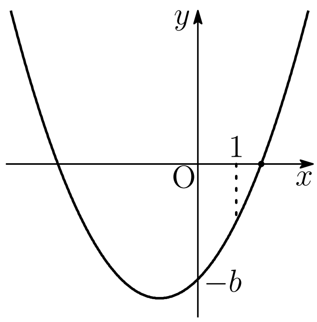
よって　$\dfrac{6 \times 2}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(2) $f(x) = ax^2 + 2x - b$ とおくと

$$f(0) = -b < 0$$

$a > 0$ かつ $f(0) < 0$ より $f(1) < 0$ を満たせばよいから

$$f(1) = a + 2 - b < 0 \text{ より} \quad b > a + 2$$



これを満たすのは，

$$(a, b) = (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 6)$$

の 6 通り．　よって　$\dfrac{6}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

(3) 2 式より　$ax^2 + 2x - b = bx^2$　すなわち　$(a - b)x^2 + 2x - b = 0$

条件を満たすのは，$a - b \neq 0$ かつ 判別式 $D > 0$ のときであるから

$$D/4 = 1 + b(a - b) > 0 \text{ より} \quad b(b - a) < 1$$

$b(b - a)$ は整数で，$a - b \neq 0$ であるから

$$b(b - a) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad b < a$$

$b < a$ を満たす a，b の組は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{6^2} = \mathbf{\frac{5}{12}}$$

解答 36 (2007) $\boxed{\text{問題 (p.12)}}$

(1) P が点 $(2, -3)$ の位置にいるためには，x 軸方向に 2 回以上，y 軸方向に 3 回以上移動しなければならない．したがって，さいころを 5 回投げてこの位置にいるためには x 軸方向に 1 だけ進む移動を 2 回，y 軸方向へ -1 だけ進む移動を 3 回行うことになる．すなわち，さいころを 5 回投げて，1 または 2 の目が出る回数が 2 回，6 の目が出る回数が 3 回である確率を求めればよい．

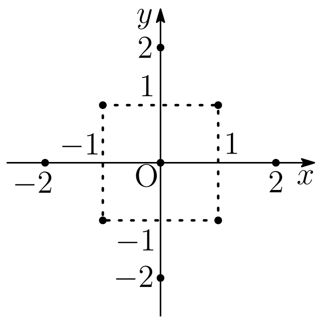
$$ {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{972}} $$

(2) x 軸方向のみを移動して P が原点にいるためには，x 軸方向に 1 だけ進む回数と x 軸方向へ -1 だけ進む回数はともに 2 である．したがって，求める確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{54}} $$

(3) さいころを 2 回投げたとき，点 P の座標は

x 座標が -2 のとき　$(-2,\ 0)$
x 座標が -1 のとき　$(-1,\ 1),\ (-1, -1)$
x 座標が 0 のとき　$(0,\ 2),\ (0,\ 0),\ (0, -2)$
x 座標が 1 のとき　$(1,\ 1),\ (1, -1)$
x 座標が 2 のとき　$(2,\ 0)$



となる．ゆえにそれぞれの確率は

x 座標が -2 のとき　$\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

x 座標が -1 のとき　${}_2\mathrm{C}_1 \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + {}_2\mathrm{C}_1 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$

x 座標が 0 のとき　$\left(\frac{2}{6}\right)^2 + {}_2\mathrm{C}_1 \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} \times 2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$

x 座標が 1 のとき　${}_2\mathrm{C}_1 \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} + {}_2\mathrm{C}_1 \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{12}{36}$

x 座標が 2 のとき　$\left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{4}{36}$

したがって，点 P の x 座標の期待値は

$$ (-2) \times \frac{1}{36} + (-1) \times \frac{6}{36} + 0 \times \frac{13}{36} + 1 \times \frac{12}{36} + 2 \times \frac{4}{36} = \boldsymbol{\frac{1}{3}} $$

解答 37 (2009) 問題 (p.12)

(1) $y=px^2$，$y=qx+\dfrac{1}{4}$ から y を消去すると

$$px^2-qx-\frac{1}{4}=0 \quad \cdots ①$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-q)^2-4{\cdot}p{\cdot}\left(-\frac{1}{4}\right)=q^2+p$$

$p>0$ より $D>0$ となり，2 次方程式 ① は異なる 2 つの実数解をもつ．
その解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{q}{p},\quad \alpha\beta=-\frac{1}{4p}$$

$p>0$ より $\alpha\beta<0$ であるから，A，B の x 座標はそれぞれ α，β となる．
線分 AB の中点の x 座標 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ が 1 より大きいので，上の第 1 式より

$$\frac{q}{2p}>1 \quad \text{すなわち} \quad q>2p$$

これをみたす $(p,\ q)$ の組は，次の 6 組である．

$$(p,\ q)=(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6)$$

よって，求める確率は $\quad \dfrac{6}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(2) A の x 座標 α は 2 次方程式 ① の負の解

$$\frac{q-\sqrt{q^2+p}}{2p}$$

であり，これが有理数となるは，q^2+p が平方数のときである．

q^2+p の値は右の表のようなる．

$q \backslash p$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	5	6	7	8	9	10
3	10	11	12	13	14	15
4	17	18	19	20	21	22
5	26	27	28	29	30	31
6	37	38	39	40	41	42

