平成31年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120分
医学部医学科　平成31年2月25日

1 座標平面上の曲線 $C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ および $C_2 : y = x^3 + 1$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど2個になるような実数 a の値を求めよ。ただし，$a \neq 0$ とする。

(2) (1) で求めた a に対し，曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

2 座標平面上の直線 ℓ を $y = ax - a - 2$，直線 m を $y = bx + 3b$ とおく。直線 ℓ と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a，b は ℓ と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 A$(1, -2)$，点 B$(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) $\triangle$APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。

3 座標平面上の曲線 $y = x\sin 3x + 3x^2$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを ℓ とし，その接点の x 座標を a とする。ただし，$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標をすべて求めよ。

(3) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき，確率 p^2 でゲームに勝つものとする。n を 2 以上の整数とし，赤球，白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

(1) k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ となることを示せ。

(2) k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり，さらにゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)} \cdot \dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ であることを示せ。

(3) ゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ と $C_2 : y = x^3 + 1$ から y を消去すると

$$x^3 + 1 = x^2 + 2ax - 2a + 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x^2 - 2a) = 0 \quad \cdots (*)$$

C_1 と C_2 の共有点がちょうど2個のとき，方程式 $(*)$ の実数解は2個ある．$a \neq 0$ より，$x^2 - 2a = 0$ は重解をもたないから，方程式 $x^2 - 2a = 0$ は $x = 1$ を解にもつ．したがって

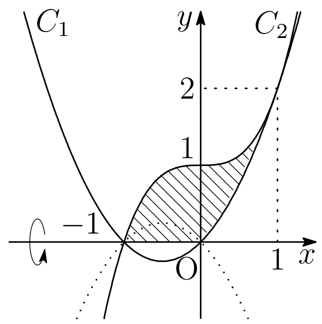
$$1^2 - 2a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{2}$$

これを $(*)$ に代入すると　$(x-1)^2(x+1) = 0$

これは，条件を満たすから　$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から　$C_1 : y = x^2 + x$

$$\begin{aligned}&|x^3+1|^2 - |x^2+x|^2 \\ =&(x^3+1)^2 - (x^2+x)^2 \\ =&(x^3+x^2+x+1)(x^3-x^2-x+1) \\ =&(x+1)^2(x-1)^2(x^2+1) \geqq 0\end{aligned}$$



したがって　$|x^3+1| \geqq |x^2+x|$

求める回転体の体積は，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに1回転させたものであるから，その体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_{-1}^{1} (x^3+1)^2\,dx - \int_0^1 (x^2+x)^2\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x^6+2x^3+1)\,dx - \int_0^1 (x^4+2x^3+x^2)\,dx \\ &= 2\int_0^1 (x^6+1)\,dx - \int_0^1 (x^4+2x^3+x^2)\,dx \\ &= \int_0^1 (2x^6 - x^4 - 2x^3 - x^2 + 2)\,dx \\ &= \left[\,\frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x\,\right]_0^1 = \frac{263}{210}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \frac{263}{210}\pi}$

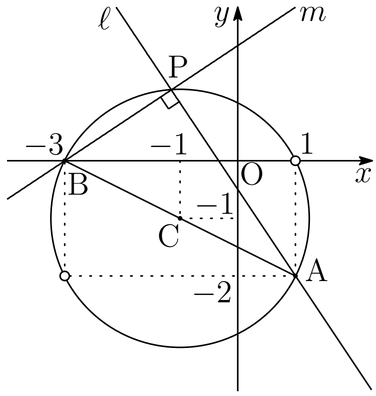
2 (1) $\ell : y = ax - a - 2$ は $y + 2 = a(x - 1)$ より，点 A$(1, -2)$ を通り，傾き a の直線．

$m : y = bx + 3b$ は $y = b(x + 3)$ より，点 B$(-3,\ 0)$ を通り，傾き b の直線．

ℓ と m は直交するから，ℓ と m の交点 P は，線分 AB を直径とする円周上を動く．

線分 AB の中点を C とすると　C$(-1, -1)$

$$\mathrm{CA} = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$$



求める点 P の軌跡は，2 直線 ℓ，m が x 軸と垂直ではないことに注意して

$$\boldsymbol{(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5, \quad (x,\ y) \neq (1,\ 0),\ (-3, -2)}$$

