# 平成 30 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
# 医学部医学科　平成 30 年 2 月 25 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ $t$ を実数とする。空間の 4 点 A(1, 5, 0)，B(4, 2, 0)，C($t$, $2t$, $t-1$)，D(1, 6, 1) について，以下の問いに答えよ。

(1) △ABC が直角三角形になる $t$ の値をすべて求めよ。

(2) A，B，C，D が同一平面上にあるような $t$ の値を求めよ。

(3) ∠BAC が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ $m$，$n$ を整数とする。$xy$ 平面上の 4 点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを $x$ 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら $y$ 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

(1) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある確率を求めよ。

(2) 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3) 硬貨を 5 回投げたとき，初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 複素数平面上で $|z+i|-|z-i|=1$ をみたす点 $z$ の全体を $H$ とおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角 $\theta$ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $H$ の点 $z$ に対して，$z$ の偏角 $\theta_1$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $H$ の点 $z$ に対して $w=\dfrac{1}{z}$ とする。$w$ の絶対値 $r_2$ と偏角 $\theta_2$ のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}$ $(x \geqq -3)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の極大値を求めよ。

(2) $-3 \leqq x \leqq 0$ とするとき，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ の最大値と最小値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\mathrm{A}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 2t,\ t-1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t-1,\ 2t-5,\ t-1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(t-4,\ 2t-2,\ t-1)$$

(i) $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$$3(t-1)-3(2t-5)+0(t-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=4$$

(ii) $\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ であるから

$$3(t-4)-3(2t-2)+0(t-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=-2$$

(iii) $\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ であるから

$$(t-1)(t-4)+(2t-5)(2t-2)+(t-1)^2=0$$

整理すると　$2t^2-7t+5=0$　これを解いて　$t=1,\ \dfrac{5}{2}$

(i)〜(iii) から　$\boldsymbol{t=4,-2,\ 1,\ \dfrac{5}{2}}$

(2) $\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおくと　$\vec{b}=(1,-1,\ 0)$，$\vec{d}=(0,\ 1,\ 1)$

A，B，C，D が同一平面上にあるとき，定数 $x$，$y$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=x\vec{b}+y\vec{d}$$

ゆえに
$$\begin{aligned}(t-1,\ 2t-5,\ t-1)&=x(1,-1,\ 0)+y(0,\ 1,\ 1)\\&=(x,-x+y,\ y)\end{aligned}$$

したがって　$(*)\begin{cases}t-1=x\\2t-5=-x+y\\t-1=y\end{cases}$

$(*)$ の第 1，第 3 式から　$x=y$　これを第 2 式に代入すると

$$2t-5=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t=\frac{5}{2}}$$

別解 $\vec{b}$，$\vec{d}$ に垂直なベクトルの 1 つは　$\vec{n}=(1,\ 1,-1)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より

$$1(t-1)+1(2t-5)-1(t-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=\frac{5}{2}$$

(3) (1)(i) より，$t=4$ であるから　C(4, 8, 3)　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3, -3,\ 0)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$ に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 1, -2)$$

とおく．$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 1,\ 1)$ であるから，D から平面 ABC に下ろした垂線の長さを $h$ とすると

$$h=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}|=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

よって，求める四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot h&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|h\\&=\frac{1}{6}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

**補足** 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a}}\times\boldsymbol{\vec{b}}$ で表す[1]．本題において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3, -3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-9, -9,\ 18)$$

四面体 ABCD の体積を $V$ とすると

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 1,\ 1)$ より

$$V=\frac{1}{6}|9|=\frac{3}{2}$$

ベクトル積 (外積) は高校数学の範囲外であるが，検算として利用できる．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) さいころが $R_{(m,n)}$ から $R_{(m+i,n+j)}$ の位置に移る確率を $P_{(i,j)}$ とすると

$$P_{(i,j)} = {}_{i+j}\mathrm{C}_i \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \frac{{}_{i+j}\mathrm{C}_i}{2^{i+j}} \quad \cdots (*)$$

である ($i,\ j$ は 0 以上の整数).

$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,4)}$ に移る確率であるから，$(*)$ に $i=2$，$j=3$ を代入して

$$P_{(2,3)} = \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{2^5} = \frac{10}{32} = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

(2) 事象 $A$，$B$ を，次のように定める

$A$ : 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にある.

$B$ : 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある.

