

令和2年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
 医学部医学科 令和2年2月25日

問題 ① ② ③ ④

① xy 平面上において, 媒介変数 t $\left(0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi\right)$ によって

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = 1 - \cos 3t \end{cases}$$

と表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) C 上の点で x 座標が最大になる点 P と y 座標が最大になる点 Q の座標をそれぞれ求めよ。
- (2) C 上の点 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ における接線の方程式を求めよ。
- (3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

② α, β を複素数とし, 複素数平面上の点 $O(0), A(\alpha), B(\beta), C(|\alpha|^2), D(\bar{\alpha}\beta)$ を考える。3点 O, A, B は三角形をなすとする。また, 複素数 z に対し, $\text{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OCD$ の面積を S_2 とするとき, $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ の面積 S_1 は $\frac{1}{2}|\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$ で与えられることを示せ。
- (3) 実数 a, b に対し, 複素数 z を $z = a + bi$ で定める。 $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 3$ のとき, 3点 $O(0), P(z), Q\left(\frac{1}{z}\right)$ を頂点とする $\triangle OPQ$ の面積の最大値と最小値を求めよ。

③ 以下の問いに答えよ。

- (1) x が自然数のとき, x^2 を5で割ったときの余りは0, 1, 4のいずれかであることを示せ。
- (2) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。

- 4 xy 平面において, x, y がともに整数であるとき, 点 (x, y) を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し,

$$0 < x < n, \quad 1 < 2^y < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点 (x, y) の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

- (1) 不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right) - 1 \right\} \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

を示せ。

- (2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。

- (3) (2) で求めた極限値を L とする。不等式

$$L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}$$

を示せ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad x = f(t) = \sin t, \quad y = g(t) = 1 - \cos 3t \quad \text{とおくと} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$f'(t) = \cos t, \quad g'(t) = 3 \sin 3t$$

t	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	$\frac{2}{3}\pi$	t	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	$\frac{2}{3}\pi$
$f'(t)$		+	0	-		$g'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	0	\nearrow	1	\searrow	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$g(t)$	0	\nearrow	2	\searrow	0

上の増減表から 点Pは $\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right), g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ すなわち $(1, 1)$

点Qは $\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right), g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ すなわち $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$

(2) C の点 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, すなわち, 点 $\left(f\left(\frac{\pi}{6}\right), g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ における接線の傾きは

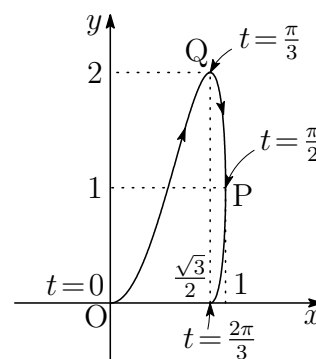
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'\left(\frac{\pi}{6}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

求める接線は, 点 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ を通り, 傾き $2\sqrt{3}$ の直線の方程式であるから

$$y - 1 = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3} + 1$$

(3) 求める面積を S とすると, (1) の結果に注意して

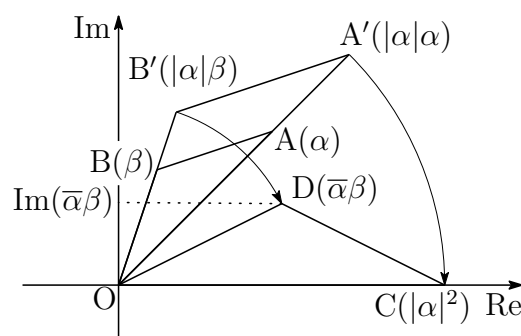
$$\begin{aligned} S &= \int_{f(0)}^{f\left(\frac{\pi}{2}\right)} y \, dx - \int_{f\left(\frac{2}{3}\pi\right)}^{f\left(\frac{\pi}{2}\right)} y \, dx \\ &= \int_{f(0)}^{f\left(\frac{2}{3}\pi\right)} y \, dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} g(t) f'(t) \, dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1 - \cos 3t) \cos t \, dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\cos t - \frac{1}{2} \cos 4t - \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt \\ &= \left[\sin t - \frac{1}{8} \sin 4t - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{9}{16} \sqrt{3} \end{aligned}$$



■

- 2 (1) 2点 $C(|\alpha|^2)$, $D(\bar{\alpha}\beta)$ は、それぞれ2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を原点を中心に $|\alpha|$ 倍の相似拡大, さらに原点を中心に $\arg \bar{\alpha}$ だけ回転 ($\times \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|}$) したものであるから

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\triangle OCD}{\triangle OAB} = |\alpha|^2$$



- (2) $\triangle OCD$ の底辺を $|\alpha|^2$, 高さを $|\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$ とみると $S_2 = \frac{1}{2}|\alpha|^2|\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$

(1)の結果から $S_1 = \frac{1}{|\alpha|^2}S_2$ よって $S_1 = \frac{1}{|\alpha|^2} \cdot \frac{1}{2}|\alpha|^2|\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)| = \frac{1}{2}|\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$