条件をみたす $(p,\ q)$ の組は，$(p,\ q)=(3,\ 1),\ (5,\ 2)$ の 2 組である．

よって，求める確率は $\quad \dfrac{2}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{18}}$

解答 38 (2010) 問題 (p.12)

(1) 球の取り出し方の総数は　5^3 (通り)

取り出した球の 2 色を A(2 個)，B(1 個) とすると，3 つの袋から順に取り出したとき，次の 3 つの場合がある．

「AAB」,「ABA」,「BAA」

それぞれの場合について，A，B の色の球の取り出し方は　${}_5\mathrm{P}_2$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{3 \times {}_5\mathrm{P}_2}{5^3} = \dfrac{3 \times 5 \cdot 4}{5^3} = \boldsymbol{\dfrac{12}{25}}$

(2) 球の色が 1 色であるのは 5 通りあり，その確率は

$$\frac{5}{5^3} = \frac{1}{25}$$

球の色が 3 色であるのは ${}_5\mathrm{P}_3$ 通りあり，その確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{P}_3}{5^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{5^3} = \frac{12}{25}$$

色	1	2	3	計
確率	$\frac{1}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{12}{25}$	1

よって，求める期待値 E は

$$E = 1 \times \frac{1}{25} + 2 \times \frac{12}{25} + 3 \times \frac{12}{25} = \boldsymbol{\frac{61}{25}}$$

解答 39 (2013) 問題 (p.12)

(1)
$$\begin{aligned} A_9 &= \{{}_9\mathrm{C}_1,\ {}_9\mathrm{C}_2,\ {}_9\mathrm{C}_3,\ {}_9\mathrm{C}_4\} \\ &= \{9,\ 36,\ 84,\ 126\} \end{aligned}$$

求める要素の和は　$9+36+84+126=\mathbf{255}$

(2) n は 3 以上の奇数であるから，$n=2l+1$ (l は自然数) とおくと

$$A_n = \{{}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_l\}$$

自然数 k を $1 \leqq k < l$ とすると

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_{k+1} - {}_n\mathrm{C}_k &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} - \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!\{(n-k)-(k+1)\}}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n-2k-1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!\{(2l-1)-2k-1\}}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!\cdot 2(l-k)}{(k+1)!(n-k)!} > 0 \end{aligned}$$

ゆえに　$ {}_n\mathrm{C}_1 < {}_n\mathrm{C}_2 < \cdots < {}_n\mathrm{C}_l$

よって，A_n 内の最大の数は ${}_n\mathrm{C}_l$，すなわち ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$ である．

別解 $\dfrac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}}{{}_n\mathrm{C}_k} - 1 = \dfrac{n-k}{k+1} - 1 = \dfrac{2\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}{k+1} > 0$

(3) 2 項定理により　$ {}_n\mathrm{C}_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{l} {}_n\mathrm{C}_k + \sum_{k=l+1}^{2l} {}_n\mathrm{C}_k + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n \quad \cdots ①$

ここで　$\displaystyle\sum_{k=l+1}^{2l} {}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=n-l}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{l} {}_n\mathrm{C}_{n-k} = \sum_{k=1}^{l} {}_n\mathrm{C}_k \quad \cdots ②$

② を ① に代入して整理すると　$\displaystyle\sum_{k=1}^{l} {}_n\mathrm{C}_k = 2^{n-1} - 1$

n は 3 以上の奇数であるから，A_n の和が奇数である．

よって，A_n 内の奇数の個数 m は，奇数である．

解答 40 (2011) 問題 (p.13)

(1) k を整数とすると

$$(3k)^2 = 3{\cdot}3k^2,\quad (3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$$

したがって，$a^2 + b^2$ が 3 で割り切れるのは，a，b がともに 3 で割り切れるときに限る．

(2) $9x \in A$ のとき

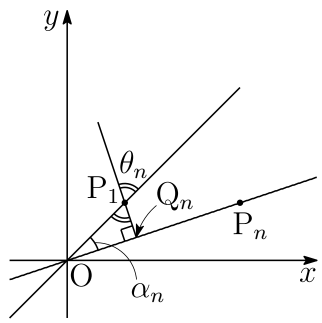
$$a^2 + b^2 = 9x = 3{\cdot}3x$$

をみたす整数 a，b が存在する．このとき，$a^2 + b^2$ は 3 で割り切れるから，(1) の結論により，$a = 3p$，$b = 3q$ をみたす整数 p，q が存在し

$$(3p)^2 + (3q)^2 = 9x \quad \text{ゆえに} \quad p^2 + q^2 = x$$

よって　　$x \in A$

解答 41 (2001) $\boxed{\text{問題 (p.13)}}$



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=(n,\ 1)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=n+1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|^2=n^2+1$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}-\frac{\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right)}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\\&=(1,\ 1)-\frac{n+1}{n^2+1}(n,\ 1)\\&=\boldsymbol{\left(\frac{1-n}{n^2+1},\ \frac{n^2-n}{n^2+1}\right)}\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ のなす角を α_n とすると

$$\cos\alpha_n=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}||\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|}=\frac{n+1}{\sqrt{2}\sqrt{n^2+1}}$$