$P(A)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置に移る確率であるから，$(*)$ により

$$P(A) = P_{(2,0)} + P_{(0,2)} = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$P(A\cap B)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置を通って，$R_{(3,4)}$ の位置に移る確率であるから

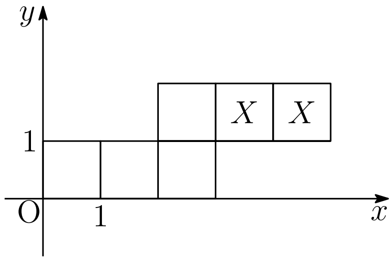
$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P_{(2,0)}P_{(0,3)} + P_{(0,2)}P_{(2,1)} \\ &= \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_0}{2^3} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{2^3} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

よって，求める条件付き確率は

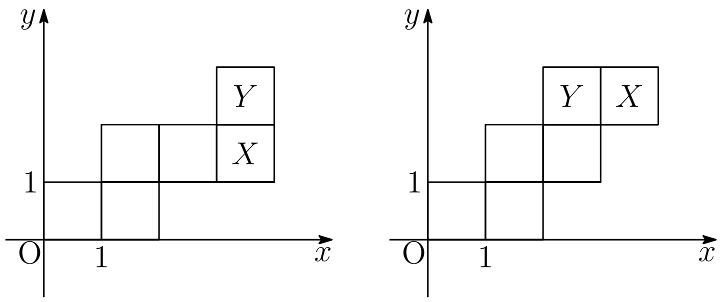
$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3) 1枚の硬貨を投げて表，裏が出る事象をそれぞれ $X$，$Y$ とする．5回目の移動までにさいころの6通りの目がすべて出るには，最初の3回目までに $X$ と $Y$ が少なくとも1回ずつ起こる．最初の3回で1回目が $X$ であるのは，次の (i)〜(iii) である．

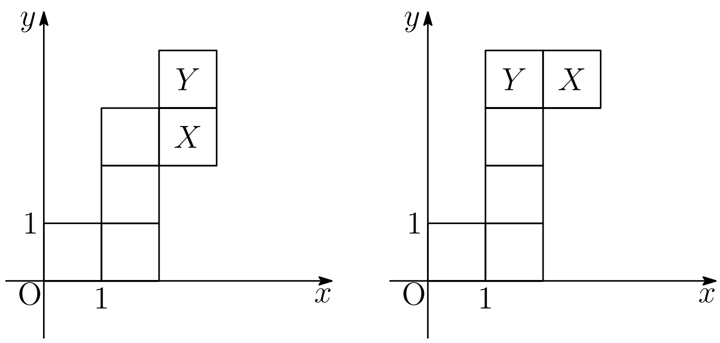
(i) 最初の3回が $X$, $X$, $Y$ の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5回目は $X$, $X$ の順に起こる．




(ii) 最初の3回が $X$, $Y$, $X$ の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5回目は $X$, $Y$ または $Y$, $X$ の順に起こる．




(iii) 最初の3回が $X$, $Y$, $Y$ の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5回目は $X$, $Y$ または $Y$, $X$ の順に起こる．




(i)〜(iii) より，1回目が $X$ であるのは，5通りである．また，1回目が $Y$ であるのは，(i)〜(iii) の展開図を直線 $y=x$ に関して対称移動したものであるから，5通りである．このとき，$X$，$Y$ が起こる確率はともに $\frac{1}{2}$ であるから，求める確率は

$$(5+5)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \mathbf{\frac{5}{16}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $z = x + yi$ とおき ($x,\ y$ は実数)，これを $|z+i| - |z-i| = 1$ に代入すると

$$|x + (y+1)i| - |x + (y-1)i| = 1$$
$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + 1$$

両辺を 2 乗すると

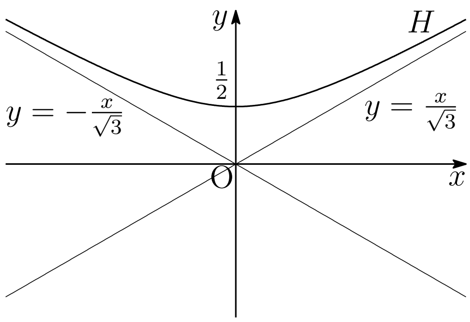
$$x^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2 + 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + 1$$
$$4y - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

上式から $4y - 1 \geqq 0$ であり，再び両辺を 2 乗すると

$$(4y-1)^2 = 4\{x^2 + (y-1)^2\}$$
$$-4x^2 + 12y^2 = 3$$

ゆえに $$-\frac{x^2}{\frac{3}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad \left(y \geqq \frac{1}{2}\right)$$

したがって，$H$ の概形は次のようになる．




上の概形から，$z$ の偏角 $\theta_1$ のとりうる値の範囲は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} < \theta_1 < \dfrac{5}{6}\pi}$

**補足** 与えれた方程式から，$H$ は双曲線で，焦点は $y$ 軸上の 2 点 $(0, \pm 1)$ で，2 頂点が $\left(0, \pm\dfrac{1}{2}\right)$ であるから，離心率 $e = 2$ より，$-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ とおくと [2]

$$b = \frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

なお，楕円 (ellipse)，放物線 (parabola)，双曲線 (hyperbola)．

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2010.pdf (p.11 を参照)

(2) (1) で求めた概形から　$|z| \geqq \dfrac{1}{2}$,　$r_2 = \dfrac{1}{|z|}$ であるから　$\boldsymbol{0 < r_2 \leqq 2}$