別解 $\theta = \angle \alpha 0 \beta$ とすると $\cos \theta + i \sin \theta = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{|\alpha| \cdot \beta}{|\beta| \cdot \alpha} = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \cdot \frac{\bar{\alpha}\beta}{\alpha \bar{\alpha}} = \frac{\bar{\alpha}\beta}{|\alpha||\beta|}$

$\sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)}{|\alpha||\beta|}$ であるから $S_1 = \frac{1}{2}|\alpha||\beta| \sin \theta = \frac{1}{2}|\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$

- (3) (2)の結果から, 3点 $O(0)$, $P(z)$, $Q\left(\frac{1}{z}\right)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\bar{z} \cdot \frac{1}{z} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) \right|$$

$z = a + bi$ ($1 \leq a \leq 2$, $1 \leq b \leq 3$) であるから

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z}}{z} &= \frac{a - bi}{a + bi} = \frac{(a - bi)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{2ab}{a^2 + b^2}i, \\ \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) \right| &= \frac{1}{2} \left| -\frac{2ab}{a^2 + b^2} \right| = \frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{\frac{b}{a}}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \end{aligned}$$

$\frac{b}{a} = u$, $\triangle OPQ = S(u)$ とおくと $S(u) = \frac{u}{1 + u^2}$ ($\frac{1}{2} \leq u \leq 3$)

ゆえに $S'(u) = \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2}$

u	$\frac{1}{2}$	\cdots	1	\cdots	3
$S'(u)$		+	0	-	
$S(u)$	$\frac{2}{5}$	\nearrow	$\frac{1}{2}$	\searrow	$\frac{3}{10}$

よって 最大値 $\frac{1}{2}$, 最小値 $\frac{3}{10}$

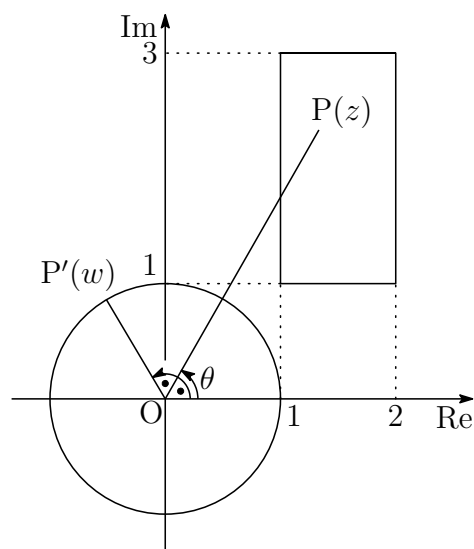
別解 $\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)$ であるから

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) \right|$$

$\theta = \arg(z)$, $w = \frac{z}{\bar{z}}$ とすると

$$w = \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = 1,$$

$$\begin{aligned} \arg(w) &= \arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) \\ &= \arg(z) - \arg(\bar{z}) \\ &= \theta - (-\theta) = 2\theta \end{aligned}$$



点 $P'(w)$ は、点 $P(z)$ から単位円周上の点 P' への写像で、その偏角について

$$\arg(w) = 2 \arg(z)$$

が成立する. $z = a + bi$ ($1 \leq a \leq 2$, $1 \leq b \leq 3$) より, $\theta = \arg(z)$ のとり得る値の範囲を $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ とすると, 上の図から

$$\tan \theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \tan \theta_2 = 3 \quad \left(0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4} < \theta_2 < \frac{\pi}{2} \right)$$

したがって $\triangle OPQ = \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad \dots (*)$

$$\text{このとき} \quad \sin 2\theta_1 = \frac{2 \tan \theta_1}{1 + \tan^2 \theta_1} = \frac{4}{5}, \quad \sin 2\theta_2 = \frac{2 \tan \theta_2}{1 + \tan^2 \theta_2} = \frac{3}{5}$$

(*) より, $\triangle OPQ$ は, $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき, 最大値 $\frac{1}{2}$,

$\theta = \theta_2$ のとき, 最小値 $\frac{3}{10}$ ■

3 (1) 法5について

$$\begin{array}{lll}
 x \equiv 0 \text{ のとき} & x^2 \equiv 0 & (\text{mod } 5) \\
 x \equiv 1 \text{ のとき} & x^2 \equiv 1 & (\text{mod } 5) \\
 x \equiv 2 \text{ のとき} & x^2 \equiv 4 & (\text{mod } 5) \\
 x \equiv 3 \text{ のとき} & x^2 \equiv 9 \equiv 4 & (\text{mod } 5) \\
 x \equiv 4 \text{ のとき} & x^2 \equiv 16 \equiv 1 & (\text{mod } 5)
 \end{array}$$

よって、題意は成立する。

(2) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ より、法5について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod{5}$$

(1)の結果から、(*)の左辺は法5について、0, 1, 4のいずれかに等しい。一方、右辺は0, 2, $8 \equiv 3 \pmod{5}$ のいずれかに等しい。