また　$\sin^2\alpha_n=1-\cos^2\alpha_n=1-\dfrac{(n+1)^2}{2(n^2+1)}=\dfrac{(n-1)^2}{2(n^2+1)}$

$\sin\alpha_n>0$ であるから　$\sin\alpha_n=\dfrac{n-1}{\sqrt{2(n^2+1)}}$

$\theta_n=90^\circ-\alpha_n$ であるから

$$\cos\theta_n=\cos(90^\circ-\alpha_n)=\sin\alpha_n=\boldsymbol{\frac{n-1}{\sqrt{2(n^2+1)}}}$$

(3) $$\tan^2\alpha_n=\frac{1}{\cos^2\alpha_n}-1=\frac{2(n^2+1)}{(n+1)^2}-1=\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$$

$0<\alpha_n<90^\circ$ であるから $\tan\alpha_n>0$ より　$\tan\alpha_n=\dfrac{n-1}{n+1}$

$\theta_n=90^\circ-\alpha_n$ であるから

$$\tan\theta_n=\tan(90^\circ-\alpha_n)=\frac{1}{\tan\alpha_n}=\frac{n+1}{n-1}$$

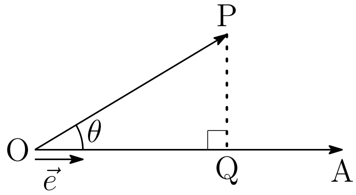
$\tan\theta_n<1.01$ をみたす最小の n は

$$\frac{n+1}{n-1}<1.01\quad\text{ゆえに}\quad n>201$$

したがって，これをみたす最小の n は　**202**

解説

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ とし，単位ベクトル $\vec{e}$ を



$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|} \quad \cdots ①$$

とすると，P から OA に下ろした垂線の足 Q について

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta)\vec{e} \quad \cdots ②$$

また，$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$

これと ① を ② に代入すると　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$

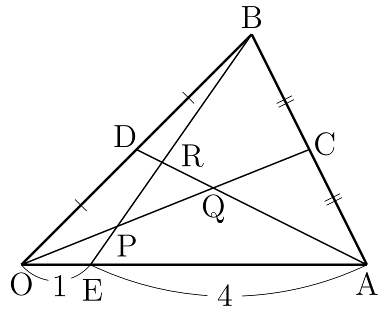
よって　　$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

解答 42 (2006) 問題 (p.13)

(1) 点 P は線分 OC 上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (0 \leqq k \leqq 1)$$

とおける．



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{k}{2}\vec{b} \\ &= \frac{5k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}} + \frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

点 P は線分 BE 上にあるから

$$\frac{5k}{2} + \frac{k}{2} = 1$$

これを解くと　　$k = \dfrac{1}{3}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{6}\vec{a} + \dfrac{1}{6}\vec{b} \quad \cdots①$

点 Q は △OAB の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \quad \cdots②$$

①，② より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) - \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}}\end{aligned}$$

(2) 点 R は線分 AD 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OD}} \quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

とおける．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= (1-s)\vec{a} + \frac{s}{2}\vec{b} \\ &= 5(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OE}} + \frac{s}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

点 R は線分 BE 上にあるから

$$5(1-s)+\frac{s}{2}=1$$

これを解くと　　$s=\dfrac{8}{9}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}$　$\cdots$ ③

①，③ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\left(\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}\right)-\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}\right)\\&=\boldsymbol{-\frac{1}{18}\vec{a}+\frac{5}{18}\vec{b}}\end{aligned}$$

(3) △PQR の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}$$

であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2&=\left|\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2\\&=\frac{1}{36}(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)\\&=\frac{1}{36}(5+2+1)=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2&=\left|-\frac{1}{18}(\vec{a}-5\vec{b})\right|^2\\&=\frac{1}{324}(|\vec{a}|^2-10\vec{a}\cdot\vec{b}+25|\vec{b}|^2)\\&=\frac{1}{324}(5-10+25)=\frac{5}{81}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}&=\left\{\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b})\right\}\cdot\left\{-\frac{1}{18}(\vec{a}-5\vec{b})\right\}\\&=-\frac{1}{108}(|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2)\\&=-\frac{1}{108}(5-4-5)=\frac{1}{27}\end{aligned}$$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{5}{81}-\left(\dfrac{1}{27}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{18}}$

解答 43 (2010) $\boxed{\text{問題 (p.13)}}$

(1) $(s^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - s\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}) \perp (t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OX}})$ より

$$(s^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - s\,\overrightarrow{\mathrm{OX}})\cdot(t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}) = 0$$

