

令和7年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
医学部医学科 令和7年2月25日

問題 1 2 3 4

1 平面上の4点A, B, C, Dについて, $|\overrightarrow{AB}| = p > 0$, $|\overrightarrow{AD}| = q$, $\angle DAB = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) とする。以下の問に答えよ。

(1) 不等式 $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2 \geq |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2$ を証明せよ。

(2) (1) で等号が成り立つとき, 四角形ABCDの面積を p, q, θ を用いて表せ。

2 α を0ではない複素数とする。 $z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ とおき, $\beta = z\alpha$, $\gamma = z^2\alpha$ とおく。 $0, \alpha, \beta, \gamma$ はそれぞれ複素数平面上の点O, A, B, Cを表すとする。ただし, i は虚数単位である。以下の問いに答えよ。

(1) $\angle BOC$ を求めよ。

(2) 複素数 δ に対し, δ が表す複素数平面上の点をDとすると, 線分BDの垂直二等分線はA, Cを通るとする。このような δ を α を用いて表せ。

(3) $0 < \theta < \pi$ とする。点Dを, 点Cを中心に θ だけ回転した点がBであるとする。このとき $\sin \theta$ を求めよ。

- 3 xyz 空間において, 5 点 $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, -3, 0)$, $D(3, 0, 3)$, $P(0, 0, 1)$ をとる。点 P を通り x 軸に平行な直線を ℓ とする。四面体 $ABCD$ を ℓ の周りに 1 回転させるとき, この四面体が通過する体積 V を求めよ。ただし, 四面体は内部も含むとする。

- 4 実数 $p > 1$ と正の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^p$$

とおく。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{p+1}}$ を求めよ。
 (2) $0 \leq \alpha < \beta$ とする。点 (α, α^p) における $y = x^p$ の接線の方程式を求めよ。
 また, 不等式

$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha)\{2\alpha^p + p(\beta - \alpha)\alpha^{p-1}\} \leq \int_{\alpha}^{\beta} x^p \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\beta^p + \alpha^p)$$

を証明せよ。

- (3) (1) で求めた値を c とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p - cn^{p+1}}{n^p}$ を求めよ。

解答例

1 (1) 不等式

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2 \geq 0 \quad (*)$$

を示せばよい. $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とおくと

$$\begin{aligned} (*) \text{の左辺} &= |\vec{b}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 + |\vec{d} - \vec{c}|^2 + |-\vec{d}|^2 - |\vec{c}|^2 - |\vec{d} - \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{d} + 2\vec{b} \cdot \vec{d} \\ &= |\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

別解 不等式

$$|\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2 \geq |\overrightarrow{BD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{DA}|^2 \quad (**)$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned} (**) \text{の右辺} &= |\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{DA}|^2 \\ &= -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \\ (**) \text{の左辺} &= |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2 \\ &= |\overrightarrow{AC}|^2 - 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 \\ &= |\overrightarrow{AC}|^2 - 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= |\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &\geq (**) \text{の右辺} \end{aligned}$$

等号が成立するとき

$$\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0} \quad \text{すなわち} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

(2) (1) で等号が成り立つとき

$$\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0} \quad \text{すなわち} \quad \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$$

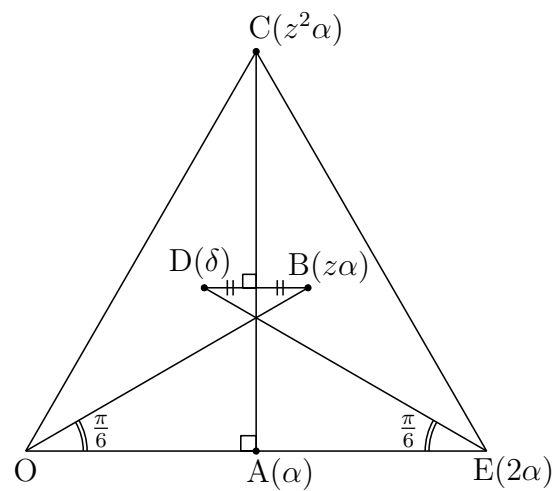
このとき四角形 ABCD は平行四辺形であり, その面積は $pq \sin \theta$ ■

