令和６年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
医学部医学科　令和６年２月 25 日

問題 1 2 3 4

1 n 個の袋 A_1，A_2，$\cdots$，A_n がある。$A_k(1 \leqq k \leqq n)$ の中には白玉が k 個，黒玉が $n-k$ 個入っている。次の (操作) を考える．

(操作)

(操作 1)　n 個の袋から無作為に 1 つの袋を選び，それを A とおく。
(操作 2)　次の試行を s 回繰り返す。袋 A から無作為に玉を 1 個取り出し，玉の色を調べてから取り出した玉を袋 A に戻す。

以下の問いに答えよ。

(1) $s = 2$ とする。(操作) を行うとき，白玉がちょうど 1 回取り出される確率を n を用いて表せ。

(2) $s = 100$ とする。(操作 1) を行った結果，$A = A_k$ であった。このとき，(操作 2) で白玉がちょうど t 回取り出される条件付き確率を $p(t)$ とする。$n = 3k$ が成り立つとき，$p(t)$ を最大にする t の値を求めよ．

(3) $s = 10$ とする。(操作) を行うとき，白玉がちょうど 3 回取り出される確率を q_n とする。このとき，$\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ．

2 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ とする。AB $= 1$，$\angle$BAC $= 3\theta$ である $\triangle$ABC について，辺 BC の中点を D としたとき，$\angle$BAD $= 2\theta$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) AC $= 2\cos\theta$ であることを示せ。

(2) BC を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(3) BC の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ kを実数とし，$f(x)=\sin^2 x-\cos x-1+k$とおく。曲線$y=f(x)$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{2}\right)$をCとする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線Cとx軸の共有点の個数がkの値によってどのように変わるか調べよ。

(2) 曲線Cとx軸の共有点が2個以上あるようなkに対し，$g(k)$を

$$g(k)=\int_{p_1}^{p_2} f(x)\sin x\,dx$$

と定める。ただし，p_1，p_2はそれぞれ，曲線Cとx軸の共有点のx座標のうち1番小さいもの，2番目に小さいものとする。$g(k)$の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{4}$ mを自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $k^2-\ell^2=3^m$を満たす自然数の組$(k,\ \ell)$の個数をmを用いて表せ。

(2) $\sqrt{x(x+3^m)}$が整数となるような自然数xで3の倍数でないものをmを用いて表せ。

(3) $\sqrt{x(x+3^m)}$が整数となるような自然数xの個数をmを用いて表せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 袋 A_k から白玉，黒玉が取り出される確率は，それぞれ $\dfrac{k}{n}$，$1-\dfrac{k}{n}$ である $(k=1,2,\cdots,n)$．求める確率は，2 回の試行で白玉が 1 回，黒玉が 1 回取り出される確率であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{k}{n}\cdot\left(1-\frac{k}{n}\right) &= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{n}\cdot k^2\right)\\ &= \frac{2}{n^2}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}\\ &= \boldsymbol{\frac{(n+1)(n-1)}{3n^2}}\end{aligned}$$

(2) $A=A_k$ のとき，s 回の試行で白玉がちょうど t 回取り出される確率 $p(t)$ は

$$p(t)={}_s\mathrm{C}_t\left(\frac{k}{n}\right)^t\left(1-\frac{k}{n}\right)^{s-t} \qquad (*)$$

上式に $s=100$，$n=3k$ を代入すると

$$p(t)={}_{100}\mathrm{C}_t\left(\frac{1}{3}\right)^t\left(\frac{2}{3}\right)^{100-t}=\frac{100!}{t!(100-t)!}\left(\frac{2}{3}\right)^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

これから
$$\begin{aligned}\frac{p(t+1)}{p(t)}-1 &= \frac{t!(100-t)!}{(t+1)!(99-t)!}\cdot\frac{1}{2}-1\\ &= \frac{100-t}{2(t+1)}-1=\frac{98-3t}{2(t+1)}\end{aligned}$$

ゆえに　$p(0)<p(1)<\cdots<p(32)<p(33)>p(34)>\cdots>p(100)$

よって，求める t の値は　　$\boldsymbol{t=33}$

(3) $(*)$ に $s=10$，$t=3$ を代入した $p(3)$ を利用して

$$q_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p(3)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}_{10}\mathrm{C}_3\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(1-\frac{k}{n}\right)^7$$

