令和３年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
医学部医学科　令和 3 年 2 月 25 日

1 空間の点 O を通らない平面 α をとる。α 上の 3 点 A，B，C は三角形をなすとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。k を 1 より大きい定数とする。直線 ℓ は媒介変数 t を用いて

$$\frac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\frac{tk}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$

と表せるとする。ℓ 上を点 X が動くとき，2 点 O，X を通る直線と平面 α の交点 Y の軌跡を m とする。

(1) $\triangle$ABC の各辺と m との交点の個数をそれぞれ求めよ。また，交点がある場合，各交点 Z について，$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。

(2) A，B の中点を D とする。ℓ を含み α に平行な平面を β とし，O，D を通る直線と平面 β の交点を E とする。点 O と m 上の点 Y を通る直線は 2 点 E，C を通る直線と交点をもつとし，その交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および k を用いて表せ。

2 複素数 w は実部，虚部ともに正であるとする。相異なる複素数 α，β，γ は

$$\{(w+2)\alpha\}^2+(w\beta)^2-(2\gamma)^2=4(w+2)\alpha^2+2w^2\alpha\beta-8\alpha\gamma$$

を満たすとする。α，β，γ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B，C とする。

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の偏角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のとりうる範囲を求めよ。

(2) $\triangle$ABC が正三角形であるときの w の値を求めよ。

(3) $\triangle$ABC が正三角形であるとする。$w=\alpha$ かつ $\triangle$ABC の重心が点 $\dfrac{w^2}{2}$ であるとき，β と γ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 媒介変数 t を用いて表された曲線

$$C : x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

を考える。

(1) 点 M の座標を $(0,\ 1)$ とする。曲線 C 上の点 P に対して，MP を最小にする t の値 t_0 を求めよ。

(2) (1) の t_0 に対する曲線 C 上の点を Q とする。Q における C の接線を ℓ とするとき，曲線 C と接線 ℓ および x 軸で囲まれた部分 D の面積を求めよ。

(3) (2) の D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問いに答えよ。

(1) n を正の整数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin nx - \sin 2nx|\, dx$ を求めよ。

(2) c を正の数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{c} |\sin nx - \sin 2nx|\, dx$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\textbf{1}}$ (1) ℓ 上の点 X について，$k \neq 0$ より

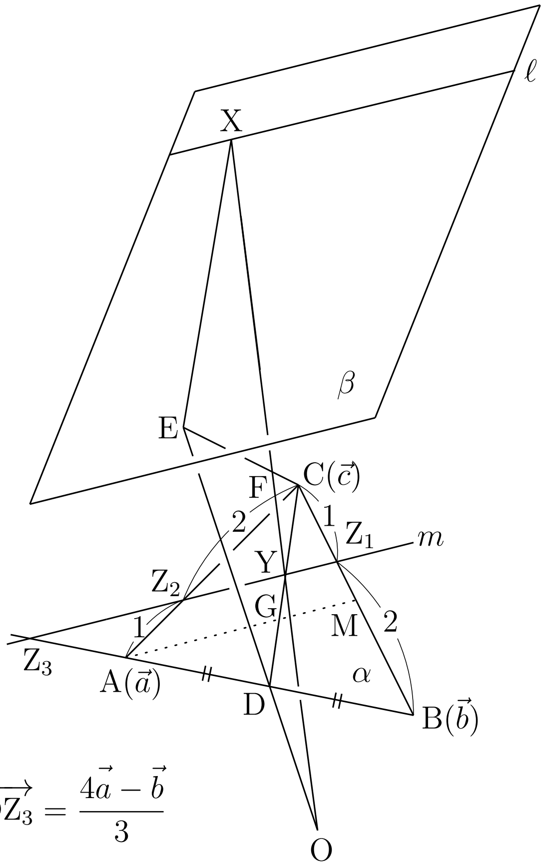
$$\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$
$$= \frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}$$

このとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数の和は

$$\frac{2t}{3} + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right) = 1$$

これから，$\dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ は α 上の点であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}$$



$\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数が 0 となる点を
それぞれ $\mathrm{Z_1}$，$\mathrm{Z_2}$，$\mathrm{Z_3}$ とすると

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OZ_1}} = \frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}},\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OZ_2}} = \frac{2\vec{a}+\vec{c}}{3}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OZ_3}} = \frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}$$

直線 m と △ABC の各辺との交点の個数について，辺 BC 上は $\mathrm{Z_1}$ の **1 個**，
辺 CA 上は $\mathrm{Z_2}$ の **1 個**，辺 AB 上は **0 個**.