2 (1) $z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

$$\angle \beta O \gamma = \arg \frac{\gamma - 0}{\beta - 0} = \arg \frac{z^2 \alpha}{z \alpha} = \arg z = \frac{\pi}{6} \quad \text{より} \quad \angle \mathbf{BOC} = \frac{\pi}{6}$$

(2) $E(2\alpha)$ とすると, ED は EA を $\sqrt{2}$ 倍に拡大し, E を中心に $-\frac{\pi}{6}$ だけ回転したものであるから

$$\delta = 2\alpha + \bar{z}(-\alpha) = (2 - \bar{z})\alpha = \left(2 - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \alpha$$



(3) $BC = CD$ に注意して

$$\begin{aligned} \cos \theta + i \sin \theta &= \frac{\beta - \gamma}{\delta - \gamma} = \frac{z\alpha - z^2\alpha}{(2 - \bar{z})\alpha - z^2\alpha} = \frac{z - z^2}{2 - \bar{z} - z^2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{2} - (1 + \sqrt{3}i)}{2 - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{2} - (1 + \sqrt{3}i)} = \frac{(\sqrt{6} - 2) + (\sqrt{2} - 2\sqrt{3})i}{(2 - \sqrt{6}) + (\sqrt{2} - 2\sqrt{3})i} \\ &= -\frac{(\sqrt{6} - 2) - (2\sqrt{3} - \sqrt{2})i}{(\sqrt{6} - 2) + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})i} = -\frac{\{(\sqrt{6} - 2) - (2\sqrt{3} - \sqrt{2})i\}^2}{(\sqrt{6} - 2)^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{2(\sqrt{6} - 2)(2\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - 2)^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \frac{4(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3})}{8(3 - \sqrt{6})} \\ &= \frac{(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3})(3 + \sqrt{6})}{2(3 - \sqrt{6})(3 + \sqrt{6})} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

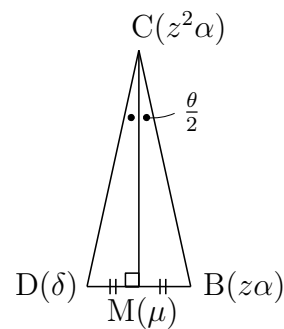
別解 BD の中点を $M(\mu)$ とすると, $z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ より

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\beta + \delta}{2} = \frac{z\alpha + (2 - \bar{z})\alpha}{2} = \left(1 + \frac{z - \bar{z}}{2}\right)\alpha, \\ \mu - \gamma &= \left(1 + \frac{z - \bar{z}}{2}\right)\alpha - z^2\alpha = \left(1 + \frac{z - \bar{z}}{2} - z^2\right)\alpha = \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}\alpha i \\ \beta - \mu &= z\alpha - \left(1 + \frac{z - \bar{z}}{2}\right)\alpha = \left(-1 + \frac{z + \bar{z}}{2}\right)\alpha = \frac{\sqrt{6} - 2}{2}\alpha,\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\tan \frac{\theta}{2} &= \frac{MB}{CM} = \frac{|\beta - \mu|}{|\mu - \gamma|} = \frac{\left|\frac{\sqrt{6} - 2}{2}\alpha\right|}{\left|\frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}\alpha i\right|} = \frac{\sqrt{6} - 2}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{5}, \\ \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} &= \frac{5}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}} = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{よって} \quad \sin \theta &= \frac{2}{\tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}}} = \frac{2}{\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{5}{2(3\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$



