

令和3年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
 医学部医学科 令和3年2月25日

問題 1 2 3 4

- 1 空間の点Oを通らない平面 α をとる。 α 上の3点A, B, Cは三角形をなすとし, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とおく。 k を1より大きい定数とする。直線 ℓ は媒介変数 t を用いて

$$\frac{k}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{tk}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$$

と表せるとする。 ℓ 上を点Xが動くとき, 2点O, Xを通る直線と平面 α の交点Yの軌跡を m とする。

- (1) $\triangle ABC$ の各辺と m との交点の個数をそれぞれ求めよ。また, 交点がある場合, 各交点Zについて, \vec{OZ} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いてそれぞれ表せ。
- (2) A, Bの中点をDとする。 ℓ を含み α に平行な平面を β とし, O, Dを通る直線と平面 β の交点をEとする。点Oと m 上の点Yを通る直線は2点E, Cを通る直線と交点をもつとし, その交点をFとする。このとき, \vec{OF} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} および k を用いて表せ。
- 2 複素数 w は実部, 虚部ともに正であるとする。相異なる複素数 α , β , γ は

$$\{(w+2)\alpha\}^2 + (w\beta)^2 - (2\gamma)^2 = 4(w+2)\alpha^2 + 2w^2\alpha\beta - 8\alpha\gamma$$

を満たすとする。 α , β , γ を表す複素数平面上の点をそれぞれA, B, Cとする。

- (1) $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$)のとりうる範囲を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ が正三角形であるときの w の値を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ が正三角形であるとする。 $w = \alpha$ かつ $\triangle ABC$ の重心が点 $\frac{w^2}{2}$ であるとき, β と γ の値を求めよ。

3 媒介変数 t を用いて表された曲線

$$C : x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

を考える。

- (1) 点 M の座標を $(0, 1)$ とする。曲線 C 上の点 P に対して、 MP を最小にする t の値 t_0 を求めよ。
- (2) (1) の t_0 に対する曲線 C 上の点を Q とする。 Q における C の接線を l とするとき、曲線 C と接線 l および x 軸で囲まれた部分 D の面積を求めよ。
- (3) (2) の D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

- (1) n を正の整数とするとき、定積分 $\int_0^{2\pi} |\sin nx - \sin 2nx| dx$ を求めよ。
- (2) c を正の数とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c |\sin nx - \sin 2nx| dx$ を求めよ。

解答例

- 1 (1) ℓ 上の点 X について, $k \neq 0$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\vec{OX} &= \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) \\ &= \frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{c}\end{aligned}$$

このとき, \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} の係数の和は

$$\frac{2t}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right) = 1$$

これから, $\frac{1}{k}\vec{OX}$ は α 上の点であり,

$$\vec{OY} = \frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{c}$$

\vec{OY} の \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} の係数が 0 となる点をそれぞれ Z_1 , Z_2 , Z_3 とすると

$$\vec{OZ}_1 = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3}, \quad \vec{OZ}_2 = \frac{2\vec{a} + \vec{c}}{3}, \quad \vec{OZ}_3 = \frac{4\vec{a} - \vec{b}}{3}$$

直線 m と $\triangle ABC$ の各辺との交点の個数について, 辺 BC 上は Z_1 の 1 個, 辺 CA 上は Z_2 の 1 個, 辺 AB 上は 0 個.

- (2) Y は CD 上の点であるから $\vec{CY} = s\vec{CD} = \frac{s}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$ (s は実数)

$$\vec{CA} = \frac{3}{2}\vec{CZ}_2, \quad \vec{CB} = 3\vec{CZ}_1 \text{ を代入すると } \vec{CY} = \frac{3s}{4}\vec{CZ}_2 + \frac{3s}{2}\vec{CZ}_1$$