(2) Y は CD 上の点であるから $\quad \overrightarrow{\mathrm{CY}} = s\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \dfrac{s}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}) \quad$ (s は実数)

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CZ_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = 3\overrightarrow{\mathrm{CZ_1}}$ を代入すると $\quad \overrightarrow{\mathrm{CY}} = \dfrac{3s}{4}\overrightarrow{\mathrm{CZ_2}} + \dfrac{3s}{2}\overrightarrow{\mathrm{CZ_1}}$

Y は直線 $\mathrm{Z_1Z_2}$ 上の点であるから $\qquad \dfrac{3s}{4} + \dfrac{3s}{2} = 1$

これを解いて $\quad s = \dfrac{4}{9} \quad$ すなわち $\quad \mathrm{CY} : \mathrm{YD} = 4 : 5 \quad \cdots$①

条件から $\quad \triangle\mathrm{OYD} \backsim \triangle\mathrm{OXE} \quad$ (1) の結果から $\quad \mathrm{YD} : \mathrm{XE} = 1 : k \quad \cdots$②

①，② および $\triangle\mathrm{CYF} \backsim \triangle\mathrm{EXF}$ より $\quad \mathrm{CF} : \mathrm{FE} = \mathrm{CY} : \mathrm{XE} = 4 : 5k$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = k\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{k}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{5k\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{4+5k} = \frac{5k\vec{c} + 4\cdot\frac{k}{2}(\vec{a}+\vec{b})}{4+5k} = \boldsymbol{\frac{k}{5k+4}(2\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c})}$$

別解 Z_3 は線分 AB を $1:4$ に外分する点，D は AB の中点であるから

$$\mathrm{Z_3A} : \mathrm{AB} = 1 : 3 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Z_3A} : \mathrm{AD} = 2 : 3$$

$\triangle$CAD と直線 m について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{CZ_2}}{\mathrm{Z_2A}}\cdot\frac{\mathrm{AZ_3}}{\mathrm{Z_3D}}\cdot\frac{\mathrm{DY}}{\mathrm{YC}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{\mathrm{DY}}{\mathrm{YC}} = 1$$

したがって　$\mathrm{CY} : \mathrm{YD} = 4 : 5$　　(以下同様)

補足 直線 m について

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$$

BC の中点を M とすると，この直線の方向ベクトル $2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ は

$$2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = -\{(\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{a})\} = -(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = -2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

したがって，m は中線 AM と平行である．
2 つの中線 AM と CD の交点 G は $\triangle$ABC の重心であるから

$$\mathrm{CG} : \mathrm{GD} = 2 : 1$$

$m /\!/ \mathrm{AM}$ であるから　$\mathrm{CY} : \mathrm{YG} = \mathrm{CZ_2} : \mathrm{Z_2A} = 2 : 1$

$$\mathrm{CD} : \mathrm{CY} = 1 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 9 : 4 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{CY} : \mathrm{YD} = 4 : 5$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)　$$\{(w+2)\alpha\}^2 + (w\beta)^2 - (2\gamma)^2 = 4(w+2)\alpha^2 + 2w^2\alpha\beta - 8\alpha\gamma$$

これを w について整理すると

$$w^2(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = 4(\gamma^2 - 2\gamma\alpha + \alpha^2)$$
$$w^2(\beta - \alpha)^2 = 4(\gamma - \alpha)^2$$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は相異なる複素数であるから

$$\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^2 = \frac{w^2}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm\frac{w}{2}$$

w の実部，虚部はともに正であるから　$0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}$

(i) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \dfrac{w}{2}$ のとき　$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \arg\left(\dfrac{w}{2}\right) = \arg w$

$$0 < \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) < \frac{\pi}{2}$$

(ii) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = -\dfrac{w}{2}$ のとき　$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \arg\left(-\dfrac{w}{2}\right) = \arg w + \pi$

$$\pi < \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) < \frac{3}{2}\pi$$

$\theta = \arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$ であるから $(0 \leqq \theta < 2\pi)$

$$\boldsymbol{0 < \theta < \frac{\pi}{2},\quad \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi}$$

(2) $\triangle$ABC が正三角形であるとき

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = 1 \quad \text{かつ} \quad \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$