であるから

$$s^2t|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - (s^2t^2 + st)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}} + st^2|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2 = 0 \quad \cdots ①$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}| = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ のなす角が θ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\cos\theta = 1\cdot 1\cos\theta = \cos\theta$$

これらを ① に代入すると

$$s^2t - (s^2t^2 + st)\cos\theta + st^2 = 0$$

ゆえに　$st(st+1)\cos\theta = st(s+t)$

$0 < s < 1$，$0 < t < 1$，$s + t = 1$，$s = 1 - t$ より

$$\cos\theta = \frac{s+t}{st+1} = \frac{1}{(1-t)t+1} = \boldsymbol{\frac{1}{-t^2+t+1}}$$

(2) $-t^2 + t + 1 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$ であるから

$0 < t < 1$ において　$1 < -t^2 + t + 1 \leqq \frac{5}{4}$

よって，(1) の結果から　$\boldsymbol{\frac{4}{5} \leqq \cos\theta < 1}$

(3) $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ であるから，(2) の結果から

$$0 < \sin\theta \leqq \frac{3}{5}$$

$\triangle\mathrm{OAX} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$ であるから

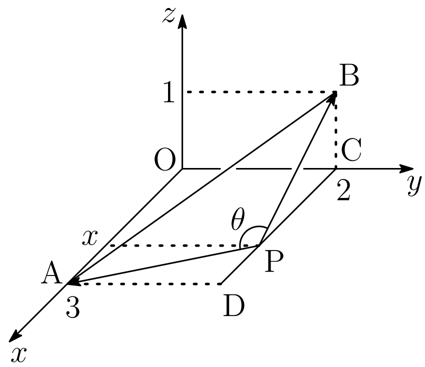
$$0 < \triangle\mathrm{OAX} \leqq \frac{3}{10}$$

よって，$\triangle$OAX の面積の最大値は　$\boldsymbol{\frac{3}{10}}$

解答 44 (2005) $\boxed{\text{問題 (p.14)}}$

(1) P は線分 CD 上の点であるから　　$0 \leqq x \leqq 3$

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (3,\ 0,\ 0) - (x,\ 2,\ 0) = (3-x, -2,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (0,\ 2,\ 1) - (x,\ 2,\ 0) = (-x,\ 0,\ 1)$$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (3-x)\cdot(-x) + (-2)\cdot 0 + 0\cdot 1 = x^2 - 3x$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = \sqrt{(3-x)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = \sqrt{(-x)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 1}$$

よって　　$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|} = \boldsymbol{\dfrac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}\sqrt{x^2 + 1}}}$　　$\boldsymbol{(0 \leqq x \leqq 3)}$

(2) $\triangle$PAB の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x^2 - 6x + 13)(x^2 - 3x) - (x^2 - 3x)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5x^2 - 6x + 13} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{56}{5}} \end{aligned}$$

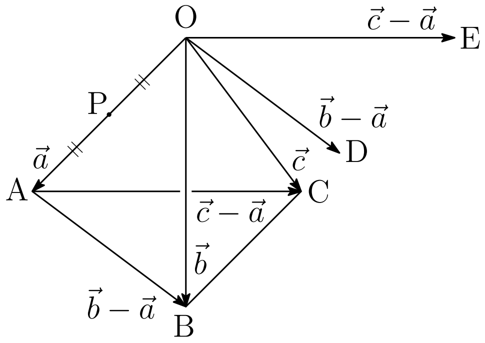
$0 \leqq x \leqq 3$ において，S は最小値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{56}{5}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{70}}{5}}$ をとる．

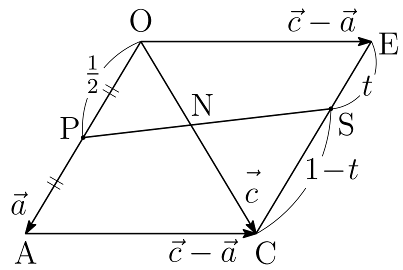
解答 45 (2014) 問題 (p.15)

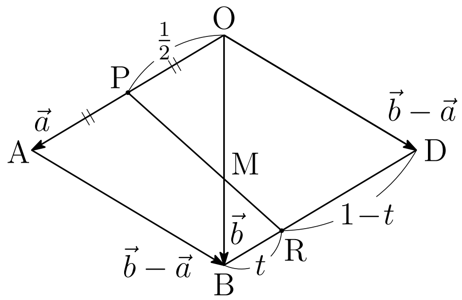
(1) $\triangle\mathrm{OPM} \backsim \triangle\mathrm{BRM}$，$\triangle\mathrm{OPN} \backsim \triangle\mathrm{CSN}$ であるから，

