令和４年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
医学部医学科　令和４年２月２５日

問題 1 2 3 4

1 a を実数とし，座標空間の点 $\mathrm{P_1}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P_2}(a+1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$ を考える。$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ をそれぞれ $\triangle\mathrm{P_1QR}$，$\triangle\mathrm{P_2QR}$ の重心とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ を通る直線と，$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ を通る直線は平行であることを示せ。

(2) 四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ の面積を求めよ。

(3) 四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ を底面とする四角錐 $\mathrm{Q\text{-}P_1P_2G_2G_1}$ の体積を求めよ。

2 関数 $f(x)=\sqrt{1+\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)\ (0 \leqq x \leqq 1)$ の最大値を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x) \geqq \sqrt{2}x$ となることを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\int_0^1 \{f(x)\}^n\,dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定める。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ の値を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n}=0$ を用いてよい。

$\boxed{\mathbf{3}}$ p を正の実数とする。曲線 $y = \sin x$ $(x > 0)$ の接線で点 $(-p,\ 0)$ を通るものをすべて考え，それらの接点の x 座標を小さい方から順に $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n, \cdots$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$ に対して，$\tan a_n = a_n + p$ が成り立つことを示せ。

(2) $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$ に対して，$a_{n+1} - a_n > \pi$ が成り立つことを示せ。

(3) $a_1 = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$ に対して，$\tan a_{n+1} > n\pi + \sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $m \leqq n$ であって，$mn + 2 = {}_{m+n}\mathrm{C}_m$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ を 1 つ求めよ。

(2) $m \leqq n$ であって，$mn + 2 = {}_{m+n}\mathrm{C}_m$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ は，(1) で求めた組に限ることを示せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\mathrm{P_1}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P_2}(a+1,\ 0,\ 0)$ より $\qquad \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(1,\ 0,\ 0)$

$\triangle\mathrm{P_1QR}$，$\triangle\mathrm{P_2QR}$ のそれぞれの重心 $\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ は

$$\mathrm{G_1}\left(\frac{a}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right),\quad \mathrm{G_2}\left(\frac{a+1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right)\quad \text{ゆえに}\quad \overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}}=\left(\frac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$$

したがって $\qquad \overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$

よって，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ を通る直線と，$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ を通る直線は平行である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}=\left(-\dfrac{2a}{3},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$ より

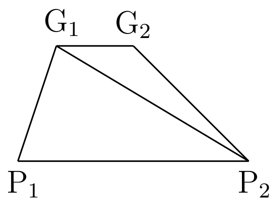
$$|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|^2=1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}|^2=\frac{4a^2}{9}+\frac{10}{9},\quad \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}=-\frac{2a}{3}$$

したがって

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{1\left(\frac{4a^2}{9}+\frac{10}{9}\right)-\left(-\frac{2a}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{6}\end{aligned}$$

求める四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}+\triangle\mathrm{G_1G_2P_2}\\&=\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}+\frac{1}{3}\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}\\&=\frac{4}{3}\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{10}}{6}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{10}}{9}}\end{aligned}$$



(3) $\overrightarrow{\mathrm{P_1R}}=(-a,\ 0,\ 3)$．$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}$ に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{10}}(0,-3,\ 1)$$

とする．点 R から四角形 $\mathrm{P_1P_2G_1G_2}$ に引いた垂線の長さ h は

$$h=|\overrightarrow{\mathrm{P_1R}}\cdot\vec{n}|=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

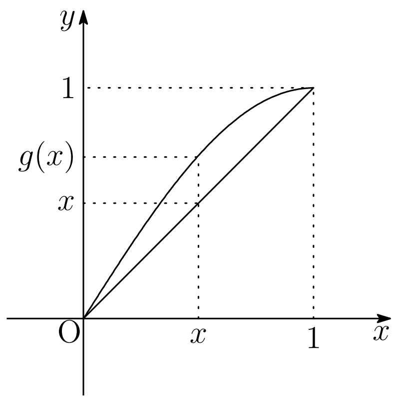
よって，求める立体の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{9}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ は単調増加であるから，最大値は　$f(1) = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

(2) $g(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ とおく $(0 \leqq x \leqq 1)$.