$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \dfrac{5}{3}\pi$ は，(i)，(ii) ともに満たさない．

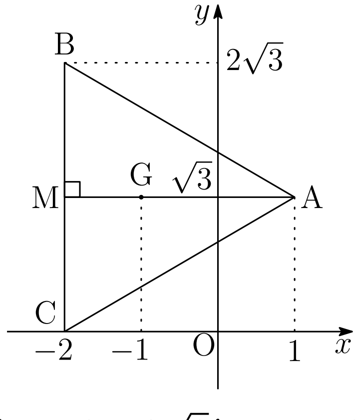
$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ は (i) を満たし，このとき

$$\left|\frac{w}{2}\right| = \left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = 1 \quad \text{かつ} \quad \arg\left(\frac{w}{2}\right) = \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \frac{\pi}{3}$$

したがって　$(*)$　$\dfrac{w}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$　　よって　$\boldsymbol{w = 1 + \sqrt{3}i}$

(3) $(*)$ より

$$\begin{aligned}\alpha &= 2\cdot\frac{w}{2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\ &= 1 + \sqrt{3}i\\ \frac{w^2}{2} &= 2\left(\frac{w}{2}\right)^2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -1 + \sqrt{3}i\end{aligned}$$



BC の中点を M とすると　M$(-2 + \sqrt{3}i)$

AM $= 3$ より　BM $=$ CM $= \sqrt{3}$　　よって　$\boldsymbol{\beta = -2 + 2\sqrt{3}i,\ \gamma = -2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 媒介変数 t を用いて表された曲線

$$C : x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \qquad (*)$$

は，(**) $x = \sqrt{y^2+1}$ である．C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と $\mathrm{M}(0,\ 1)$ の距離は

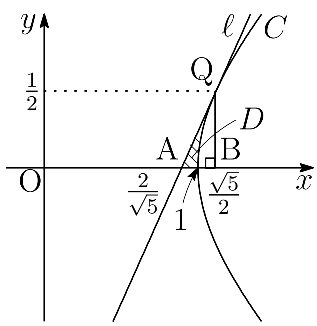
$$\mathrm{MP}^2 = x^2 + (y-1)^2 = y^2 + 1 + (y-1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

MP が最小となるとき，$y = \frac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad e^{2t} - e^t - 1 = 0$$

$e^t > 0$ に注意して　$e^t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　よって　$\boldsymbol{t_0 = \log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(2) $y = \frac{1}{2}$ を (**) を代入して　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$



$x^2 - y^2 = 1$ であるから

$$2x - 2yy' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad yy' = x$$

C 上の点 Q における接線 ℓ の傾きは

$$\frac{1}{2}y' = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad y' = \sqrt{5}$$

したがって，ℓ の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{5}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = \sqrt{5}x - 2$$

ℓ と x 軸の交点を A とする．Q から x 軸に垂線 QB を引くと

$$\triangle\mathrm{QAB} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{40}$$

(*) の定積分 $\displaystyle\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y\,dx$ について　$\dfrac{1}{2}(e^{t_0} + e^{-t_0}) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{1}{2}(e^{t_0} - e^{-t_0}) = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

x	$1 \longrightarrow \frac{\sqrt{5}}{2}$
t	$0 \longrightarrow t_0$

$$\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{t_0} \left(e^t - e^{-t}\right)^2\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{t_0} (e^{2t} - 2 + e^{-2t})\,dt$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t} - 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{t_0}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(e^{t_0} + e^{-t_0})\cdot\frac{1}{2}(e^{t_0} - e^{-t_0}) - \frac{1}{2}t_0$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

したがって，領域 D の面積を S とすると

$$S = \triangle\mathrm{QAB} - \int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{40} - \left(\frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}}$$

別解 $\sqrt{x^2-1}$ の積分 (一般には，$\sqrt{x^2+A}$ の積分)[1]

$$(x\sqrt{x^2-1})' = \sqrt{x^2-1} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\{\log(x+\sqrt{x^2-1}\}' = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$\{x\sqrt{x^2-1} - \log(x+\sqrt{x^2-1})\}' = 2\sqrt{x^2-1}$$

したがって $\displaystyle\int\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2-1} - \log(x+\sqrt{x^2-1})\} + C$

$$\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y\,dx = \int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \sqrt{x^2-1}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\ x\sqrt{x^2-1} - \log(x+\sqrt{x^2-1})\ \Big]_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{(以下同様)}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf (p.162 (物理ページ p.167))