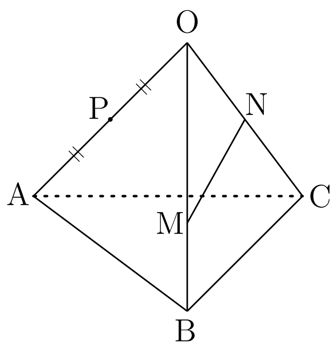
これらの相似比から　$\mathrm{OM}:\mathrm{MB} = \dfrac{1}{2}:t,\quad \mathrm{ON}:\mathrm{NC} = \dfrac{1}{2}:(1-t)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+t}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{1+2t}\vec{b}},\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3-2t}\vec{c}}$









(2) $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ であるから，(1) の結果から　$\mathrm{OM} = \dfrac{1}{1+2t}$，$\mathrm{ON} = \dfrac{1}{3-2t}$

よって　$\triangle\mathrm{OMN} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OM}\cdot\mathrm{ON}\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+2t}\times\dfrac{1}{3-2t}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4(1+2t)(3-2t)}}$$

(3) $f(t) = (1+2t)(3-2t)$ とおくと $(0<t<1)$

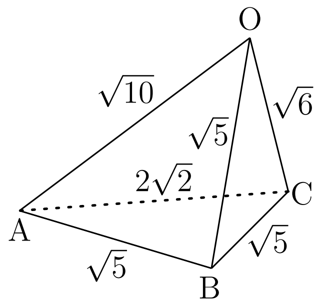
$$f(t) = -4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \quad ゆえに \quad 3 < f(t) \leqq 4$$

$\triangle\mathrm{OMN} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{1}{f(t)}$ であるから，$\triangle\mathrm{OMN}$ の面積の最小値は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{16}}$$

解答 46 (2007) $\boxed{\text{問題 (p.14)}}$

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ であるから



$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

これに $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{5}$ を代入して

$$5=5-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+10$$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=5}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

これに $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{10}$ を代入して

$$8=6-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+10$$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=4}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

これに $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{5}$ を代入して

$$5=6-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+5$$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\frac{1}{5}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{5}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

したがって，(1) の結果を代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\frac{1}{5}\times10+\frac{2}{5}\times5-4=0\quad\text{ゆえに}\quad\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\frac{1}{5}\times5+\frac{2}{5}\times5-3=0\quad\text{ゆえに}\quad\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，(2) の結果より H は C から $\triangle$OAB に下ろした垂線の足である．

$\triangle$ABO は $\angle\mathrm{ABO}=90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから

$$\triangle\mathrm{ABO}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\frac{5}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$ に注意して

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2&=\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}\\&=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=-\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\&=-\frac{1}{5}\cdot4-\frac{2}{5}\cdot3+6=4\end{aligned}$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=2$

したがって，求める四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABO}\times|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}\times2=\boldsymbol{\frac{5}{3}}$$

解答 47 (2009) 問題 (p.14)

問題 (p.14)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より　　$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

したがって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$

ここで，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ_1，$\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ_2 とすると

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta_1=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta_2$$

ゆえに　$$|\vec{b}|\cos\theta_1=|\vec{c}|\cos\theta_2 \qquad \cdots ①$$

$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積が等しいから

$$\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta_1=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{c}|\sin\theta_2$$

ゆえに　$$|\vec{b}|\sin\theta_1=|\vec{c}|\sin\theta_2 \qquad \cdots ②$$

①，② から

$$\begin{aligned}(|\vec{b}|\cos\theta_1)^2+(|\vec{b}|\sin\theta_1)^2&=(|\vec{c}|\cos\theta_2)^2+(|\vec{c}|\sin\theta_2)^2\\ |\vec{b}|^2(\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1)&=|\vec{c}|^2(\sin^2\theta_2+\cos^2\theta_2)\\ |\vec{b}|^2&=|\vec{c}|^2\end{aligned}$$

したがって　$|\vec{b}|=|\vec{c}|$　　すなわち　$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$

別解 $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$，$\triangle\mathrm{OAC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{c})^2}$

である．したがって $\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OAC}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ により

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2 \quad \text{よって} \quad |\vec{b}|=|\vec{c}|$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ であるから

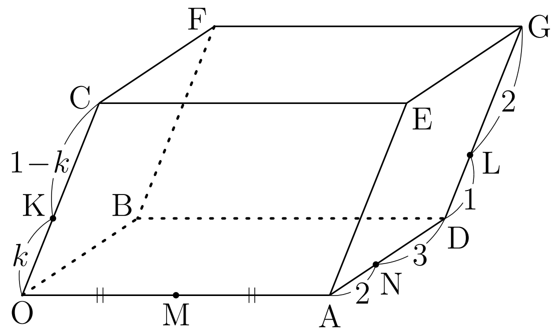
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\frac{1}{3}\{\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\ &=\frac{1}{3}\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})+\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\ &=\frac{1}{3}(\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b})+\frac{1}{3}(|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2)\end{aligned}$$

これに (1) で示した $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，$|\vec{b}|=|\vec{c}|$ を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0 \quad \text{すなわち} \quad \overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

解答 48 (2011) 問題 (p.14)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AN}}$
$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$
$\overrightarrow{\mathrm{ML}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DL}}$
$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$
$\overrightarrow{\mathrm{MK}} = \overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{OK}}$
$$= -\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}$$



