平成 30 年度　熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
医学部医学科　平成 30 年 2 月 25 日

問題 [1] [2] [3] [4]

1 t を実数とする。空間の 4 点 A$(1,\ 5,\ 0)$，B$(4,\ 2,\ 0)$，C$(t,\ 2t,\ t-1)$，D$(1,\ 6,\ 1)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle$ABC が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。

(2) A，B，C，D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。

(3) $\angle$BAC が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。

2 m，n を整数とする。xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

(1) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある確率を求めよ。

(2) 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3) 硬貨を 5 回投げたとき，初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。

3 複素数平面上で $|z+i|-|z-i|=1$ をみたす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) H の点 z に対して，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) H の点 z に対して $w=\dfrac{1}{z}$ とする。w の絶対値 r_2 と偏角 θ_2 のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

4 関数 $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}$ $(x \geqq -3)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の極大値を求めよ。

(2) $-3 \leqq x \leqq 0$ とするとき，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ の最大値と最小値を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) A$(1,\ 5,\ 0)$，B$(4,\ 2,\ 0)$，C$(t,\ 2t,\ t-1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3, -3,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (t-1,\ 2t-5,\ t-1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (t-4,\ 2t-2,\ t-1)$$

(i) $\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ であるから

$$3(t-1) - 3(2t-5) + 0(t-1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 4$$

(ii) $\angle\mathrm{ABC} = 90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ であるから

$$3(t-4) - 3(2t-2) + 0(t-1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = -2$$

(iii) $\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ であるから

$$(t-1)(t-4) + (2t-5)(2t-2) + (t-1)^2 = 0$$

整理すると　$2t^2 - 7t + 5 = 0$　これを解いて　$t = 1,\ \dfrac{5}{2}$

(i)〜(iii) から　$\boldsymbol{t = 4, -2,\ 1,\ \dfrac{5}{2}}$

(2) $\vec{b} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおくと　$\vec{b} = (1, -1,\ 0)$，$\vec{d} = (0,\ 1,\ 1)$

A，B，C，D が同一平面上にあるとき，定数 x，y を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = x\vec{b} + y\vec{d}$$

ゆえに
$$\begin{aligned}(t-1,\ 2t-5,\ t-1) &= x(1, -1,\ 0) + y(0,\ 1,\ 1)\\ &= (x, -x+y,\ y)\end{aligned}$$

したがって　$(*)\begin{cases} t-1 = x \\ 2t-5 = -x+y \\ t-1 = y \end{cases}$

$(*)$ の第 1，第 3 式から　$x = y$　これを第 2 式に代入すると

$$2t - 5 = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t = \frac{5}{2}}$$

別解 $\vec{b}$，$\vec{d}$ に垂直なベクトルの 1 つは　$\vec{n} = (1,\ 1, -1)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ より

$$1(t-1) + 1(2t-5) - 1(t-1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{5}{2}$$

(3) (1)(i) より，$t=4$ であるから　C$(4,\ 8,\ 3)$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$ に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 1,-2)$$

とおく．$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 1,\ 1)$ であるから，D から平面 ABC に下ろした垂線の長さを h とすると

$$h=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}|=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

よって，求める四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot h&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|h\\&=\frac{1}{6}\cdot3\sqrt{2}\cdot3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

補足 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ で表す[1]．本題において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-9,-9,\ 18)$$

四面体 ABCD の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 1,\ 1)$ より

$$V=\frac{1}{6}|9|=\frac{3}{2}$$

ベクトル積 (外積) は高校数学の範囲外であるが，検算として利用できる．

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) さいころが $R_{(m,n)}$ から $R_{(m+i,n+j)}$ の位置に移る確率を $P_{(i,j)}$ とすると

$$P_{(i,j)} = {}_{i+j}\mathrm{C}_i \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \frac{{}_{i+j}\mathrm{C}_i}{2^{i+j}} \quad \cdots (*)$$

である (i, j は 0 以上の整数).

$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,4)}$ に移る確率であるから，$(*)$ に $i=2$，$j=3$ を代入して

$$P_{(2,3)} = \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{2^5} = \frac{10}{32} = \mathbf{\frac{5}{16}}$$

(2) 事象 A，B を，次のように定める

A : 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にある.

B : 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある.

$P(A)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置に移る確率であるから，$(*)$ により

$$P(A) = P_{(2,0)} + P_{(0,2)} = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$P(A \cap B)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置を通って，$R_{(3,4)}$ の位置に移る確率であるから

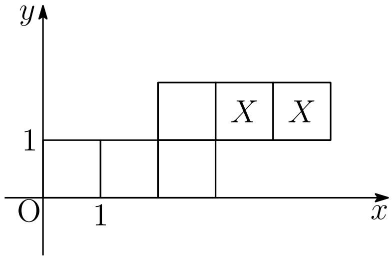
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P_{(2,0)}P_{(0,3)} + P_{(0,2)}P_{(2,1)} \\ &= \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2} \cdot \frac{{}_3\mathrm{C}_0}{2^3} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2} \cdot \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{2^3} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

よって，求める条件付き確率は

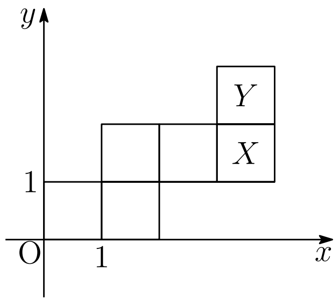
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