(3) 曲線 $C : x = \sqrt{y^2+1}$ と x 軸，y 軸，直線 $y = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \pi\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dy = \pi\int_0^{\frac{1}{2}} (y^2+1)\,dx = \pi\left[\,\frac{y^3}{3}+y\,\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{13}{24}\pi$$

ℓ と x 軸，y 軸，直線 $y = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる円錐台の体積を V_2 とすると

$$V_2 = \frac{\pi}{3}\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}\frac{1}{2} = \frac{61}{120}\pi$$

求める回転体の体積を V とすると

$$V = \frac{13}{24}\pi - \frac{61}{120}\pi = \boldsymbol{\frac{\pi}{30}}$$

補足 上面の半径 a，底面の半径 b，高さ h の円錐台の体積は [2]

$$\frac{\pi}{3}(a^2+ab+b^2)h$$

別解 $\triangle$QAB を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_3 とすると

$$V_3 = \pi\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\frac{1}{2} - V_2 = \frac{5}{8}\pi - \frac{61}{120}\pi = \frac{7}{60}\pi$$

曲線 $C : y = \sqrt{x^2-1}$ と x 軸，直線 $x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_4 とすると，バウムクーヘン型の求積法により [3]

$$V_4 = 2\pi\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{2\pi}{3}\left[\,(x^2-1)^{\frac{3}{2}}\,\right]_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\pi}{12}$$

よって　　$V = V_3 - V_4 = \dfrac{7}{60}\pi - \dfrac{\pi}{12} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{30}}$

補足 $\triangle$QAB の重心の x 座標は　$\dfrac{1}{3}\left(1\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}} + 2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{7\sqrt{5}}{15}$

V_3 は，パップス=ギュルダンの定理により [4]

$$V_3 = 2\pi\cdot\frac{7\sqrt{5}}{15}\cdot\triangle\mathrm{QAB} = 2\pi\cdot\frac{7\sqrt{5}}{15}\cdot\frac{\sqrt{5}}{40} = \frac{7}{60}\pi$$

---

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_2019.pdf (p.4)
[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2016.pdf $\boxed{2}$
[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf $\boxed{1}$

バウムクーヘン型求積法

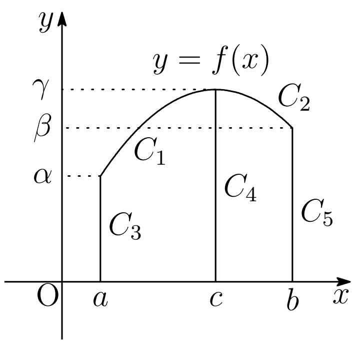
次の回転体の体積について，円筒形に区分して考えると積分の意味が理解できる．

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$$

証明 $y = f(x)$ のグラフを単調増加または単調減少の区間に分けて証明する．例えば，右の図のように $y = f(x)$ は $a \leqq x \leqq c$ で単調増加，$c \leqq x \leqq b$ では単調減少とする．このとき，それぞれの区間で逆関数が存在することから



$$C_1 : x = g_1(y)\ (\alpha \leqq y \leqq \gamma),$$
$$C_2 : x = g_2(y)\ (\beta \leqq y \leqq \gamma)$$

とおき，さらに次のようにおく．

$$C_3 : x = a\ (0 \leqq y \leqq \alpha), \quad C_4 : x = c\ (0 \leqq y \leqq \gamma), \quad C_5 : x = b\ (0 \leqq y \leqq \beta)$$

x 軸と C_1，C_3，C_4 で囲まれた部分および C_2，C_4，C_5 で囲まれた部分をそれぞれ y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^\gamma c^2\,dy - \int_0^\alpha a^2\,dy - \int_\alpha^\gamma \{g_1(y)\}^2\,dy \\
&= c^2\gamma - a^2\alpha - \int_a^c x^2 f'(x)\,dx \\
&= c^2\gamma - a^2\alpha - \Big[\ x^2 f(x)\ \Big]_a^c + 2\int_a^c xf(x)\,dx = 2\int_a^c xf(x)\,dx \\
\frac{V_2}{\pi} &= \int_0^\beta b^2\,dy + \int_\beta^\gamma \{g_2(y)\}^2\,dy - \int_0^\gamma c^2\,dy \\
&= b^2\beta - c^2\gamma + \int_b^c x^2 f'(x)\,dx \\
&= b^2\beta - c^2\gamma + \Big[\ x^2 f(x)\ \Big]_b^c - 2\int_b^c xf(x)\,dx = 2\int_c^b xf(x)\,dx
\end{aligned}$$