(2) 3 点 M，N，K を通る平面を α とする．α 上の点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は，(1) の結果から，実数 s，t を用いて

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} + s\overrightarrow{\mathrm{MN}} + t\overrightarrow{\mathrm{MK}} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) + t\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1+s-t)\vec{a} + \frac{2}{5}s\vec{b} + tk\vec{c} \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

点 L の位置ベクトルは，$\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ であるから，L が α 上の点であるとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$\frac{1}{2}(1+s-t) = 1, \quad \frac{2}{5}s = 1, \quad tk = \frac{1}{3}$$

これを解いて　　$s = \frac{5}{2}$，$t = \frac{3}{2}$，$\boldsymbol{k = \frac{2}{9}}$

解答 49 (2013) 問題 (p.15)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\vec{c}-t\,\vec{d}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FM}}=\vec{a}+\vec{d}+\left(-\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\left(\vec{c}-t\,\vec{d}\right)+\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)=\boldsymbol{\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+(1-t)\vec{d}}$$

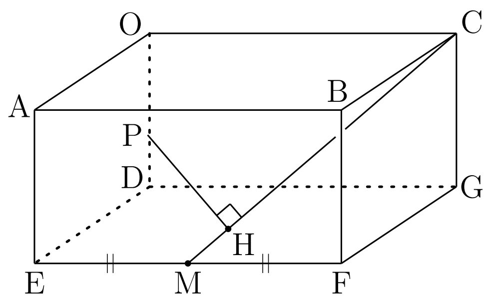
(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}})}{|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ により，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=0$ に注意して

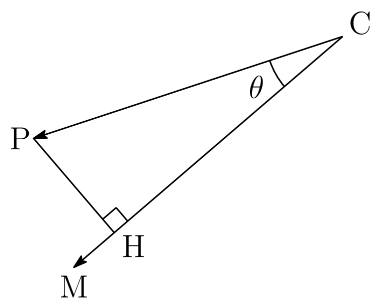
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=-\overrightarrow{\mathrm{PC}}=-\left(\vec{c}-t\vec{d}\right)=-\vec{c}+t\vec{d}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}&=\left(-\vec{c}+t\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)\\&=\frac{1}{2}|\vec{c}|^2+t|\vec{d}|^2=\frac{1}{2}\cdot2^2+t\cdot1^2=2+t\\|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}&=\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)\\&=|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2=1^2+\frac{1}{4}\cdot2^2+1^2=3\end{aligned}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{t+2}{3}\left(\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)$

よって　
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}&=\overrightarrow{\mathrm{CH}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}\\&=\frac{2+t}{3}\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)-\left(-\vec{c}+t\vec{d}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{2+t}{3}\vec{a}+\frac{4-t}{6}\vec{c}+\frac{2-2t}{3}\vec{d}}\end{aligned}$$





補足

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ のなす角を θ とすると　$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}||\overrightarrow{\mathrm{CM}}|}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = |\overrightarrow{\mathrm{CP}}|\cos\theta\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}})}{|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CM}}$

(3)　(2) の結果を利用すると

$$
\begin{aligned}
&|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PH}}|^2 \\
=&t^2|\vec{d}|^2 + \left(\frac{2+t}{2}\right)^2|\vec{a}|^2 + \left(\frac{4-t}{6}\right)^2|\vec{c}|^2 + \left(\frac{2-2t}{3}\right)^2|\vec{d}|^2 \\
=&t^2\cdot 1^2 + \left(\frac{2+t}{3}\right)^2\cdot 1^2 + \left(\frac{4-t}{6}\right)^2\cdot 2^2 + \left(\frac{2-2t}{3}\right)^2\cdot 1^2 \\
=&\frac{5}{3}t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{8}{3} \\
=&\frac{5}{3}\left(t-\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{12}{5} \qquad (0 \leqq t \leqq 1)
\end{aligned}
$$

よって，求める最小値は　　$\boldsymbol{\dfrac{12}{5}}$

解答 50 (2006) 問題 (p.15)

(1) $b_n = a_n - \dfrac{6n-7}{4}$ より　$a_n = b_n + \dfrac{6n-7}{4}$，$a_{n+1} = b_{n+1} + \dfrac{6n-1}{4}$

よって
$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_n &= \left(b_{n+1} + \frac{6n-1}{4}\right) + \left(b_n + \frac{6n-7}{4}\right) \\ &= b_{n+1} + b_n + 3n - 2 \end{aligned}$$

$a_{n+1} + a_n = 3n - 2$ であるから　$\boldsymbol{b_{n+1} + b_n = 0}$

(2) (1) の結果より　$b_{n+1} = -b_n \ (n \geqq 1)$

よって　$b_n = b_1 \cdot (-1)^{n-1}$

また　$b_1 = a_1 - \dfrac{6-7}{4} = -2 + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{7}{4}$