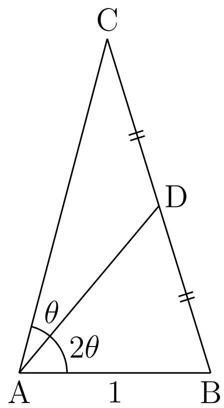
したがって[1]

$$\lim_{n\to\infty}q_n={}_{10}\mathrm{C}_3\int_0^1 x^3(1-x)^7\,dx={}_{10}\mathrm{C}_3\frac{3!7!}{11!}(1-0)^{11}=\boldsymbol{\frac{1}{11}}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\mathrm{BD} = \mathrm{CD}$ より，$\triangle\mathrm{ABD} = \triangle\mathrm{ACD}$ であるから



$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{AD}\sin 2\theta = \frac{1}{2}\mathrm{AC}{\cdot}\mathrm{AD}\sin\theta$$

したがって　$\mathrm{AB}\sin 2\theta = \mathrm{AC}\sin\theta$

$\mathrm{AB} = 1$ より

$$\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{AB}\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{AC}\cos 3\theta \\ &= 1^2 + (2\cos\theta)^2 - 2{\cdot}1{\cdot}2\cos\theta{\cdot}(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\ &= -16\cos^4\theta + 16\cos^2\theta + 1\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{BC} = \boldsymbol{\sqrt{-16\cos^4\theta + 16\cos^2\theta + 1}}$

(3) (2) の結果から

$$\mathrm{BC}^2 = -16\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + 5$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ に注意して

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{5}}$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\sin^2 x-\cos x-1+k\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{2}\right)$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= -\cos^2 x-\cos x+k \\ &= -\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$(*)$ $t=\cos x$ とし $(-1 \leqq t \leqq 1)$，関数

$$\varphi(t)=-t^2-t+k=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{1}{4}$$

とすると

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$\varphi(t)$	k	$\nearrow$	$k+\frac{1}{4}$	$\searrow$	k	$\searrow$	$k-2$

$f(x)=0$ が解をもつのは，$k-2 \leqq 0 \leqq k+\frac{1}{4}$ のときである．

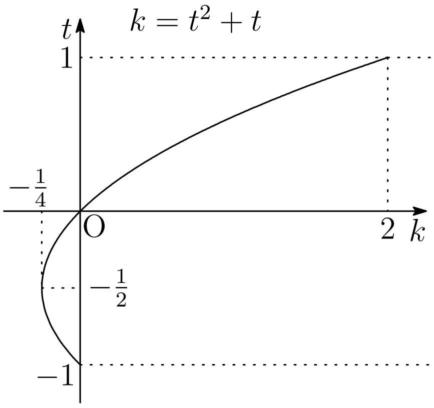
$0 \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ より，$t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ の値に対する $(*)$ を満たす x の個数は

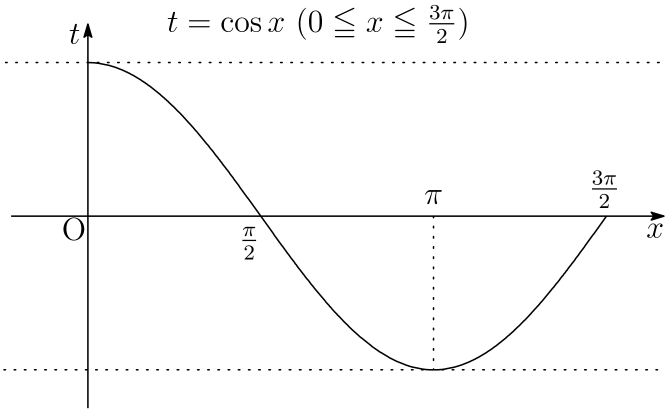
$t=-1$ のとき 1 個，$-1<t \leqq 0$ のとき 2 個，$0<t \leqq 1$ のとき 1 個

したがって

したがって	$0<k-2$ のとき	0 個
	$k-2 \leqq 0<k$ のとき	1 個
	$k=0$ のとき	3 個
	$k<0<k+\frac{1}{4}$ のとき	4 個
	$k+\frac{1}{4}=0$ のとき	2 個
	$k+\frac{1}{4}<0$ のとき	0 個

よって	$\boldsymbol{2 < k}$ のとき	**0** 個
	$\boldsymbol{0 < k \leqq 2}$ のとき	**1** 個
	$\boldsymbol{k = 0}$ のとき	**3** 個
	$\boldsymbol{-\frac{1}{4} < k < 0}$ のとき	**4** 個
	$\boldsymbol{k = -\frac{1}{4}}$ のとき	**2** 個
	$\boldsymbol{k < -\frac{1}{4}}$ のとき	**0** 個





