令和２年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
医学部医学科　令和２年２月 25 日

1 xy 平面上において，媒介変数 t $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$ によって

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = 1 - \cos 3t \end{cases}$$

と表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) C 上の点で x 座標が最大になる点 P と y 座標が最大になる点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2) C 上の点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 α，β を複素数とし，複素数平面上の点 O(0)，A(α)，B(β)，C($|\alpha|^2$)，D($\overline{\alpha}\beta$) を考える．3 点 O，A，B は三角形をなすとする。また，複素数 z に対し，$\mathrm{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle$OAB の面積を S_1，$\triangle$OCD の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(2) $\triangle$OAB の面積 S_1 は $\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$ で与えられることを示せ。

(3) 実数 a，b に対し，複素数 z を $z = a + bi$ で定める。$1 \leqq a \leqq 2$，$1 \leqq b \leqq 3$ のとき，3 点 O(0)，P(z)，Q$\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする $\triangle$OPQ の面積の最大値と最小値を求めよ。

3 以下の問いに答えよ。

(1) x が自然数のとき，x^2 を 5 で割ったときの余りは 0，1，4 のいずれかであることを示せ。

(2) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x，y，z の組は存在しないことを示せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ xy 平面において，x，y がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し，

$$0 < x < n, \quad 1 < 2^y < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点 $(x,\ y)$ の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} \leqq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

を示せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。

(3) (2) で求めた極限値を L とする。不等式

$$L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}$$

を示せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x=f(t)=\sin t$，$y=g(t)=1-\cos 3t$ とおくと $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$

$$f'(t)=\cos t, \qquad g'(t)=3\sin 3t$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

上の増減表から　点 P は　$\left(f\left(\dfrac{\pi}{2}\right),\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$　すなわち　$\mathbf{(1,\ 1)}$

点 Q は　$\left(f\left(\dfrac{\pi}{3}\right),\ g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{2}\right)$

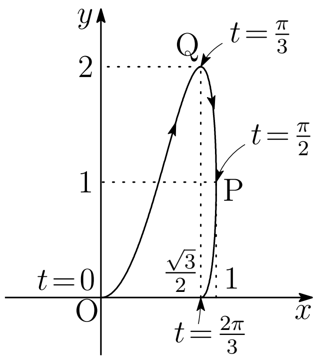
(2) C の点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$，すなわち，点 $\left(f\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\ g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(\frac{\pi}{6})}{f'(\frac{\pi}{6})}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$$

求める接線は，点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ を通り，傾き $2\sqrt{3}$ の直線の方程式であるから

$$y-1=2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=2\sqrt{3}x-\sqrt{3}+1}$$

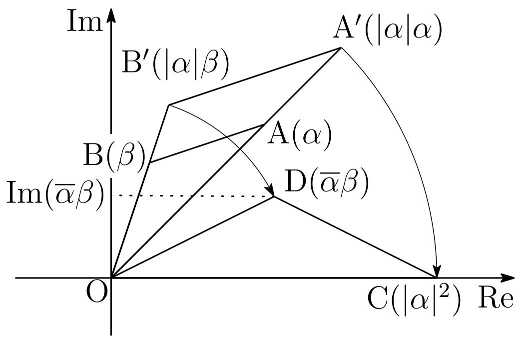
(3) 求める面積を S とすると，(1) の結果に注意して



$$\begin{aligned}
S &= \int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{2})} y\,dx - \int_{f(\frac{2}{3}\pi)}^{f(\frac{\pi}{2})} y\,dx \\
&= \int_{f(0)}^{f(\frac{2}{3}\pi)} y\,dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} g(t)f'(t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1-\cos 3t)\cos t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\cos t-\frac{1}{2}\cos 4t-\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt \\
&= \Big[\ \sin t-\frac{1}{8}\sin 4t-\frac{1}{4}\sin 2t\ \Big]_0^{\frac{2}{3}\pi} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{16}}\boldsymbol{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

2 (1) 2点 $\mathrm{C}(|\alpha|^2)$，$\mathrm{D}(\overline{\alpha}\beta)$ は，それぞれ2点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ を原点を中心に $|\alpha|$ 倍の相似拡大，さらに原点を中心に $\arg\overline{\alpha}$ だけ回転 $(\times\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|})$ したものであるから

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\triangle\mathrm{OCD}}{\triangle\mathrm{OAB}}=\boldsymbol{|\alpha|^2}$$



(2) $\triangle\mathrm{OCD}$ の底辺を $|\alpha|^2$，高さを $|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$ とみると　$S_2=\dfrac{1}{2}|\alpha|^2|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

(1) の結果から　$S_1=\dfrac{1}{|\alpha|^2}S_2$　よって　$S_1=\dfrac{1}{|\alpha|^2}\cdot\dfrac{1}{2}|\alpha|^2|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|=\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

別解 $\theta=\angle\alpha0\beta$ とすると　$\cos\theta+i\sin\theta=\dfrac{\frac{\beta}{|\beta|}}{\frac{\alpha}{|\alpha|}}=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\alpha}}=\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{|\alpha||\beta|}$