ゆえに　$b_n = -\dfrac{7}{4} \cdot (-1)^{n-1}$

したがって　$a_n = b_n + \dfrac{6n-7}{4} = \boldsymbol{-\dfrac{7}{4} \cdot (-1)^{n-1} + \dfrac{6n-7}{4}}$

(3) (2) の結果より

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{50} a_n &= \sum_{n=1}^{50} \left\{ -\frac{7}{4} \cdot (-1)^{n-1} + \frac{6n-7}{4} \right\} \\ &= -\frac{7}{4} \sum_{n=1}^{50} (-1)^{n-1} + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{50} n - \sum_{n=1}^{50} \frac{7}{4} \\ &= -\frac{7}{4} \cdot \frac{1 - (-1)^{50}}{1 - (-1)} + \frac{3}{2} \cdot \frac{50(50+1)}{2} - \frac{7}{4} \cdot 50 \\ &= 0 + \frac{3825}{2} - \frac{175}{2} = \mathbf{1825} \end{aligned}$$

(注) $-\dfrac{7}{4} \displaystyle\sum_{n=1}^{50} (-1)^{n-1} = -\dfrac{7}{4} \{1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + 1 + (-1)\} = 0$

$$\sum_{n=1}^{50} \frac{6n-7}{4} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{50} (6n-7) = \frac{1}{4} \cdot \frac{50(-1+293)}{2} = 1825$$

解答 51 (2007) 問題 (p.16)

(1) $x_{n+1} = 2x_n + y_n + 3n - 8$，$y_{n+1} = 2y_n + x_n - 3n + 8$
の辺々の和と差をとると

$$x_{n+1} + y_{n+1} = 3(x_n + y_n)$$
$$x_{n+1} - y_{n+1} = x_n - y_n + 6n - 16$$

$z_n = x_n + y_n$，$w_n = x_n - y_n$ であるから

$$z_{n+1} = 3z_n, \qquad z_1 = x_1 + y_1 = 8 + (-5) = 3$$
$$w_{n+1} = w_n + 6n - 16, \quad w_1 = x_1 - y_1 = 8 - (-5) = 13$$

数列 $\{z_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列であるから

$$\boldsymbol{z_n} = 3\cdot 3^{n-1} = \boldsymbol{3^n}$$

数列 $\{w_n\}$ は $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} w_n &= w_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(6k - 16) \\ &= 13 + 6 \times \frac{1}{2}(n-1)n - 16(n-1) \\ &= 3n^2 - 19n + 29 \end{aligned}$$

$w_1 = 13$ なので，上の w_n は $n = 1$ のときも成り立つ．
したがって　　$\boldsymbol{w_n = 3n^2 - 19n + 29}$

(2) 点 $(x_n,\ y_n)$ と直線 $y = x$ の距離を d とすると，(1) の結果に注意して

$$d = \frac{|\,x_n - y_n\,|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|\,w_n\,|}{\sqrt{2}}$$

$w_{n+1} - w_n = 6n - 16$ であるから　$w_{n+1} > w_n$　$(n = 3, 4, 5, \cdots)$

$w_4 = 1$ であるから　$n \geqq 5$ のとき　$|w_n| > |w_4| = 1$

よって，$d = \dfrac{|w_n|}{\sqrt{2}}$ を最小にする n の値は $n \leqq 4$ について調べればよい．

実際，$w_1 = 13,\ w_2 = 3,\ w_3 = -1,\ w_4 = 1$ であるから

求める n の値は　　$\boldsymbol{n = 3,\ 4}$

解答 52 (2008) $\boxed{\text{問題 (p.16)}}$

(1) $2 \leqq k \leqq n$ のとき

$$\begin{aligned} k(k-1)_n\mathrm{C}_k &= k(k-1) \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= n(n-1) \times \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= n(n-1)\,{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k \\ &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\,{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} \\ &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} {}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} = \boldsymbol{n(n-1)\cdot 2^{n-2}} \end{aligned}$$

(3) $1 \leqq k \leqq n$ のとき

$$\begin{aligned} k\,{}_n\mathrm{C}_k &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)} \\ &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \end{aligned}$$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\cdot 2^{n-1}$

したがって，上式および (2) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2\,{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k + \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k \\ &= n(n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1} \\ &= \boldsymbol{n(n+1)\cdot 2^{n-2}} \end{aligned}$$

解答 53 (2008) $\boxed{\text{問題 (p.16)}}$

(1) $a_n = b_n - n$ であるから，これを数列 $\{a_n\}$ の漸化式に代入すると

$$\begin{aligned} b_n - n &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - k) \\ b_n &= n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

したがって　　$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \cdots ①$

(2) ① により　　$b_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \cdots ②$

② − ① から　　$b_{n+1} - b_n = b_n$　ゆえに　$b_{n+1} = 2b_n$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は

$$b_1 = 1 + a_1 = 1 + 0 = 1$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　　$b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

(3) $a_n = b_n - n$ により，(2) の結果から　　$\boldsymbol{a_n = 2^{n-1} - n}$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}(2^{k-1} - k) \\ &= \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \boldsymbol{2^n - 1 - \frac{1}{2}n(n+1)} \end{aligned}$$