$$Y \text{ は直線 } Z_1Z_2 \text{ 上の点であるから } \frac{3s}{4} + \frac{3s}{2} = 1$$

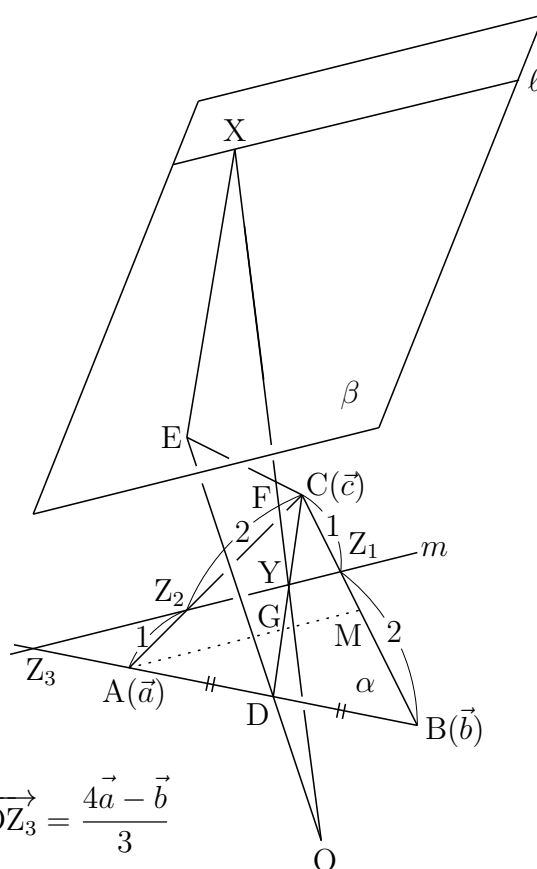
$$\text{これを解いて } s = \frac{4}{9} \text{ すなわち } CY : YD = 4 : 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{条件から } \triangle OYD \sim \triangle OXE \text{ (1) の結果から } YD : XE = 1 : k \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ および } \triangle CYF \sim \triangle EXF \text{ より } CF : FE = CY : XE = 4 : 5k$$

このとき, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OE} = k\vec{OD} = \frac{k}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ であるから

$$\vec{OF} = \frac{5k\vec{OC} + 4\vec{OE}}{4 + 5k} = \frac{5k\vec{c} + 4 \cdot \frac{k}{2}(\vec{a} + \vec{b})}{4 + 5k} = \frac{k}{5k + 4}(2\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c})$$



別解 Z_3 は線分 AB を $1:4$ に外分する点, D は AB の中点であるから

$$Z_3A : AB = 1 : 3 \quad \text{ゆえに} \quad Z_3A : AD = 2 : 3$$

$\triangle CAD$ と直線 m について, メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{CZ_2}{Z_2A} \cdot \frac{AZ_3}{Z_3D} \cdot \frac{DY}{YC} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{DY}{YC} = 1$$

したがって $CY : YD = 4 : 5$ (以下同様)

補足 直線 m について

$$\vec{OY} = \frac{1}{k} \vec{OX} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$$

BC の中点を M とすると, この直線 m の方向ベクトル $2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ は

$$2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = -\{(\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{a})\} = -(\vec{AB} + \vec{AC}) = -2\vec{AM}$$

したがって, m は中線 AM と平行である.

2つの中線 AM と CD の交点 G は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$CG : GD = 2 : 1$$

$m \parallel AM$ であるから $CY : YG = CZ_2 : Z_2A = 2 : 1$

$$CD : CY = 1 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 9 : 4 \quad \text{ゆえに} \quad CY : YD = 4 : 5$$

2 (1) $\{(w+2)\alpha\}^2 + (w\beta)^2 - (2\gamma)^2 = 4(w+2)\alpha^2 + 2w^2\alpha\beta - 8\alpha\gamma$

これを w について整理すると

$$\begin{aligned} w^2(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) &= 4(\gamma^2 - 2\gamma\alpha + \alpha^2) \\ w^2(\beta - \alpha)^2 &= 4(\gamma - \alpha)^2 \end{aligned}$$

α, β, γ は相異なる複素数であるから

$$\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^2 = \frac{w^2}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm \frac{w}{2}$$

w の実部, 虚部はともに正であるから $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$

$$(i) \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{w}{2} \text{ のとき } \arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = \arg \left(\frac{w}{2} \right) = \arg w$$

$$0 < \arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) < \frac{\pi}{2}$$

$$(ii) \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = -\frac{w}{2} \text{ のとき } \arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = \arg \left(-\frac{w}{2} \right) = \arg w + \pi$$

$$\pi < \arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) < \frac{3}{2}\pi$$

$\theta = \arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right)$ であるから $(0 \leq \theta < 2\pi)$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$$

(2) $\triangle ABC$ が正三角形であるとき

$$\left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = 1 \quad \text{かつ} \quad \arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$$

$\arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = \frac{5}{3}\pi$ は, (i), (ii) とともに満たさない.