$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)}{|\alpha||\beta|}$ であるから　$S_1=\dfrac{1}{2}|\alpha||\beta||\sin\theta|=\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

(3) (2) の結果から，3点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\overline{z}\cdot\frac{1}{z}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\right|$$

$z=a+bi\ (1\leqq a\leqq 2,\ 1\leqq b\leqq 3)$ であるから

$$\frac{\overline{z}}{z}=\frac{a-bi}{a+bi}=\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{2ab}{a^2+b^2}i,$$

$$\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|-\frac{2ab}{a^2+b^2}\right|=\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$\dfrac{b}{a}=u$，$\triangle\mathrm{OPQ}=S(u)$ とおくと　$S(u)=\dfrac{u}{1+u^2}$　$\left(\dfrac{1}{2}\leqq u\leqq 3\right)$

ゆえに　$S'(u)=\dfrac{1-u^2}{(1+u^2)^2}$

u	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$S'(u)$		$+$	0	$-$	
$S(u)$	$\frac{2}{5}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{10}$

よって　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

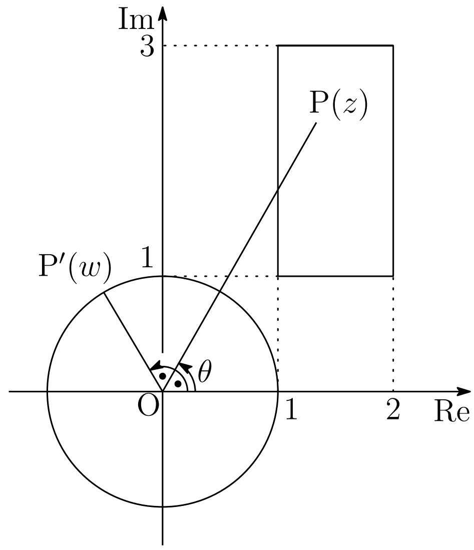
別解 $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right) = -\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)$ であるから

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)\right|$$

$\theta = \arg(z)$，$w = \dfrac{z}{\overline{z}}$ とすると

$$w = \left|\frac{z}{\overline{z}}\right| = \frac{|z|}{|\overline{z}|} = 1,$$

$$\begin{aligned}\arg(w) &= \arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)\\ &= \arg(z) - \arg(\overline{z})\\ &= \theta - (-\theta) = 2\theta\end{aligned}$$



点 P$'(w)$ は，点 P(z) から単位円周上の点 P$'$ への写像で，その偏角について

$$\arg(w) = 2\arg(z)$$

が成立する．$z = a + bi$ $(1 \leqq a \leqq 2,\ 1 \leqq b \leqq 3)$ より，$\theta = \arg(z)$ のとり得る値の範囲を $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ とすると，上の図から

$$\tan\theta_1 = \frac{1}{2},\quad \tan\theta_2 = 3 \quad \left(0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$$

したがって　$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta \quad \cdots(*)$

このとき　$\sin 2\theta_1 = \dfrac{2\tan\theta_1}{1+\tan^2\theta_1} = \dfrac{4}{5},\quad \sin 2\theta_2 = \dfrac{2\tan\theta_2}{1+\tan^2\theta_2} = \dfrac{3}{5}$

$(*)$ より，$\triangle$OPQ は，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，$\theta = \theta_2$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 法 5 について

$$\begin{array}{lll} x \equiv 0 \text{ のとき} & x^2 \equiv 0 & \pmod 5 \\ x \equiv 1 \text{ のとき} & x^2 \equiv 1 & \pmod 5 \\ x \equiv 2 \text{ のとき} & x^2 \equiv 4 & \pmod 5 \\ x \equiv 3 \text{ のとき} & x^2 \equiv 9 \equiv 4 & \pmod 5 \\ x \equiv 4 \text{ のとき} & x^2 \equiv 16 \equiv 1 & \pmod 5 \end{array}$$

よって，題意は成立する．

(2) $x^2+5y^2=2z^2$ より，法 5 について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod 5$$

(1) の結果から，$(*)$ の左辺は法 5 について，0，1，4 のいずれかに等しい．
一方，右辺は 0，2，$8 \equiv 3 \pmod 5$ のいずれかに等しい．
したがって，$x^2 \equiv 0,\ 2z^2 \equiv 0 \pmod 5$，すなわち，$x \equiv z \equiv 0 \pmod 5$
$x = 5x',\ z = 5z'$ ($x',\ z'$は整数) を $x^2+5y^2=2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2+5y^2 = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y^2 \equiv 0$ より，$y \equiv 0 \pmod 5$ であるから，$y = 5y'$ (y'は整数) とおける．
このとき，$x=5x'$，$y=5y'$，$z=5z'$ より，$x'<x$，$y'<y$，$z'<z$
$x^2+5y^2=2z^2$ を満たす $(x,\ y,\ z)$ の組が存在するとき，

$$(x',\ y',\ z') \quad (x'<x,\ y'<y,\ z'<z)$$

が存在し，無限に小さい数の組が存在することになり (無限降下)，このことは自然数が下に有限であることに反する．よって，$x^2+5y^2=2z^2$ を満たす自然数 x，y，z の組は存在しない．

