令和５年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
医学部医学科　令和５年２月25日

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ n を 3 以上の自然数とする．1 個のさいころを n 回投げて，出た目の数の積をとる。積が 60 となる確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) p_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 4$ のとき，p_n を求めよ。

(3) $n \geqq 4$ とする．出た目の数の積が n 回目にはじめて 60 となる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 原点を O とする座標平面上に 3 点 A，B，C がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{w}$ とおく。$\vec{e}_1 = (1,\ 0)$，$\vec{e}_2 = (0,\ 1)$ とするとき，3 つのベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ は

$$\begin{cases} \vec{u} = -\vec{e}_1, & & \\ \vec{v}\cdot\vec{e}_1 = 4, & |\vec{v}| = 2\sqrt{5}, & \vec{v}\cdot\vec{e}_2 < 0, \\ \vec{w}\cdot\vec{e}_1 = 8, & |\vec{w}| = 8\sqrt{2}, & \vec{w}\cdot\vec{e}_2 > 0 \end{cases}$$

を満たすとする。ただし，$|\vec{x}|$ はベクトル $\vec{x}$ の大きさを表し，$\vec{x}\cdot\vec{y}$ は 2 つのベクトル $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 A，B，C の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 3 点 A，B，C を通る円の方程式を求めよ。

(3) 3 点 A，B，C を通る円の中心を P とするとき，△ABC の面積と △ABP の面積の比を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ xy 平面上に点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとり，θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとする．点 A は y 軸上の点で，y 座標が負であり，$\mathrm{AP} = 2$ を満たす。点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 4\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を満たす点とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q の座標を θ を用いて表せ。

(2) 点 Q の x 座標の最大値と最小値および y 座標の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。

(3) 点 Q の軌跡と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 平面上の 2 つの円が直交するとは，2 つの円が 2 点で交わり，各交点において 2 つの円の接線が互いに直交することである。以下の問いに答えよ。

(1) C_1，C_2 は半径がそれぞれ r_1，r_2 の円とする。C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離を d とする。C_1 と C_2 が直交するための必要十分条件を d，r_1，r_2 の関係式で表せ。

(2) p，r_1，r_2 は $p > r_1 + r_2$，$r_1 > 0$，$r_2 > 0$ を満たす実数とする。座標平面上において，原点 O を中心とする半径 r_1 の円を C_1，点 $(p,\ 0)$ を中心とする半径 r_2 の円を C_2 とする。C_1 と C_2 のいずれにも直交する円の中心の軌跡を求めよ。

(3) 互いに外部にある 3 つの円の中心が一直線上にないとき，それら 3 つの円のいずれにも直交する円がただ 1 つ存在することを示せ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) 3回の目の出方が $\{2,\ 5,\ 6\}$, $\{3,\ 4,\ 5\}$ であるから

$$p_3 = \frac{3!}{1!1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{18}}$$

(2) n 回の目の出方で，1以外の目の出方は $\{2,\ 2,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 5,\ 6\}$, $\{3,\ 4,\ 5\}$ であるから

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{n!}{2!1!1!(n-4)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{n!}{1!1!1!(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n \times 2 \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 6^n} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{6^n} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\{(n-3)+4\}}{2\cdot 6^n} \\ &= \boldsymbol{\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 6^n}} \end{aligned}$$

(3) $n-1$ 回目までの目の積が60で，n 回目で1の目が出る確率は

$$p_{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}p_{n-1}$$

これと (2) の結果から，求める確率は

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{6}p_{n-1} &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 6^n} - \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 6^{n-1}} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\{(n+1)-(n-3)\}}{2\cdot 6^n} \\ &= \boldsymbol{\frac{2n(n-1)(n-2)}{6^n}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ は基本ベクトルであるから

$$\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{v}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2, \quad \vec{w} = (\vec{w}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{w}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2 \qquad (*)$$

したがって

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{v}\cdot\vec{e}_1)^2 + (\vec{v}\cdot\vec{e}_2)^2, \quad |\vec{w}|^2 = (\vec{w}\cdot\vec{e}_1)^2 + (\vec{w}\cdot\vec{e}_2)^2$$

$\vec{v}\cdot\vec{e}_1 = 4,\ |\vec{v}| = 2\sqrt{5},\ \vec{w}\cdot\vec{e}_1 = 8,\ |\vec{w}| = 8\sqrt{2}$ を上の 2 式に代入すると

$$20 = 16 + (\vec{v}\cdot\vec{e}_2)^2, \quad 128 = 64 + (\vec{w}\cdot\vec{e}_2)^2$$