(2) $\ell \perp m$ より，$ab = -1$ であるから

$$\ell : ax - y - a - 2 = 0, \quad m : x + ay + 3 = 0$$

線分 AP の長さは，点 A$(1, -2)$ と直線 m の距離であるから

$$\mathrm{AP} = \frac{|1 + a\cdot(-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + a^2}} = \boldsymbol{\frac{2|a-2|}{\sqrt{a^2+1}}}$$

線分 BP の長さは，点 B$(-3,\ 0)$ と直線 ℓ の距離であるから

$$\mathrm{BP} = \frac{|a\cdot(-3) + 0 - a - 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \boldsymbol{\frac{2|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}}$$

(3) △APB の面積が最大となるとき，P は線分 AB の垂直二等分線上にあるから，AP $=$ BP より

$$\frac{2|a-2|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{2|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}} \quad \text{ゆえに} \quad |a-2| = |2a+1|$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = \frac{1}{3}, -3}$

別解　直線 AB の傾きは，その偏角を θ とすると　$\tan\theta = -\frac{1}{2}$

△APB の面積が最大となるとき，ℓ の傾き a は

$$a = \tan(\theta \pm 45^\circ) = \frac{\tan\theta \pm \tan 45^\circ}{1 \mp \tan\theta\tan 45^\circ} = \frac{-\frac{1}{2} \pm 1}{1 \pm \frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm 2}{2 \pm 1} = \frac{1}{3}, -3$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y = x\sin 3x + 3x^2$ を微分すると　$y' = \sin 3x + 3x\cos 3x + 6x$

C 上の x 座標が a である点における接線の方程式は

$$y - (a\sin 3a + 3a^2) = (\sin 3a + 3a\cos 3a + 6a)(x - a)$$

すなわち　$y = (\sin 3a + 3a\cos 3a + 6a)x - 3a^2(1 + \cos 3a)$　$\cdots$ ①

これが原点を通るから　$-3a^2(1 + \cos 3a) = 0$

$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < 3a < \dfrac{3}{2}\pi$ であるから

$$3a = \pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = \frac{\pi}{3}}$$

(2) (1) の結果を ① に代入することにより　$\ell : y = \pi x$

C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x\sin 3x + 3x^2 = \pi x \quad \text{すなわち} \quad x(\pi - \sin 3x - 3x) = 0 \quad \cdots(*)$$

$f(x) = \pi - \sin 3x - 3x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$f'(x) = -3\cos 3x - 3 = -3(1 + \cos 3x) \leqq 0$$

したがって，$f(x)$ は単調減少であり，

$$f(0) = \pi > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

であるから，方程式 $(*)$ の解は　$x = 0,\ \dfrac{\pi}{3}$

よって，求める共有点の座標は　$\boldsymbol{(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi^2}{3}\right)}$

(3) (2) の結果から，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，$x(\pi - \sin 3x - 3x) \geqq 0$ であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\pi - \sin 3x - 3x)\,dx \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\left(\frac{\pi}{3} - x\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin 3x\,dx \\ &= \frac{3}{6}\left(\frac{\pi}{3}\right)^3 + \left[\,\frac{x}{3}\cos 3x - \frac{1}{9}\sin 3x\,\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\pi^3}{54} - \frac{\pi}{9}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $2n$ 個の球から n 個取り出すとき，n 個の赤球から k 個取り出し，n 個の白球から $n-k$ 個取り出す確率であるから

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} = \frac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

(2) 取り出した n 個の球のうち赤球が k 個取り出されるとき，勝つ確率は $\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ であるから，(1) の結果により

$$\frac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{k}{n}\cdot{}_n\mathrm{C}_k\right)^2 \qquad \cdots (*)$$

がゲームに勝つ確率である．ここで

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

$${}_{2n}\mathrm{C}_n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n(2n-1)}{n^2}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{2(2n-1)}{n}\cdot{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

上の 2 式をそれぞれ変形すると

$$\frac{k}{n}\cdot{}_n\mathrm{C}_k = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}, \qquad \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} = \frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{1}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$$

これらを $(*)$ に代入することにより

$$(*) = \frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{1}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2 = \frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$$

(3) $n \geqq 2$ および $k \geqq 1$ の整数について，

$$(1+x)^{n-1}(1+x)^{n-1} = (1+x)^{2n-2}$$

上式の両辺の x^{n-1} の係数を比較することにより

$$\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-k} = {}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

すなわち $$\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2 = {}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

これと (2) の結果により，ゲームに勝つ確率は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} = \frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{1}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2$$

$$= \frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} = \frac{n}{2(2n-1)}$$