別解 $x^2+5y^2=2z^2$ を満たす自然数 x，y，z が存在し，これら 3 数の最大公約数が 1 であるものを仮定する．
$x^2+5y^2=2z^2$ より，法 5 について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod 5$$

(1) の結果から，$(*)$ の左辺は法 5 について，0，1，4 のいずれかに等しい．
一方，右辺は 0，2，$8 \equiv 3 \pmod 5$ のいずれかに等しい．
したがって，$x^2 \equiv 0,\ 2z^2 \equiv 0 \pmod 5$，すなわち，$x \equiv z \equiv 0 \pmod 5$
$x = 5x',\ z = 5z'$ ($x',\ z'$は整数) を $x^2+5y^2=2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2+5y^2 = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y^2 \equiv 0 \pmod 5$ より，$y \equiv 0 \pmod 5$ であるから，$x,\ y,\ z$ が 5 を共通因数にもつことになり，仮定に反する．よって，題意は証明された．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $1 < 2^y < \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ より　$0 < y < n\log_2\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$

$U = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$ とし，U の部分集合 A，B を

$$A = \left\{k \,\middle|\, n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \text{は整数である},\ k \in U\right\}$$
$$B = \left\{k \,\middle|\, n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \text{は整数でない},\ k \in U\right\}$$

とすると ([a] は a を超えない最大の整数)

$$P(n) = \sum_{k\in A}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) - 1\right\} + \sum_{k\in B}\left[n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]$$

したがって

$$\begin{aligned} P(n) &< \sum_{k\in A} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) + \sum_{k\in B} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right), \\ P(n) &\geqq \sum_{k\in A}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) - 1\right\} + \sum_{k\in B}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) - 1\right\} \cdots ① \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) - 1\right\} \end{aligned}$$

が成立する (① は $B = \phi$ のとき等号)．上の 2 式から

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) - 1\right\} \leqq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) - \frac{n-1}{n^2} \leqq \frac{P(n)}{n^2} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \cdots (*)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2} = 0,$$

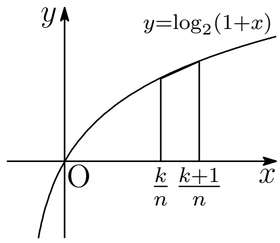
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 \log_2(1+x)\,dx \\ &= \frac{1}{\log 2}\Big[\ (1+x)\log(1+x) - x\ \Big]_0^1 = 2 - \frac{1}{\log 2} \end{aligned}$$

$(*)$ にはさみうちの原理を適用すると　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2} = \mathbf{2 - \frac{1}{\log 2}}$

(3) (1) の結果から　$P(n) < \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$$\frac{P(n)}{n^2} < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \cdots ②$$

(2) の結果および $y = \log_2(1+x)$ が上に凸であるから



$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \log_2(1+x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \log_2(1+x)\,dx \\ &> \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) + \log_2\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\right\} \end{aligned}$$

上式および ② から

$$\begin{aligned} L - \frac{P(n)}{n^2} &> \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) + \log_2\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\right\} \\ &\qquad - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\log_2\left(1+\frac{k+1}{n}\right) - \log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2n}(\log_2 2 - \log_2 1) = \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

解説 $a \leqq x \leqq b$ において，関数 $f(x)$ が $f''(x) < 0$ であるとき

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$$

とおくと，$g(a) = g(b) = 0$ であるから，平均値の定理 (ロルの定理) により

$$g'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する．このとき，$g''(x) = f''(x) < 0$ であるから，$g'(x)$ は単調減少により，c は唯一存在する．したがって，$g(x)$ の増減表は

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	極大	↘	0

$a \leqq x \leqq b$ において，$g(x) \geqq 0$ が成立する．なお，等号は，$x = a,\ b$ のときに限る．

よって，$a<x<b$ において，関数 $f(x)$ が $f''(x)<0$ のとき

$$f(x) \geqq f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

が成立する．なお，等号は，$x=a,\ b$ のときに限る．

$f(x)=\log_2(1+x)$ とおくと，$f''(x)<0$ より，$\dfrac{k}{n}<x<\dfrac{k+1}{n}$ において

$$f(x)>f\left(\frac{k}{n}\right)+n\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\left(x-\frac{k}{n}\right)$$

これから

$$\begin{aligned}
L&=\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx\\
&>\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx\\
&\qquad+n\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)dx\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)+n\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{f(1)-f(0)}{2n}\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

② より　$L>\dfrac{P(n)}{n^2}+\dfrac{1}{2n}$　　よって　$L-\dfrac{P(n)}{n^2}>\dfrac{1}{2n}$