$\vec{v}\cdot\vec{e}_2 < 0,\ \vec{w}\cdot\vec{e}_2 > 0$ に注意して解くと　$\vec{v}\cdot\vec{e}_2 = -2,\ \vec{w}\cdot\vec{e}_2 = 8$
条件およびこれらの結果を $(*)$ に代入すると

$$\vec{v} = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 = (4, -2), \quad \vec{w} = 8\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 = (8,\ 8)$$

$\vec{u} = -\vec{e}_1 = (-1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{w}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,\ 0), \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4, -2), \quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (8,\ 8)$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 0) + (4, -2) = (3, -2),\\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (3, -2) + (8,\ 8) = (11,\ 6)\end{aligned}$$

以上の結果から　　$\mathbf{A(-1,\ 0),\ B(3, -2),\ C(11,\ 6)}$

(2) 3 点 A$(-1,\ 0)$，B$(3, -2)$，C$(11,\ 6)$ を通る円の方程式を

$$x^2+y^2+px+qy+r=0$$

とおくと

$$\begin{cases} (-1)^2+0^2+p\cdot(-1)+q\cdot 0+r=0 \\ 3^2+(-2)^2+p\cdot 3+q\cdot(-2)+r=0 \\ 11^2+6^2+p\cdot 11+q\cdot 6+r=0 \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} -p+r+1=0 \\ 3p-2q+r+13=0 \\ 11p+6q+r+157=0 \end{cases}$$

これを解いて　$p=-8,\ q=-10,\ r=-9$

したがって，求める円の方程式は

$$x^2+y^2-8x-10y-9=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(x-4)^2+(y-5)^2=50}$$

(3) (2) の結果から　P$(4,\ 5)$

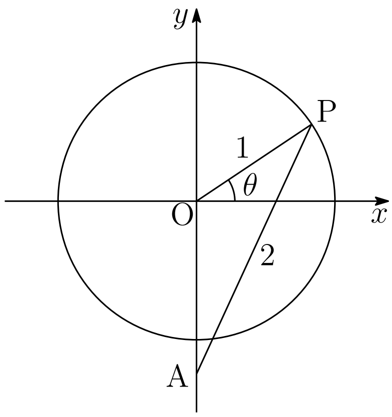
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,-2),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(12,\ 6),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(5,\ 5)$$

したがって

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|4\cdot 6-(-2)\cdot 12|=24,\quad \triangle\mathrm{ABP}=\frac{1}{2}|4\cdot 5-(-2)\cdot 5|=15$$

よって　　$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{ABP}=24:15=\boldsymbol{8:5}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\triangle$OAP に余弦定理を適用すると



$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OA}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OA}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\mathrm{OP} = 1$，$\mathrm{AP} = 2$ であるから

$$2^2 = 1^2 + \mathrm{OA}^2 + 2\cdot 1\cdot\mathrm{OA}\sin\theta$$

整理すると

$$\mathrm{OA}^2 + 2\mathrm{OA}\sin\theta - 3 = 0$$

$\mathrm{OA} > 0$ に注意してこれを解くと　$\mathrm{OA} = -\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 3}$

点 A の y 座標は負であるから　$\mathrm{A}(0,\ \sin\theta - \sqrt{\sin^2\theta + 3})$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 4\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 4(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= -3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= -3(0,\ \sin\theta - \sqrt{\sin^2\theta + 3}) + 4(\cos\theta,\ \sin\theta) \\ &= (4\cos\theta,\ \sin\theta + 3\sqrt{\sin^2\theta + 3})\end{aligned}$$

よって　　$\mathbf{Q(4\cos\boldsymbol{\theta},\ \sin\boldsymbol{\theta} + 3\sqrt{\sin^2\boldsymbol{\theta} + 3})}$

(2) 点 Q の座標を $(f(\theta),\ g(\theta))$ とすると $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，(1) の結果から

$$f(\theta) = 4\cos\theta,\quad g(\theta) = \sin\theta + 3\sqrt{\sin^2\theta + 3}$$

Q の x 座標は，$\theta = 0$ のとき**最大値 4**，$\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$ のとき**最小値 0**

$g(\theta)$ を微分すると

$$\begin{aligned}g'(\theta) &= \cos\theta + \frac{3\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + 3}} \\ &= \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + 3}}(\sqrt{\sin^2\theta + 3} + 3\sin\theta)\end{aligned}$$

$g'(\theta) = 0$ とすると $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$3\sin\theta = -\sqrt{\sin^2\theta + 3}$$

$\sin\theta < 0$ に注意して　$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$，$g(\theta)$ の増減表は

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$g(\theta)$	5	$\searrow$	$2\sqrt{6}$	$\nearrow$	7