よって　$V = V_1 + V_2 = 2\pi \int_a^c xf(x)\,dx + 2\pi \int_c^b xf(x)\,dx = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$

一般に，単調増加・単調減少の区間に分けることで上の結果を得る．　　**証終**

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin nx - \sin 2nx|\,dx$ とおく．

$t = nx$ とすると　$\dfrac{dt}{dx} = n$

x	$0 \longrightarrow 2\pi$
t	$0 \longrightarrow 2n\pi$

$$I_n = \int_0^{2n\pi} |\sin t - \sin 2t|\,\frac{1}{n}dt = \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} |\sin x - \sin 2x|\,dx \qquad (*)$$

ここで，$f(x) = \sin x - \sin 2x$ とし，$f(x)$ の原始関数の 1 つを
$F(x) = -\cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$ とおく．

$$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) - \sin 2(x+2\pi) = f(x),$$
$$f(2\pi - x) = \sin(2\pi - x) - \sin 2(2\pi - x) = -\sin x + \sin 2x = -f(x)$$

$f(x)$ は周期 2π の周期関数で，$|f(2\pi - x)| = |f(x)|$ であるから

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} |f(x)|\,dx = \frac{1}{n}\cdot n\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$
$$= \int_0^{\pi} |f(x)|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

$\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} |f(x)|\,dx$ について，$x = 2\pi - u$ とおくと　$\dfrac{dx}{du} = -1$

x	$\pi \longrightarrow 2\pi$
u	$\pi \longrightarrow 0$

$$\int_{\pi}^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_{\pi}^{0} |f(2\pi - u)|\,(-1)du = \int_0^{\pi} |f(u)|\,du = \int_0^{\pi} |f(x)|\,dx$$

したがって　　$I_n = 2\displaystyle\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx$

$f(x) = \sin x(1 - 2\cos x)$ より　$|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}) \\ f(x) & (\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \pi) \end{cases}$

$$\frac{I_n}{2} = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} f(x)\,dx = -\Big[\ F(x)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} + \Big[\ F(x)\ \Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$
$$= F(0) - 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) + F(\pi) = -\frac{1}{2} - 2\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

よって　　$I_n = 2 \times \dfrac{5}{2} = \mathbf{5}$

(2) $J_n = \displaystyle\int_0^c |\sin nx - \sin 2nx|$ とおく．

$t = nx$ とすると　$\dfrac{dt}{dx} = n$

x	$0 \longrightarrow c$
t	$0 \longrightarrow nc$

$$J_n = \int_0^{nc} |\sin t - \sin 2t| \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(t)|\, dt = \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(x)|\, dx$$

$\dfrac{nc}{2\pi}$ 以下の最大の整数を N とすると

$$(**) \quad N \leqq \frac{nc}{2\pi} < N+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2N\pi \leqq nc < 2(N+1)\pi$$

$(*)$ および (1) の結果により，$I_N = \dfrac{1}{N} \displaystyle\int_0^{2N\pi} |f(x)|\, dx = 5$ であるから

$$\int_0^{2N\pi} |f(x)|\, dx = 5N$$

したがって

$$\frac{1}{n} \int_0^{2N\pi} |f(x)|\, dx \leqq \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(x)|\, dx < \frac{1}{n} \int_0^{2(N+1)\pi} |f(x)|\, dx$$

$$\frac{1}{n} \cdot 5N \leqq J_n < \frac{1}{n} \cdot 5(N+1)$$

$(**)$ より　$\dfrac{nc}{2\pi} - 1 < N$，$N+1 \leqq \dfrac{nc}{2\pi} + 1$ であるから

$$\frac{5}{n} \left(\frac{nc}{2\pi} - 1 \right) < J_n < \frac{5}{n} \left(\frac{nc}{2\pi} + 1 \right)$$

$$\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n} < J_n < \frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n}$$

このとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n} \right) = \frac{5c}{2\pi}$，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n} \right) = \frac{5c}{2\pi}$

よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} J_n = \frac{5c}{2\pi}}$