$\arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = \frac{\pi}{3}$ は (i) を満たし, このとき

$$\left| \frac{w}{2} \right| = \left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = 1 \quad \text{かつ} \quad \arg \left(\frac{w}{2} \right) = \arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = \frac{\pi}{3}$$

したがって (*) $\frac{w}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ よって $w = 1 + \sqrt{3}i$

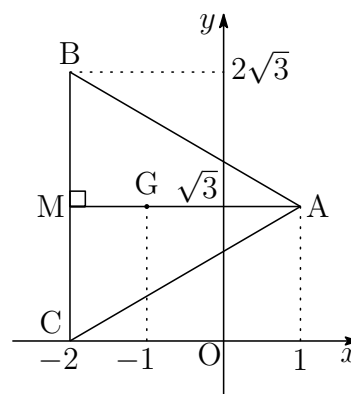
(3) (*) より

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \cdot \frac{w}{2} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w^2}{2} &= 2 \left(\frac{w}{2} \right)^2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

BC の中点を M とすると $M(-2 + \sqrt{3}i)$

AM = 3 より $BM = CM = \sqrt{3}$ よって $\beta = -2 + 2\sqrt{3}i, \gamma = -2$



■

3 (1) 媒介変数 t を用いて表された曲線

$$C: x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \quad (*)$$

は, (***) $x = \sqrt{y^2 + 1}$ である. C 上の点 $P(x, y)$ と $M(0, 1)$ の距離は

$$MP^2 = x^2 + (y - 1)^2 = y^2 + 1 + (y - 1)^2 = 2 \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2}$$

MP が最小となるとき, $y = \frac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad e^{2t} - e^t - 1 = 0$$

$e^t > 0$ に注意して $e^t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ よって $t_0 = \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(2) $y = \frac{1}{2}$ を (***) を代入して $Q\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$x^2 - y^2 = 1$ であるから

$$2x - 2yy' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad yy' = x$$

C 上の点 Q における接線 ℓ の傾きは

$$\frac{1}{2}y' = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad y' = \sqrt{5}$$

したがって, ℓ の方程式は

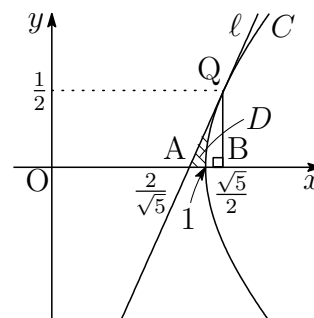
$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{5} \left(x - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \quad \text{すなわち} \quad y = \sqrt{5}x - 2$$

ℓ と x 軸の交点を A とする. Q から x 軸に垂線 QB を引くと

$$\triangle QAB = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{40}$$

(*) の定積分 $\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y dx$ について $\frac{1}{2}(e^{t_0} + e^{-t_0}) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{2}(e^{t_0} - e^{-t_0}) = \frac{1}{2}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \quad \begin{array}{c|c|c} x & 1 & \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \hline t & 0 & \rightarrow t_0 \end{array}$$



$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y dx &= \frac{1}{4} \int_0^{t_0} (e^t - e^{-t})^2 dt = \frac{1}{4} \int_0^{t_0} (e^{2t} - 2 + e^{-2t}) dt \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} e^{2t} - 2t - \frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^{t_0} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (e^{t_0} + e^{-t_0}) \cdot \frac{1}{2} (e^{t_0} - e^{-t_0}) - \frac{1}{2} t_0 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

したがって、領域 D の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \triangle QAB - \int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y dx \\
&= \frac{\sqrt{5}}{40} - \left(\frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}
\end{aligned}$$

別解 $\sqrt{x^2 - 1}$ の積分 (一般には, $\sqrt{x^2 + A}$ の積分)¹

$$\begin{aligned}
(x\sqrt{x^2 - 1})' &= \sqrt{x^2 - 1} + x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\
\{\log(x + \sqrt{x^2 - 1})\}' &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}
\end{aligned}$$

上の第1式から第2式の辺々を引くと

$$\{x\sqrt{x^2 - 1} - \log(x + \sqrt{x^2 - 1})\}' = 2\sqrt{x^2 - 1}$$

したがって $\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \{x\sqrt{x^2 - 1} - \log(x + \sqrt{x^2 - 1})\} + C$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y dx &= \int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \sqrt{x^2 - 1} dx \\
&= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 - 1} - \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right]_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad (\text{以下同様})
\end{aligned}$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf (p.162 (物理ページ p.167))

- (3) 曲線 $C: x = \sqrt{y^2 + 1}$ と x 軸, y 軸, 直線 $y = \frac{1}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dy = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (y^2 + 1) dx = \pi \left[\frac{y^3}{3} + y \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{13}{24}\pi$$

ℓ と x 軸, y 軸, 直線 $y = \frac{1}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる円錐台の体積を V_2 とすると

$$V_2 = \frac{\pi}{3} \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right\} \frac{1}{2} = \frac{61}{120}\pi$$

求める回転体の体積を V とすると

$$V = \frac{13}{24}\pi - \frac{61}{120}\pi = \frac{\pi}{30}$$

補足 上面の半径 a , 底面の半径 b , 高さ h の円錐台の体積は²

$$\frac{\pi}{3}(a^2 + ab + b^2)h$$

別解 $\triangle QAB$ を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_3 とすると

$$V_3 = \pi \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \frac{1}{2} - V_2 = \frac{5}{8}\pi - \frac{61}{120}\pi = \frac{7}{60}\pi$$