また，$\theta_2 = -\arg z$ であるから，$0 \leqq \theta < 2\pi$ に注意して

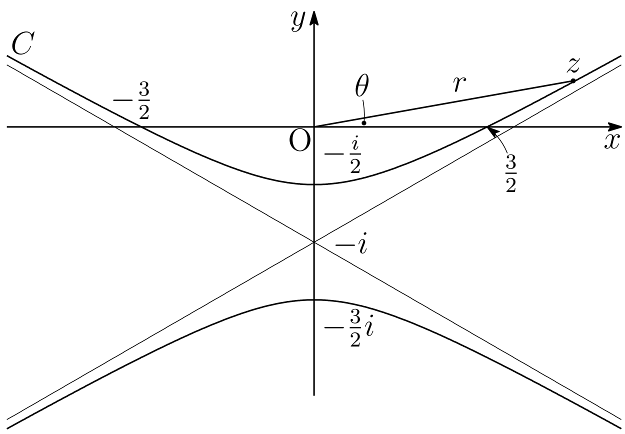
$$-\frac{5}{6}\pi + 2\pi < \theta_2 < -\frac{\pi}{6} + 2\pi \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\frac{7}{6}\pi < \theta_2 < \frac{11}{6}\pi}$$

**解説** 2 次曲線の極方程式の極は 2 次曲線の焦点であるから，2 次曲線の焦点を複素数平面の原点とする出題もある[3]．

例えば，$|z+2i| - |z| = \pm 1$ に対し，$r = |z|$，$\theta = \arg z$ とおくと，前ページで調べたように，離心率 $e = 2$ および点 $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ を通ることから

$$C : r = \frac{\frac{3}{2}}{1 - 2\sin\theta} \quad \cdots (*)$$

となる．$C$ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ で考えると，$1-2\sin\theta = 0$，すなわち，$\theta = \frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$ のとき，漸近線と平行となり，これに対応する $C$ 上の点は存在しない．なお，$\theta = \frac{\pi}{6} - 0$ のとき，$C$ は第 1 象限の無限遠点あり，$\theta = \frac{\pi}{6} + 0$ のとき，$C$ は第 3 象限の無限遠点にある．また，$\theta = \frac{5}{6}\pi - 0$ のとき，$C$ は第 4 象限の無限遠点にあり，$\theta = \frac{5}{6}\pi + 0$ のとき，$C$ は第 2 象限の無限遠点にある．




$(*)$ から，$C$ を複素数平面上の点 $z$ を

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{3(\cos\theta + i\sin\theta)}{2(1 - 2\sin\theta)}$$

と表すことができる．

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_kou_2002.pdf $\boxed{3}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}$ $(x \geqq -3)$ より $\quad f'(x)=\dfrac{3x(x+2)}{2\sqrt{3x^2+x^3}}$

したがって $f(x)$ の増減表は次のようになる．

| $x$ | $-3$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ／ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | 極大<br>$2$ | $\searrow$ | 極小<br>$0$ | $\nearrow$ |

増減表から，求める極大値は $\quad \boldsymbol{f(-2)=2}$

(2) $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ より $(-3 \leqq x \leqq 0)$

$$\begin{aligned}F'(x)&=f(x+3)-f(x)=\frac{\{f(x+3)\}^2-\{f(x)\}^2}{f(x+3)+f(x)}\\&=\frac{3(x+3)^2+(x+3)^3-(3x^2+x^3)}{f(x+3)+f(x)}=\frac{9(x+3)(x+2)}{f(x+3)+f(x)}\end{aligned}$$

$f(x)=|x|\sqrt{x+3}$ であるから，$F(x)$ の増減表は次のようになる．

| $x$ | $-3$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $F(x)$ | | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ | |

$-3 \leqq x \leqq 0$ に注意して，$F(x)$ を求める．

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_x^0 f(t)\,dt+\int_0^{x+3} f(t)\,dt\\&=\int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt+\int_0^{x+3} t\sqrt{t+3}\,dt \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

まず
$$\begin{aligned}\int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt&=\int_0^x \left\{(t+3)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{t+3}\right\}dt\\&=\left[\ \frac{2}{5}(t+3)^{\frac{5}{2}}-2(t+3)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^x\\&=\left[\ \frac{2}{5}(t-2)(t+3)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^x\\&=\frac{2}{5}(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}}+\frac{12}{5}\sqrt{3} \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

①，② より

$$F(x) = \frac{2}{5}\{(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}} + (x+1)(x+6)^{\frac{3}{2}}\} + \frac{24}{5}\sqrt{3}$$

増減表の $x$ の値から

$$\begin{aligned} F(-3) &= \frac{2}{5}(-2\cdot 3^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{12}{5}\sqrt{3} \\ F(-2) &= \frac{2}{5}(-4-4^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{24}{5}(\sqrt{3}-1) \\ F(0) &= \frac{2}{5}(-2\cdot 3^{\frac{3}{2}} + 6^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{12}{5}(\sqrt{3}+\sqrt{6}) \end{aligned}$$

よって　**最大値** $\boldsymbol{F(0) = \frac{12}{5}(\sqrt{3}+\sqrt{6})}$，

**最小値** $\boldsymbol{F(-2) = \frac{24}{5}(\sqrt{3}-1)}$