- 3 四面体を平面 $x = t$ ($0 \leq t \leq 3$) による断面である長方形 $QRR'Q'$ を下の図のようにとると, zx 平面に関して Q と Q' , R と R' は対称であるから

$$TQ = TQ', \quad TR = TR'$$

また ℓ と平面 $x = t$ との交点を T すると

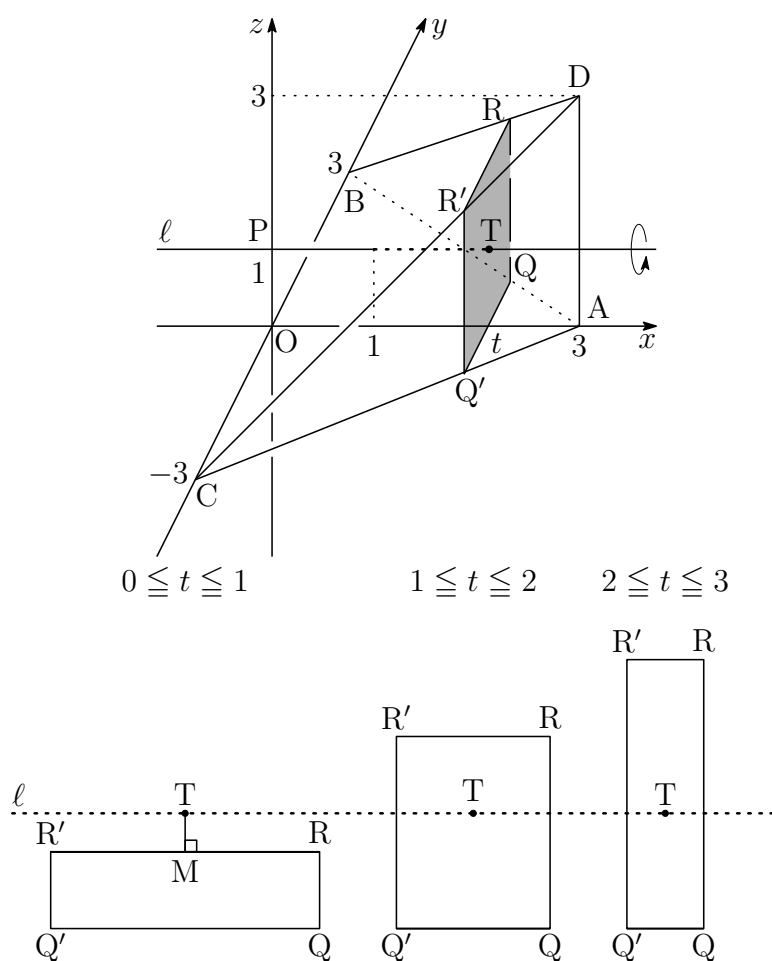
$$Q(t, 3-t, 0), \quad R(t, 3-t, t), \quad T(t, 0, 1)$$

ℓ と四面体が共有点をもつのは, $1 \leq t \leq 3$ のときであり, $0 \leq t \leq 1$ のとき, T から RR' に垂線 TM を引くと

$$TM = 1 - t$$

$0 \leq t \leq 2$ のとき $TQ \geq TR$, $2 \leq t \leq 3$ のとき $TQ \leq TR$ であるから, 求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^1 (TQ^2 - TM^2) dt + \int_1^2 TQ^2 dt + \int_2^3 TR^2 dt \\ &= - \int_0^1 TM^2 dt + \int_0^2 TQ^2 dt + \int_2^3 TR^2 dt \end{aligned} \quad (*)$$



$\text{TR}^2 = (3-t)^2 + 1$, $\text{TR}^2 = (3-t)^2 + (1-t)^2$ であるから, $(*)$ より

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= -\int_0^1 (t-1)^2 dt + \int_0^2 \{(t-3)^2 + 1\} dt + \int_2^3 \{(t-3)^2 + (t-1)^2\} dt \\ &= -\left[\frac{1}{3}(t-1)^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}(t-3)^3 + t\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}(t-3)^3 + \frac{1}{3}(t-1)^3\right]_2^3 \\ &= 13\end{aligned}$$

よって $V = 13\pi$

■

4 (1) $S_n = \sum_{k=1}^n k^p$ より

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{p+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \\ &= \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

