

令和4年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分  
 医学部医学科 令和4年2月25日

問題 1 2 3 4

1  $a$  を実数とし、座標空間の点  $P_1(a, 0, 0)$ ,  $P_2(a+1, 0, 0)$ ,  $Q(0, 1, 0)$ ,  $R(0, 0, 3)$  を考える。 $G_1$ ,  $G_2$  をそれぞれ  $\triangle P_1QR$ ,  $\triangle P_2QR$  の重心とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $P_1$ ,  $P_2$  を通る直線と、 $G_1$ ,  $G_2$  を通る直線は平行であることを示せ。
- (2) 四角形  $P_1P_2G_2G_1$  の面積を求めよ。
- (3) 四角形  $P_1P_2G_2G_1$  を底面とする四角錐  $Q-P_1P_2G_2G_1$  の体積を求めよ。

2 関数  $f(x) = \sqrt{1 + \sin^2 \frac{\pi x}{2}}$  について、以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) の最大値を求めよ。
- (2)  $0 \leq x \leq 1$  において、 $f(x) \geq \sqrt{2}x$  となることを示せ。
- (3) 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_n = \int_0^1 \{f(x)\}^n dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  の値を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{n} = 0$  を用いてよい。

**3**  $p$  を正の実数とする。曲線  $y = \sin x$  ( $x > 0$ ) の接線で点  $(-p, 0)$  を通るものをすべて考え、それらの接点の  $x$  座標を小さい方から順に  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、 $\tan a_n = a_n + p$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、 $a_{n+1} - a_n > \pi$  が成り立つことを示せ。
- (3)  $a_1 = \frac{\pi}{3}$  のとき、 $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、 $\tan a_{n+1} > n\pi + \sqrt{3}$  が成り立つことを示せ。

**4** 以下の問いに答えよ。

- (1)  $m \leq n$  であって、 $mn + 2 = {}_{m+n}C_m$  を満たす正の整数の組  $(m, n)$  を1つ求めよ。
- (2)  $m \leq n$  であって、 $mn + 2 = {}_{m+n}C_m$  を満たす正の整数の組  $(m, n)$  は、(1) で求めた組に限ることを示せ。

## 解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad P_1(a, 0, 0), P_2(a+1, 0, 0) \text{ より } \overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 0)$$

$\triangle P_1QR, \triangle P_2QR$  のそれぞれの重心  $G_1, G_2$  は

$$G_1\left(\frac{a}{3}, \frac{1}{3}, 1\right), G_2\left(\frac{a+1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \quad \text{ゆえに } \overrightarrow{G_1G_2} = \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$$

$$\text{したがって } \overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$$

よって,  $P_1, P_2$  を通る直線と,  $G_1, G_2$  を通る直線は平行である.

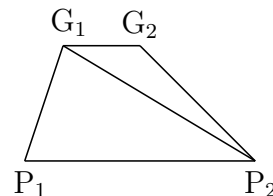
$$(2) \quad \overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 0), \overrightarrow{P_1G_1} = \left(-\frac{2a}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \text{ より}$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|^2 = 1, \quad |\overrightarrow{P_1G_1}|^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{10}{9}, \quad \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1G_1} = -\frac{2a}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \Delta P_1P_2G_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{P_1P_2}|^2 |\overrightarrow{P_1G_1}|^2 - (\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1G_1})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 \left( \frac{4a^2}{9} + \frac{10}{9} \right) - \left( -\frac{2a}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{6} \end{aligned}$$

求める四角形  $P_1P_2G_2G_1$  の面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \Delta P_1P_2G_1 + \Delta G_1G_2P_2 \\ &= \Delta P_1P_2G_1 + \frac{1}{3} \Delta P_1P_2G_1 \\ &= \frac{4}{3} \Delta P_1P_2G_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6} = \frac{2\sqrt{10}}{9} \end{aligned}$$



$$(3) \quad \overrightarrow{P_1R} = (-a, 0, 3). \quad \overrightarrow{P_1P_2} \text{ および } \overrightarrow{P_1G_1} \text{ に垂直な単位ベクトルの 1 つを}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(0, -3, 1)$$

とする. 点  $R$  から四角形  $P_1P_2G_1G_2$  に引いた垂線の長さ  $h$  は

$$h = |\overrightarrow{P_1R} \cdot \vec{n}| = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