Q の y 座標は，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき**最大値 7**，$\theta = \alpha$ のとき**最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{6}}$**

(3) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 0$ および $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における Q の軌跡をそれぞれ C_1，C_2 とする．$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$x_1 = f(\theta),\ y_1 = g(\theta),\ x_2 = f(-\theta),\ y_2 = g(-\theta)$$

とおくと

$$x_1 = x_2, \quad y_1 - y_2 = 2\sin\theta \geqq 0$$

C_1 は C_2 の上側にあるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{f(\frac{\pi}{2})}^{f(0)} (y_1 - y_2)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2\sin\theta(4\cos\theta)'\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^2\theta\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= 4\Big[\,\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{2\pi}
\end{aligned}$$

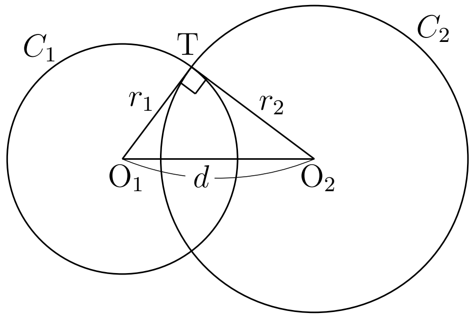
別解 ガウス・グリーンの定理により[1]

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(\theta)g'(\theta) - f'(\theta)g(\theta)\}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{4\cos\theta\left(\cos\theta + \frac{3\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+3}}\right) + 4\sin\theta\left(\sin\theta + 3\sqrt{\sin^2\theta+3}\right)\right\}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4 + \frac{48\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+3}}\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\,d\theta = \boldsymbol{2\pi}
\end{aligned}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf $\boxed{5}$

4 (1) C_1, C_2 の中心をそれぞれ O_1, O_2 とし，C_1 と C_2 が直交する点を T とすると，右の図から



$$\mathrm{O_1T}^2 + \mathrm{O_2T}^2 = \mathrm{O_1O_2}^2$$

よって　　$\boldsymbol{{r_1}^2 + {r_2}^2 = d^2}$

(2) 点 $(p,\ 0)$ を P とし，C_1, C_2 の両方に直交する円の中心を X，半径を R とすると，(1) の結論から

$$ {r_1}^2 + R^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2,\quad {r_2}^2 + R^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PX}}|^2 \qquad (*)$$

上の 2 式から　　${r_1}^2 - {r_2}^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PX}}|^2 \quad \cdots ①$

① の右辺を計算すると

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PX}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OX}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 \\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}} - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}} - p^2 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

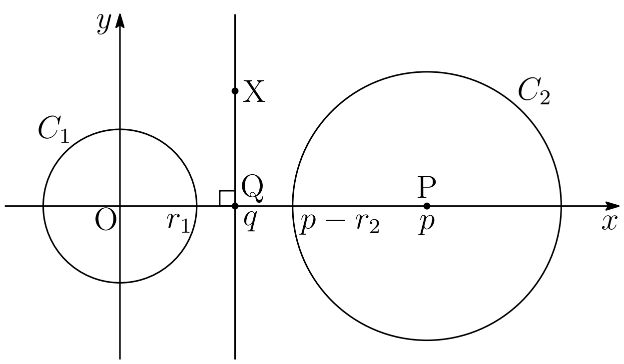
①，② より

$$2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}} - p^2 = {r_1}^2 - {r_2}^2 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{p^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2}{2}$$

$q = \dfrac{p^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2}{2p} \cdots ③$ とし，点 Q の座標を $(q,\ 0)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \quad \text{すなわち} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QX}} = 0$$

よって，中心 X の軌跡は，点 Q を通り直線 OP に垂直な直線である．
また，$(*)$ より，半径 R は，X から C_1, C_2 に引いた接線の接点と X との距離である．



(3) 前ページの図において，③ および $p > r_1 + r_2$ から

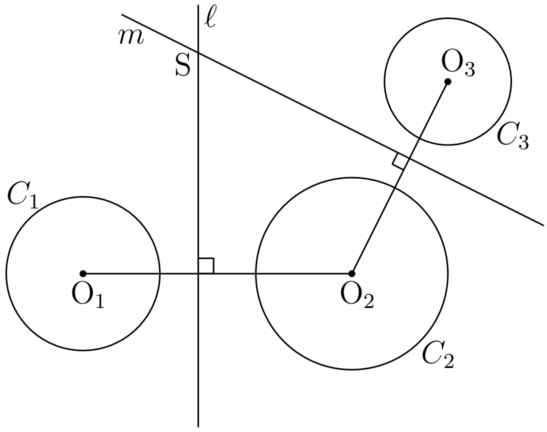
$$\begin{aligned} q - r_1 &= \frac{p^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2}{2p} - r_1 = \frac{(p - r_1)^2 - {r_2}^2}{2p} \\ &= \frac{(p - r_1 + r_2)(p - r_1 - r_2)}{2p} > 0, \\ (p - r_2) - q &= p - r_2 - \frac{p^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2}{2p} = \frac{(p - r_2)^2 - {r_1}^2}{2p} \\ &= \frac{(p + r_1 - r_2)(p - r_1 - r_2)}{2p} > 0 \end{aligned}$$