曲線 $y = g(x)$ は上に凸であり，2 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$ を結ぶ線分

$$y = x \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

の下側にないから

$$g(x) \geqq x \geqq 0 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つ．したがって，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$\begin{aligned} f(x)^2 - 2x^2 &= 1 + \sin^2\frac{\pi x}{2} - 2x^2 \\ &= 1 - x^2 + g(x)^2 - x^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

$f(x) > 0$ であるから　　$f(x) \geqq \sqrt{2}x \quad (0 \leqq x \leqq 1)$

(3) (1)，(2) の結果から　$\sqrt{2}x \leqq f(x) \leqq \sqrt{2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$

$$\int_0^1 (\sqrt{2}x)^n\,dx \leqq \int_0^1 \{f(x)\}^n\,dx \leqq \int_0^1 (\sqrt{2})^n\,dx$$

したがって　$\dfrac{(\sqrt{2})^n}{n+1} \leqq a_n \leqq (\sqrt{2})^n$　ゆえに　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n+1}} \leqq \sqrt[n]{a_n} \leqq \sqrt{2} \quad \cdots (*)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log \sqrt[n]{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n} = 0$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1 \quad \cdots (**)$

$(*)$，$(**)$ から，はさみうちの原理により　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{2}}$ ■

$\boxed{3}$ (1) $y=\sin x$ を微分すると　$y'=\cos x$

曲線 $y=\sin x$ 上の点 $(a_n,\ \sin a_n)$ における接線の方程式は

$$y-\sin a_n=(x-a_n)\cos a_n$$

これが点 $(-p,\ 0)$ を通るから，$\cos a_n\neq 0$ に注意して

$$-\sin a_n=(-p-a_n)\cos a_n \quad \text{よって} \quad \tan a_n=a_n+p$$

(2) $f(x)=\tan x-x$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1=\tan^2 x\geqq 0$

a_n は方程式 $f(x)=p$ の解である $(p>0)$．$f(x)$ は単調増加であり，

$$f((n-1)\pi)=-(n-1)\leqq 0,\quad \lim_{x\to\frac{2n-1}{2}\pi-0}f(x)=\infty$$

であるから，開区間 $I_n=\left((n-1)\pi,\ \dfrac{2n-1}{2}\pi\right)$ に方程式 $f(x)=p$ の解 a_n が唯一存在する．$a_n\in I_n$，$a_{n+1}\in I_{n+1}$ より

$$a_{n+1}-a_n>0 \quad \cdots ①$$

$f(a_n)=f(a_{n+1})$ であるから

$$\tan a_n-a_n=\tan a_{n+1}-a_{n+1} \quad \cdots ②$$

①，② より　$\tan a_{n+1}-\tan a_n=a_{n+1}-a_n>0$

$\tan a_n=\tan(a_n+\pi)$ であるから

$$\tan(a_n+\pi)<\tan a_{n+1}$$

このとき，$a_n+\pi\in I_{n+1}$，$a_{n+1}\in I_{n+1}$ に注意して

$$a_n+\pi<a_{n+1} \quad \text{よって} \quad a_{n+1}-a_n>\pi$$

(3) ② から，$a_{n+1}-a_n=\tan a_{n+1}-\tan a_n$．これを (2) の結果に代入すると

$$\tan a_{n+1}-\tan a_n>\pi$$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\tan a_{k+1}-\tan a_k)>\sum_{k=1}^{n}\pi$

$a_1=\dfrac{\pi}{3}$ より　$\tan a_{n+1}-\tan\dfrac{\pi}{3}>n\pi$　よって　$\tan a_{n+1}>n\pi+\sqrt{3}$　■

$\boxed{4}$ (1) $f(m,\ n) = {}_{m+n}\mathrm{C}_m - mn - 2\ (m \leqq n)$ とおくと

$$f(1,\ n) = (1+n) - 1 \cdot n - 2 = -1$$
$$f(2,\ n) = \frac{1}{2}(n+2)(n+1) - 2n - 2 = \frac{1}{2}(n+1)(n-2)$$