(2) $y = x^p$ を微分すると $y' = px^{p-1}$

$y = x^p$ 上の点 (α, α^p) における接線の方程式は

$$y = p\alpha^{p-1}(x - \alpha) + \alpha^p$$

この接線と直線 $x = \beta$ の交点 C の y 座標を y_β とすると

$$y_\beta = p\alpha^{p-1}(\beta - \alpha) + \alpha^p$$

$y'' = p(p-1)x^{p-2}$ であるから, 区間 $\alpha < x < \beta$ において ($0 \leq \alpha$)

$$y'' > 0$$

このとき

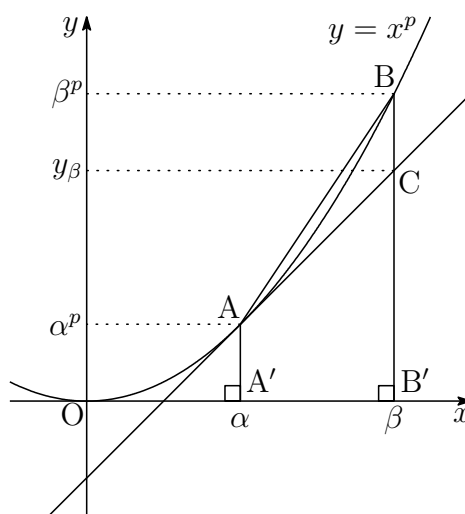
$$\begin{aligned}
 \text{四角形 AA'B'C} &= \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\alpha^p + y_\beta) \\
 &= \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\{\alpha^p + p\alpha^{p-1}(\beta - \alpha) + \alpha^p\} \\
 &= \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\{2\alpha^p + p(\beta - \alpha)\alpha^{p-1}\}, \\
 \text{四角形 AA'B'B} &= \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\alpha^p + \beta^p)
 \end{aligned}$$

$y = x^p$ は下に凸であるから，次が成立する．

$$\text{四角形 AA'B'C} \leq \int_{\alpha}^{\beta} x^p dx \leq \text{四角形 AA'B'B}$$

したがって

$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha)\{2\alpha^p + p(\beta - \alpha)\alpha^{p-1}\} \leq \int_{\alpha}^{\beta} x^p dx \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\beta^p + \alpha^p)$$



(3) (2) の結論に $\alpha = k - 1$, $\beta = k$ を代入すると

$$\frac{1}{2}\{2(k-1)^p + p(k-1)^{p-1}\} \leq \int_{k-1}^k x^p dx \leq \frac{1}{2}\{k^p + (k-1)^p\}$$

$k = 1, 2, \dots, n$ について, 上式の辺々を加えると

$$S_p - n^p + \frac{p}{2}(S_{p-1} - n^{p-1}) \leq \frac{n^{p+1}}{p+1} \leq S_p - \frac{n^p}{2}$$

(1) の結果より, $\frac{1}{p+1} = c$ であるから

$$\begin{aligned} S_p - n^p + \frac{p}{2}(S_{p-1} - n^{p-1}) &\leq cn^{p+1} \leq S_p - \frac{n^p}{2} \\ \frac{n^p}{2} &\leq S_p - cn^{p+1} \leq n^p - \frac{p}{2}(S_{p-1} - n^{p-1}) \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{2} \leq \frac{S_p - cn^{p+1}}{n^p} \leq 1 - \frac{p}{2} \cdot \frac{S_{p-1}}{n^p} + \frac{p}{2n} \quad (*)$$

ここで, (1) の結果から $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{p-1}}{n^p} = \frac{1}{p}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{p}{2} \cdot \frac{S_{p-1}}{n^p} + \frac{p}{2n} \right) = 1 - \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{p} + 0 = \frac{1}{2}$$

はさみうちの原理を (*) に適用すると

$$\frac{S_p - cn^{p+1}}{n^p} = \frac{1}{2}$$

補足 $S_n = \sum_{k=1}^n k^p$ は, n の $p+1$ 次式で, 最高次の係数は $\frac{1}{p+1}$, n^p の係数は $\frac{1}{2}$.

次の p.17 を参照.

http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2014.pdf