したがって，(2) で求めた点 Q は，C_1，C_2 の外部の点である．

互いに外部にある 3 つの円を C_1，C_2，C_3 とし，それらの円の中心を O_1，O_2，O_3 とすると，次が成立する．

- C_1，C_2 の両方に直交する円の中心の描く軌跡を ℓ とすると，ℓ は線分 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ と垂直で，C_1 と C_2 の外部にある．
- C_2，C_3 の両方に直交する円の中心の描く軌跡を m とすると，m は線分 $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$ と垂直で，C_2 と C_3 の外部にある．

3 点 O_1，O_2，O_3 は同一直線上にないから，ℓ と m は 1 点で交わり，この交点を S とすると，S から C_1，C_2，C_3 に引いた接線の接点で直交する．



別解　(2) 点 $(p,\ 0)$ を P とし，$C_1,\ C_2$ の両方に直交する円の中心を X，半径を R とすると，(1) の結論から

$$r_1{}^2 + R^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2, \quad r_2{}^2 + R^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PX}}|^2 \tag{$*$}$$

上の 2 式から　$r_1{}^2 - r_2{}^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PX}}|^2$

ここで，直線 OP 上に点 $\mathrm{T}(t,\ 0)$ をとると，上式から

$$\begin{aligned}
r_1{}^2 - r_2{}^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OT}} + \overrightarrow{\mathrm{TX}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PT}} + \overrightarrow{\mathrm{TX}}|^2 \\
&= |\overrightarrow{\mathrm{OT}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PT}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{TX}} - 2\overrightarrow{\mathrm{PT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{TX}} \\
&= |\overrightarrow{\mathrm{OT}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OT}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + 2(\overrightarrow{\mathrm{OT}} - \overrightarrow{\mathrm{PT}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{TX}} \\
&= 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OT}} - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{TX}}
\end{aligned}$$

ゆえに　$$\begin{aligned}
-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{TX}} &= 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OT}} - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 - r_1{}^2 + r_2{}^2 \\
&= 2pt - p^2 - r_1{}^2 + r_2{}^2
\end{aligned}$$

$f(t) = 2pt - p^2 - r_1{}^2 + r_2{}^2$ とすると $(p > r_1 + r_2,\ r_1 > 0,\ r_2 > 0)$

$$\begin{aligned}
f(r_1) &= 2pr_1 - p^2 - r_1{}^2 + r_2{}^2 \\
&= r_2{}^2 - (p - r_1)^2 = (r_2 + p - r_1)(r_2 - p + r_1) < 0 \\
f(p - r_2) &= 2p(p - r_2) - p^2 - r_1{}^2 + r_2{}^2 \\
&= p^2 - 2pr_2 + r_2{}^2 - r_1{}^2 = (p - r_2 + r_1)(p - r_2 - r_1) > 0
\end{aligned}$$

$f(t)$ は単調増加であるから，$f(t) = 0$ の解を q とすると　$r_1 < q < p - r_2$

したがって，$\mathrm{Q}(q,\ 0)$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QX}} = 0$

よって，中心 X の軌跡は，点 Q を通り直線 OP に垂直な直線である．このとき，Q は C_1 と C_2 の外部の点である．また，$(*)$ より，半径 R は，X から $C_1,\ C_2$ に引いた接線の接点と X との距離である．

(3) 互いに外部にある 3 つの円を $C_1,\ C_2,\ C_3$ とし，それらの円の中心を O_1，O_2，O_3 とすると，(2) の結論から次が成立する．

- C_1，C_2 の両方に直交する円の中心の描く軌跡を ℓ とすると，ℓ は線分 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ と垂直で，C_1 と C_2 の外部にある．
- C_2，C_3 の両方に直交する円の中心の描く軌跡を m とすると，m は線分 $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$ と垂直で，C_2 と C_3 の外部にある．

3 点 $\mathrm{O}_1,\ \mathrm{O}_2,\ \mathrm{O}_3$ は同一直線上にないから，ℓ と m は 1 点で交わり，この交点を S とすると，S から $C_1,\ C_2,\ C_3$ に引いた接線の接点で直交する．■