$f(m,\ n) = 0$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ を 1 つ求めればよいから

$$\boldsymbol{(m,\ n) = (2,\ 2)}$$

(2) 正の整数 $l = 2, 3, \cdots, m-1$ について

$$\begin{aligned}
{}_{m+n}\mathrm{C}_{l+1} - {}_{m+n}\mathrm{C}_l &= \frac{(m+n)!}{(l+1)!(m+n-l-1)!} - {}_{m+n}\mathrm{C}_m \\
&= \frac{m+n-l}{l+1} \cdot {}_{m+n}\mathrm{C}_m - {}_{m+n}\mathrm{C}_m \\
&= \frac{m+n-2l-1}{l+1} \cdot {}_{m+n}\mathrm{C}_m \\
&= \frac{n-m+2(m-1-l)+1}{l+1} \cdot {}_{m+n}\mathrm{C}_m > 0
\end{aligned}$$

ゆえに　${}_{m+n}\mathrm{C}_2 < {}_{m+n}\mathrm{C}_3 < \cdots < {}_{m+n}\mathrm{C}_{m-1} < {}_{m+n}\mathrm{C}_m$

したがって，$2 \leqq m \leqq n$ を満たす整数 $m,\ n$ について次式が成立する．

$$ {}_{m+n}\mathrm{C}_m - {}_{m+n}\mathrm{C}_2 \geqq 0 \qquad (*)$$

ただし，上式について等号が成立するとき，$m = 2$ である．

$$f(m,\ n) = {}_{m+n}\mathrm{C}_m - {}_{m+n}\mathrm{C}_2 + {}_{m+n}\mathrm{C}_2 - mn - 2$$

とすると，$2 \leqq m \leqq n$ であるから

$$\begin{aligned}
{}_{m+n}\mathrm{C}_2 - mn - 2 &= \frac{1}{2}(m+n)(m+n-1) - mn - 2 \\
&= \frac{1}{2}(m+1)(m-2) + \frac{1}{2}(n+1)(n-2) \geqq 0 \qquad (**)
\end{aligned}$$

が成立する．ただし，等号が成立するとき，$m = n = 2$ である．

$(*)$，$(**)$ から，$f(m,\ n) = 0$ となるのは，(1) の結果に限る．

別解 1 (1) で $1 \leqq m \leqq 2$ のとき，$(m,\ n) = (2,\ 2)$ がただ 1 つの解である．

$m \geqq 3$ のとき，$(m,\ n)$ の解が存在しないことを示せばよい．

$m \geqq 3$ のとき　　${}_{m+n}\mathrm{C}_2 < {}_{m+n}\mathrm{C}_3 < \cdots < {}_{m+n}\mathrm{C}_m$

また　　${}_{m+n}\mathrm{C}_2 - (mn+2) = \dfrac{1}{2}\{n(n-1) + m(m-1) - 4\}$

$n \geqq m \geqq 3$ より　$n(n-1) \geqq m(m-1) \geqq 3{\cdot}2 > 4$

よって　　${}_{m+n}\mathrm{C}_2 > mn+2$

別解 2 与えられた等式から

$$g(m,\ n) = \frac{{}_{m+n}\mathrm{C}_m}{mn+2} = \frac{(m+n)!}{m!n!(mn+2)}$$

とおく．(1) の結果から $g(m,\ n) = 1$ を満たす整数 $m,\ n\ (2 \leqq m \leqq n)$ を求めればよい．

$$\begin{aligned}\frac{g(m,\ n+1)}{g(m,\ n)} - 1 &= \frac{(m+n+1)(mn+2)}{(n+1)(mn+m+2)} - 1 \\ &= \frac{\{(n+1)+m\}(mn+2)}{(n+1)\{(mn+2)+m\}} - 1 \\ &= \frac{m(mn+2) - m(n+1)}{(n+1)\{(mn+2)+m\}} \\ &= \frac{m\{(m-1)n+1\}}{(n+1)\{(mn+2)+m\}} > 0\end{aligned}$$

$g(m,\ n+1) > g(m,\ n)$ であるから，m を固定すると，$g(m,\ n)$ は n について単調増加．また，$g(m,\ n)$ は m，n の対称式であるから，同様に n を固定すると，$g(m,\ n)$ は m について単調増加．したがって

$$g(m,\ n) \geqq g(2,\ 2) = 1$$

が成立する．ただし，等号が成立するとき，$m = n = 2$ である．

よって，求める正の整数の組 $(m,\ n)$ は (1) の結果に限る．　■