(2) (1) の結果から，$f(x) = 0$ の解の個数が 2 個以上であるとき

$$-\frac{1}{4} \leqq k \leqq 0 \quad \cdots ①$$

$f(x) = \varphi(t)$，$t = \cos x$ より，$\alpha = \cos p_1$，$\beta = \cos p_2$ とおくと

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \varphi(t) = -(t-\alpha)(t-\beta)$$

$(*)$ より，$\dfrac{dt}{dx} = -\sin x$ であるから

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_{p_1}^{p_2} f(x)\sin x\,dx = -\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta)\,dt = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3 \end{aligned}$$

$\varphi(t) = 0$ の解と係数の関係により　　$\alpha + \beta = -1,\ \ \alpha\beta = -k \quad \cdots ②$

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = 1 + 4k$$

①，② より，$\alpha = \cos p_1 \leqq 0,\ \beta = \cos p_2 \leqq 0$ であるから，t に対する x の値に注意すると

$$\frac{\pi}{2} \leqq p_1 < p_2 \leqq \pi \quad \text{ゆえに} \quad \cos p_2 \leqq \cos p_1 \quad \left(\text{等号は } k = -\frac{1}{4} \text{ のとき}\right)$$

$\alpha - \beta \geqq 0$ であるから　$\alpha - \beta = \sqrt{1+4k}$　　ゆえに　$g(k) = \dfrac{1}{6}(1+4k)^{\frac{3}{2}}$

① より　　最大値 $\boldsymbol{g(0) = \dfrac{1}{6}}$，最小値 $\boldsymbol{g\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 0}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $k^2-\ell^2=3^m$ より　$(k+\ell)(k-\ell)=3^m$

$k+\ell>k-\ell$ より，自然数 $m_1,\ m_2$ を用いて

$$k+\ell=3^{m_1},\quad k-\ell=3^{m_2}\qquad (m_1+m_2=m,\ m_1>m_2\geqq 0)$$

とすると，$3^{m_1}\equiv 1,\ \ 3^{m_2}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$ に注意して

$$k=\frac{3^{m_1}+3^{m_2}}{2},\quad \ell=\frac{3^{m_1}-3^{m_2}}{2}\qquad (*)$$

$0\leqq m_2\leqq\left[\frac{m-1}{2}\right]$ であるから，求める自然数 $(k,\ \ell)$ の組の個数は

$$\left[\frac{m-1}{2}\right]+1=\left[\boldsymbol{\frac{m+1}{2}}\right]$$

(2) 2 つの整数 $a,\ b$ の最大公約数を $\gcd(a,\ b)$ とする．x は 3 の倍数でないから，ユークリッドの互除法により

$$\gcd(x,\ x+3^m)=\gcd(x,\ 3^m)=1$$

x が 3 の倍数でないとき，x と $x+3^m$ は互いに素である．

$\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数であるとき，整数 $k,\ \ell$ を用いて

$$x+3^m=k^2,\quad x=\ell^2\quad ゆえに\quad (k+\ell)(k-\ell)=3^m$$

したがって，$(*)$ を得る．このとき，$x=\ell^2$ より，ℓ は 3 の倍数でないから

$$(m_1,\ m_2)=(m,\ 0),\ (0,\ m)\quad よって\quad \boldsymbol{x=\left(\frac{3^m-1}{2}\right)^2}$$

(3) x が 3^m を約数にもつとき，$x=3^mA$ とおくと ($A>0$ は整数)

$$\sqrt{x(x+3^m)}=\sqrt{3^mA(3^mA+3^m)}=3^m\sqrt{A}\sqrt{A+1}$$

$\gcd(A,\ A+1)=\gcd(A,\ 1)=1$ より，上式が整数のとき，$\sqrt{A}$，$\sqrt{A+1}$ は整数であるから，次式より，これを満たす整数 x は存在しない．

$$1=(\sqrt{A+1})^2-(\sqrt{A})^2=(\sqrt{A+1}+\sqrt{A})(\sqrt{A+1}-\sqrt{A})$$

$x=3^jB_j$ ($B_j>0$ は 3 で割り切れない) とすると ($j=0,1,\cdots,m-1$)

$$\sqrt{x(x+3^m)}=\sqrt{3^jB_j(3^jB_j+3^m)}=3^j\sqrt{B_j(B_j+3^{m-j})}$$

このとき，$\sqrt{B_j(B_j+3^{m-j})}$ は整数であるから，(2) の結論より

$$B_j=\left(\frac{3^{m-j}-1}{2}\right)^2 \quad \text{すなわち} \quad x=3^jB_j \quad (j=0,1,\cdots,m-1)$$

よって，求める x の個数は　　$\boldsymbol{m}$ (個) ■