したがって、 $x^2 \equiv 0, 2z^2 \equiv 0 \pmod{5}$ 、すなわち、 $x \equiv z \equiv 0 \pmod{5}$
 $x = 5x', z = 5z'$ (x', z' は整数)を $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2 + 5y^2 = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y^2 \equiv 0$ より、 $y \equiv 0 \pmod{5}$ であるから、 $y = 5y'$ (y' は整数)とおける。

このとき、 $x = 5x', y = 5y', z = 5z'$ より、 $x' < x, y' < y, z' < z$
 $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす (x, y, z) の組が存在するとき、

$$(x', y', z') \quad (x' < x, y' < y, z' < z)$$

が存在し、無限に小さい数の組が存在することになり(無限降下)、このことは自然数が下に有限であることに反する。よって、 $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しない。

別解 $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z が存在し、これら3数の最大公約数が1であるものを仮定する。

$x^2 + 5y^2 = 2z^2$ より、法5について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod{5}$$

(1)の結果から、(*)の左辺は法5について、0, 1, 4のいずれかに等しい。一方、右辺は0, 2, $8 \equiv 3 \pmod{5}$ のいずれかに等しい。

したがって、 $x^2 \equiv 0, 2z^2 \equiv 0 \pmod{5}$ 、すなわち、 $x \equiv z \equiv 0 \pmod{5}$
 $x = 5x', z = 5z'$ (x', z' は整数)を $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2 + 5y^2 = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ より、 $y \equiv 0 \pmod{5}$ であるから、 x, y, z が5を共通因数にもつことになり、仮定に反する。よって、題意は証明された。 ■

$$\boxed{4} \quad (1) \quad 1 < 2^y < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{より} \quad 0 < y < n \log_2 \left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

$U = \{1, 2, \dots, n-1\}$ とし, U の部分集合 A, B を

$$A = \left\{ k \mid n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) \text{ は整数である, } k \in U \right\}$$

$$B = \left\{ k \mid n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) \text{ は整数でない, } k \in U \right\}$$

とすると ($[a]$ は a を超えない最大の整数)

$$P(n) = \sum_{k \in A} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} + \sum_{k \in B} \left[n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right]$$

したがって

$$P(n) < \sum_{k \in A} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) + \sum_{k \in B} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right),$$

$$P(n) \geq \sum_{k \in A} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} + \sum_{k \in B} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} \cdots \textcircled{1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\}$$

が成立する ($\textcircled{1}$ は $B = \phi$ のとき等号). 上の 2 式から

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - \frac{n-1}{n^2} \leq \frac{P(n)}{n^2} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) \quad \cdots (*)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \log_2(1+x) dx$$

$$= \frac{1}{\log 2} \left[(1+x) \log(1+x) - x \right]_0^1 = 2 - \frac{1}{\log 2}$$

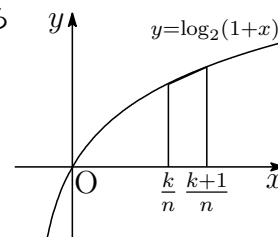
(*) にはさみうちの原理を適用すると $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^2} = 2 - \frac{1}{\log 2}$

$$(3) (1) \text{の結果から } P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$$\frac{P(n)}{n^2} < \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) \quad \dots \textcircled{2}$$

(2)の結果および $y = \log_2(1+x)$ が上に凸であるから

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \log_2(1+x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \log_2(1+x) dx \\ &> \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) + \log_2 \left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \right\} \end{aligned}$$



上式および $\textcircled{2}$ から

$$\begin{aligned} L - \frac{P(n)}{n^2} &> \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) + \log_2 \left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \log_2 \left(1 + \frac{k+1}{n}\right) - \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2n} (\log_2 2 - \log_2 1) = \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

解説 $a \leq x \leq b$ において、関数 $f(x)$ が $f''(x) < 0$ であるとき

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

とおくと、 $g(a) = g(b) = 0$ であるから、平均値の定理(ロルの定理)により

$$g'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する。このとき、 $g''(x) = f''(x) < 0$ であるから、 $g'(x)$ は単調減少により、 c は唯一存在する。したがって、 $g(x)$ の増減表は

x	a	\dots	c	\dots	b
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	\nearrow	極大	\searrow	0

$a \leq x \leq b$ において、 $g(x) \geq 0$ が成立する。なお、等号は、 $x = a, b$ のときに限る。

よって, $a < x < b$ において, 関数 $f(x)$ が $f''(x) < 0$ のとき

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

が成立する. なお, 等号は, $x = a, b$ のときに限る.

$f(x) = \log_2(1 + x)$ とおくと, $f''(x) < 0$ より, $\frac{k}{n} < x < \frac{k+1}{n}$ において

$$f(x) > f\left(\frac{k}{n}\right) + n \left\{ f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \left(x - \frac{k}{n}\right)$$

これから

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \\ &> \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx \\ &\quad + n \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(x - \frac{k}{n}\right) dx \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + n \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{f(1) - f(0)}{2n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } L > \frac{P(n)}{n^2} + \frac{1}{2n} \quad \text{よって } L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n} \quad \blacksquare$$