よって, 求める立体の体積を  $V$  とすると

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{9} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{2}{9}$$

■

2 (1)  $f(x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) は単調増加であるから、最大値は  $f(1) = \sqrt{2}$

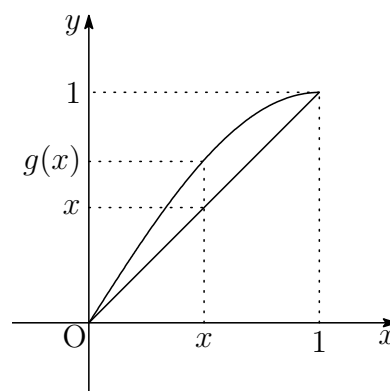
(2)  $g(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$  とおく ( $0 \leq x \leq 1$ ).

曲線  $y = g(x)$  は上に凸であり、2点  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  を結ぶ線分

$$y = x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

の下側にならぬから

$$g(x) \geq x \geq 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$



が成り立つ。したがって、 $0 \leq x \leq 1$  において

$$\begin{aligned} f(x)^2 - 2x^2 &= 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{2} - 2x^2 \\ &= 1 - x^2 + g(x)^2 - x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$f(x) > 0$  であるから  $f(x) \geq \sqrt{2}x$  ( $0 \leq x \leq 1$ )

(3) (1), (2) の結果から  $\sqrt{2}x \leq f(x) \leq \sqrt{2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ )

$$\int_0^1 (\sqrt{2}x)^n dx \leq \int_0^1 \{f(x)\}^n dx \leq \int_0^1 (\sqrt{2})^n dx$$

したがって  $\frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} \leq a_n \leq (\sqrt{2})^n$  ゆえに  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n+1}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt{2} \dots (*)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \sqrt[n]{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{n} = 0$  より  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1 \dots (**)$

(\*), (\*\*) から、はさみうちの原理により  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{2}$  ■

- 3** (1)  $y = \sin x$  を微分すると  $y' = \cos x$   
 曲線  $y = \sin x$  上の点  $(a_n, \sin a_n)$  における接線の方程式は

$$y - \sin a_n = (x - a_n) \cos a_n$$

これが点  $(-p, 0)$  を通るから、 $\cos a_n \neq 0$  に注意して

$$-\sin a_n = (-p - a_n) \cos a_n \quad \text{よって} \quad \tan a_n = a_n + p$$

- (2)  $f(x) = \tan x - x$  とおくと  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \geq 0$   
 $a_n$  は方程式  $f(x) = p$  の解である ( $p > 0$ ).  $f(x)$  は単調増加であり、

$$f((n-1)\pi) = -(n-1) \leq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{2n-1}{2}\pi - 0} f(x) = \infty$$

であるから、开区間  $I_n = \left( (n-1)\pi, \frac{2n-1}{2}\pi \right)$  に方程式  $f(x) = p$  の解  $a_n$  が唯一存在する.  $a_n \in I_n, a_{n+1} \in I_{n+1}$  より

$$a_{n+1} - a_n > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$f(a_n) = f(a_{n+1})$  であるから

$$\tan a_n - a_n = \tan a_{n+1} - a_{n+1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad \tan a_{n+1} - \tan a_n = a_{n+1} - a_n > 0$$

$\tan a_n = \tan(a_n + \pi)$  であるから

$$\tan(a_n + \pi) < \tan a_{n+1}$$

このとき、 $a_n + \pi \in I_{n+1}, a_{n+1} \in I_{n+1}$  に注意して

$$a_n + \pi < a_{n+1} \quad \text{よって} \quad a_{n+1} - a_n > \pi$$

- (3)  $\textcircled{2}$  から、 $a_{n+1} - a_n = \tan a_{n+1} - \tan a_n$ . これを (2) の結果に代入すると

$$\tan a_{n+1} - \tan a_n > \pi$$

$$\text{したがって} \quad \sum_{k=1}^n (\tan a_{k+1} - \tan a_k) > \sum_{k=1}^n \pi$$

$$a_1 = \frac{\pi}{3} \text{ より} \quad \tan a_{n+1} - \tan \frac{\pi}{3} > n\pi \quad \text{よって} \quad \tan a_{n+1} > n\pi + \sqrt{3} \quad \blacksquare$$