曲線 $C: y = \sqrt{x^2 - 1}$ と x 軸, 直線 $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_4 とすると, バウムクーヘン型の求積法により³

$$V_4 = 2\pi \int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} x\sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{2\pi}{3} \left[(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\pi}{12}$$

よって
$$V = V_3 - V_4 = \frac{7}{60}\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{30}$$

補足 $\triangle QAB$ の重心の x 座標は $\frac{1}{3} \left(1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{7\sqrt{5}}{15}$

V_3 は, パップス=ギュルダンの定理により⁴

$$V_3 = 2\pi \cdot \frac{7\sqrt{5}}{15} \cdot \triangle QAB = 2\pi \cdot \frac{7\sqrt{5}}{15} \cdot \frac{\sqrt{5}}{40} = \frac{7}{60}\pi$$

²http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_2019.pdf (p.4)

³http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2016.pdf 2

⁴http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf 1

4 (1) $I_n = \int_0^{2\pi} |\sin nx - \sin 2nx| dx$ とおく.

$$t = nx \text{ とすると } \frac{dt}{dx} = n \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow 2\pi \\ \hline t & 0 \longrightarrow 2n\pi \end{array}$$

$$I_n = \int_0^{2n\pi} |\sin t - \sin 2t| \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n} \int_0^{2n\pi} |\sin x - \sin 2x| dx \quad (*)$$

ここで, $f(x) = \sin x - \sin 2x$ とし, $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x) = -\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ とおく.

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \sin(x + 2\pi) - \sin 2(x + 2\pi) = f(x), \\ f(2\pi - x) &= \sin(2\pi - x) - \sin 2(2\pi - x) = -\sin x + \sin 2x = -f(x) \end{aligned}$$

$f(x)$ は周期 2π の周期関数で, $|f(2\pi - x)| = |f(x)|$ であるから

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n} \int_0^{2n\pi} |f(x)| dx = \frac{1}{n} \cdot n \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx \\ &= \int_0^{\pi} |f(x)| dx + \int_{\pi}^{2\pi} |f(x)| dx \end{aligned}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} |f(x)| dx \text{ について, } x = 2\pi - u \text{ とおくと } \frac{dx}{du} = -1 \quad \begin{array}{c|c} x & \pi \longrightarrow 2\pi \\ \hline u & \pi \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} |f(x)| dx = \int_{\pi}^0 |f(2\pi - u)| (-1) du = \int_0^{\pi} |f(u)| du = \int_0^{\pi} |f(x)| dx$$

したがって $I_n = 2 \int_0^{\pi} |f(x)| dx$

$$f(x) = \sin x(1 - 2\cos x) \text{ より } |f(x)| = \begin{cases} -f(x) & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}) \\ f(x) & (\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{I_n}{2} &= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} f(x) dx = -\left[F(x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[F(x) \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= F(0) - 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) + F(\pi) = -\frac{1}{2} - 2\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

よって $I_n = 2 \times \frac{5}{2} = 5$

$$(2) J_n = \int_0^c |\sin nx - \sin 2nx| \text{ とおく.}$$

$$t = nx \text{ とすると } \frac{dt}{dx} = n \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow c \\ \hline t & 0 \longrightarrow nc \end{array}$$

$$J_n = \int_0^{nc} |\sin t - \sin 2t| \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(t)| dt = \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(x)| dx$$

$\frac{nc}{2\pi}$ 以下の最大の整数を N とすると

$$(**) \quad N \leq \frac{nc}{2\pi} < N + 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2N\pi \leq nc < 2(N + 1)\pi$$

(*) および (1) の結果により, $I_N = \frac{1}{N} \int_0^{2N\pi} |f(x)| dx = 5$ であるから

$$\int_0^{2N\pi} |f(x)| dx = 5N$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^{2N\pi} |f(x)| dx &\leq \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(x)| dx < \frac{1}{n} \int_0^{2(N+1)\pi} |f(x)| dx \\ \frac{1}{n} \cdot 5N &\leq J_n < \frac{1}{n} \cdot 5(N + 1) \end{aligned}$$

(**) より $\frac{nc}{2\pi} - 1 < N$, $N + 1 \leq \frac{nc}{2\pi} + 1$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{5}{n} \left(\frac{nc}{2\pi} - 1 \right) &< J_n < \frac{5}{n} \left(\frac{nc}{2\pi} + 1 \right) \\ \frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n} &< J_n < \frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n} \end{aligned}$$

このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n} \right) = \frac{5c}{2\pi}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n} \right) = \frac{5c}{2\pi}$

よって, はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{5c}{2\pi}$ ■