解答 54 (2012) $\boxed{\text{問題 (p.17)}}$

(1) $b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n=0\cdots$ ① と $a_{n+2}-5a_{n+1}+6_n=1$ の辺々の差をとると

$$(b_{n+2}-a_{n+2})-5(a_{n+1}-b_{n+1})+6(b_n-a_n)=-1$$

$b_n-a_n=c$ であるから

$$c-5c+6c=-1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{c=-\frac{1}{2}}$$

(2) (1) の結果より，$b_n=a_n-\dfrac{1}{2}$ であるから

$$b_1=a_1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \quad b_2=a_2-\frac{1}{2}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

① より

$$b_{n+2}-2b_{n+1}=3(b_{n+1}-2b_n)$$
$$b_{n+2}-3b_{n+1}=2(b_{n+1}-3b_n)$$

数列 $\{b_{n+1}-2b_n\}$ は初項 b_2-2b_1，公比 3 の等比数列であり，同様に，
数列 $\{b_{n+1}-3b_n\}$ は初項 b_2-3b_1，公比 2 の等比数列であるから

$$b_{n+1}-2b_n=3^{n-1}(b_2-2b_1)=\frac{1}{2}\cdot 3^n$$
$$b_{n+1}-3b_n=2^{n-1}(b_2-3b_1)=2^{n-1}$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$b_n=\frac{1}{2}\cdot 3^n-2^{n-1}$$

$a_n=b_n+\dfrac{1}{2}$ であるから

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot 3^n-2^{n-1}+\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3^n-2^n+1}{2}}$$

解答 55 (2013) $\boxed{\text{問題 (p.17)}}$

(1) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ より

$$a_{n+1} = \{2a_{n+1} + (n+1)^2\} - (2a_n + n^2)$$

ゆえに　$\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n - 2n - 1}$　$\cdots$①

(2) 初項 a_1 は　$S_1 = 2a_1 + 1^2$

$S_1 = a_1$ より　$a_1 = -1$

① に対して，次の等式をみたす n の 1 次式 $f(n)$ を考える．

$$f(n+1) = 2f(n) - 2n - 1 \quad \cdots ②$$

$f(n) = pn + q$ とおくと　$p(n+1) + q = 2(pn+q) - 2n - 1$

n に関する恒等式であるから　$p = 2$，$q = 3$

ゆえに　$f(n) = 2n + 3$　$\cdots$③

① − ② から　$a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$

したがって　$a_n - f(n) = 2^{n-1}\{a_1 - f(1)\}$

$a_1 = -1$，③ より　$a_n - (2n+3) = 2^{n-1}(-1-5)$

よって　$\boldsymbol{a_n = 2n + 3 - 3{\cdot}2^n}$

解答 56 (2004) 問題 (p.17)

(1) $\beta = 4+4i$ より，$\overline{\beta} = 4-4i$ であるから

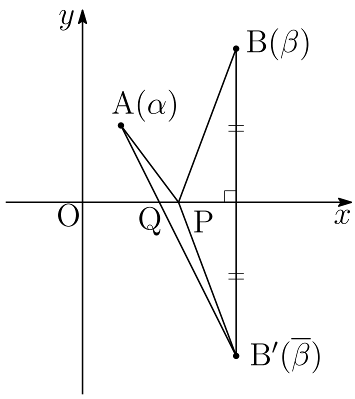
$$\begin{aligned}|\alpha - \overline{\beta}| &= |(1+2i)-(4-4i)| \\ &= |-3+6i| \\ &= \sqrt{(-3)^2+6^2} = \mathbf{3\sqrt{5}}\end{aligned}$$

(2) $|x-\beta| = |\overline{x-\beta}|$ であり，x は実数であるから　$|x-\beta| = |x-\overline{\beta}|$

よって　　$|x-\alpha|+|x-\beta| = |x-\alpha|+|x-\overline{\beta}|$

A(α)，B(β)，B$'(\overline{\beta})$，P(x) とすると

$$|x-\alpha|+|x-\overline{\beta}| = \mathrm{AP}+\mathrm{PB}'$$



AB$'$ と x 軸との交点を Q とするとき，
P が Q と異なるときは，△APB$'$ の辺の長さの関係から

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}' > \mathrm{AB}'$$

また，P が Q と一致するときは，次が成り立つ．

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}' = \mathrm{AB}'$$

したがって，$|x-\alpha|+|x-\beta|$ を最小にするには，直線 AB$'$ と x 軸の交点を P にとればよいので，t を実数とすると

$$\begin{aligned}x &= (1-t)\alpha + t\overline{\beta} \\ &= (1-t)(1+2i)+t(4-4i) \\ &= (1+3t)+(2-6t)i\end{aligned}$$

このとき，x は実数であるから　$2-6t=0$　ゆえに　$t=\dfrac{1}{3}$

よって　　$\boldsymbol{x=2}$