4 (1)  $f(m, n) = {}_{m+n}C_m - mn - 2$  ( $m \leq n$ ) とおくと

$$f(1, n) = (1+n) - 1 \cdot n - 2 = -1$$

$$f(2, n) = \frac{1}{2}(n+2)(n+1) - 2n - 2 = \frac{1}{2}(n+1)(n-2)$$

$f(m, n) = 0$  を満たす正の整数の組  $(m, n)$  を 1 つ求めればよいから

$$(m, n) = (2, 2)$$

(2) 正の整数  $l = 2, 3, \dots, m-1$  について

$$\begin{aligned} {}_{m+n}C_{l+1} - {}_{m+n}C_l &= \frac{(m+n)!}{(l+1)!(m+n-l-1)!} - {}_{m+n}C_m \\ &= \frac{m+n-l}{l+1} \cdot {}_{m+n}C_m - {}_{m+n}C_m \\ &= \frac{m+n-2l-1}{l+1} \cdot {}_{m+n}C_m \\ &= \frac{n-m+2(m-1-l)+1}{l+1} \cdot {}_{m+n}C_m > 0 \end{aligned}$$

ゆえに  ${}_{m+n}C_2 < {}_{m+n}C_3 < \dots < {}_{m+n}C_{m-1} < {}_{m+n}C_m$

したがって、 $2 \leq m \leq n$  を満たす整数  $m, n$  について次式が成立する。

$${}_{m+n}C_m - {}_{m+n}C_2 \geq 0 \quad (*)$$

ただし、上式について等号が成立するとき、 $m = 2$  である。

$$f(m, n) = {}_{m+n}C_m - {}_{m+n}C_2 + {}_{m+n}C_2 - mn - 2$$

とすると、 $2 \leq m \leq n$  であるから

$$\begin{aligned} {}_{m+n}C_2 - mn - 2 &= \frac{1}{2}(m+n)(m+n-1) - mn - 2 \\ &= \frac{1}{2}(m+1)(m-2) + \frac{1}{2}(n+1)(n-2) \geq 0 \quad (**) \end{aligned}$$

が成立する。ただし、等号が成立するとき、 $m = n = 2$  である。

(\*), (\*\*) から、 $f(m, n) = 0$  となるのは、(1) の結果に限る。

別解 1 (1) で  $1 \leq m \leq 2$  のとき,  $(m, n) = (2, 2)$  がただ 1 つの解である.

$m \geq 3$  のとき,  $(m, n)$  の解が存在しないことを示せばよい.

$$m \geq 3 \text{ のとき} \quad {}_{m+n}C_2 < {}_{m+n}C_3 < \cdots < {}_{m+n}C_m$$

$$\text{また} \quad {}_{m+n}C_2 - (mn + 2) = \frac{1}{2}\{n(n-1) + m(m-1) - 4\}$$

$$n \geq m \geq 3 \text{ より} \quad n(n-1) \geq m(m-1) \geq 3 \cdot 2 > 4$$

$$\text{よって} \quad {}_{m+n}C_2 > mn + 2$$

別解 2 与えられた等式から

$$g(m, n) = \frac{{}_{m+n}C_m}{mn + 2} = \frac{(m+n)!}{m!n!(mn+2)}$$

とおく. (1) の結果から  $g(m, n) = 1$  を満たす整数  $m, n$  ( $2 \leq m \leq n$ ) を求めればよい.

$$\begin{aligned} \frac{g(m, n+1)}{g(m, n)} - 1 &= \frac{(m+n+1)(mn+2)}{(n+1)(mn+m+2)} - 1 \\ &= \frac{\{(n+1)+m\}(mn+2)}{(n+1)\{(mn+2)+m\}} - 1 \\ &= \frac{m(mn+2) - m(n+1)}{(n+1)\{(mn+2)+m\}} \\ &= \frac{m\{(m-1)n+1\}}{(n+1)\{(mn+2)+m\}} > 0 \end{aligned}$$

$g(m, n+1) > g(m, n)$  であるから,  $m$  を固定すると,  $g(m, n)$  は  $n$  について単調増加. また,  $g(m, n)$  は  $m, n$  の対称式であるから, 同様に  $n$  を固定すると,  $g(m, n)$  は  $m$  について単調増加. したがって

$$g(m, n) \geq g(2, 2) = 1$$

が成立する. ただし, 等号が成立するとき,  $m = n = 2$  である.

よって, 求める正の整数の組  $(m, n)$  は (1) の結果に限る. ■