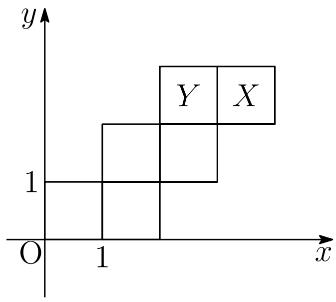
(3) 1 枚の硬貨を投げて表，裏が出る事象をそれぞれ X，Y とする．5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて出るには，最初の 3 回目までに X と Y が少なくとも 1 回ずつ起こる．最初の 3 回で 1 回目が X であるのは，次の (i)〜(iii) である．

(i) 最初の 3 回が X, X, Y の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5 回目は X, X の順に起こる．

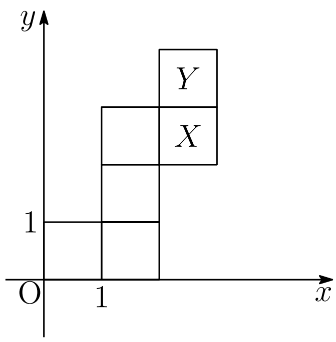


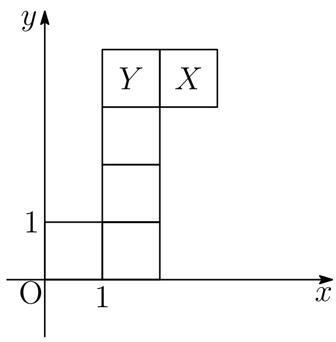
(ii) 最初の 3 回が X, Y, X の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5 回目は X, Y または Y, X の順に起こる．





(iii) 最初の 3 回が X, Y, Y の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5 回目は X, Y または Y, X の順に起こる．





(i)〜(iii) より，1 回目が X であるのは，5 通りである．また，1 回目が Y であるのは，(i)〜(iii) の展開図を直線 $y = x$ に関して対称移動したものであるから，5 通りである．このとき，X，Y が起こる確率はともに $\dfrac{1}{2}$ であるから，求める確率は

$$(5+5)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \mathbf{\frac{5}{16}}$$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $z=x+yi$ とおき (x, y は実数)，これを $|z+i|-|z-i|=1$ に代入すると

$$\begin{aligned}|x+(y+1)i|-|x+(y-1)i|&=1\\ \sqrt{x^2+(y+1)^2}&=\sqrt{x^2+(y-1)^2}+1\end{aligned}$$

両辺を 2 乗すると

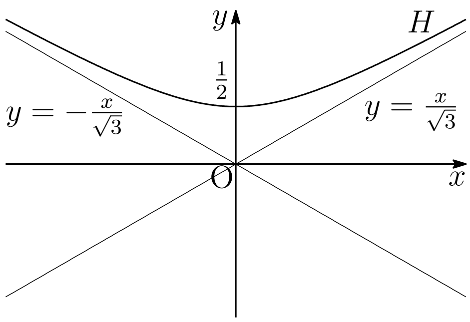
$$\begin{aligned}x^2+(y+1)^2&=x^2+(y-1)^2+2\sqrt{x^2+(y-1)^2}+1\\ 4y-1&=2\sqrt{x^2+(y-1)^2}\end{aligned}$$

上式から $4y-1\geqq 0$ であり，再び両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned}(4y-1)^2&=4\{x^2+(y-1)^2\}\\ -4x^2+12y^2&=3\end{aligned}$$

ゆえに $$-\frac{x^2}{\frac{3}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1 \quad \left(y\geqq\frac{1}{2}\right)$$

したがって，H の概形は次のようになる．



上の概形から，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}<\theta_1<\dfrac{5}{6}\pi}$

補足 与えれた方程式から，H は双曲線で，焦点は y 軸上の 2 点 $(0,\pm1)$ で，2 頂点が $\left(0,\pm\dfrac{1}{2}\right)$ であるから，離心率 $e=2$ より，$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおくと [2]

$$b=\frac{1}{2},\quad \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}=2 \quad ゆえに \quad a=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

なお，楕円 (ellipse)，放物線 (parabola)，双曲線 (hyperbola)．

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2010.pdf (p.11 を参照)

(2) (1) で求めた概形から $|z| \geqq \dfrac{1}{2}$, $\quad r_2 = \dfrac{1}{|z|}$ であるから $\boldsymbol{0 < r_2 \leqq 2}$

また，$\theta_2 = -\arg z$ であるから，$0 \leqq \theta < 2\pi$ に注意して

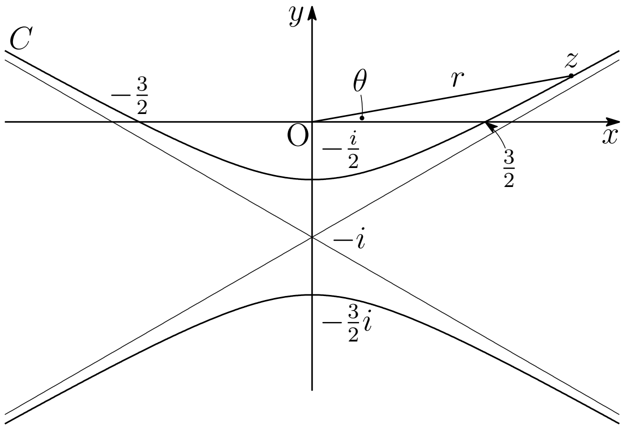
$$-\frac{5}{6}\pi + 2\pi < \theta_2 < -\frac{\pi}{6} + 2\pi \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\frac{7}{6}\pi < \theta_2 < \frac{11}{6}\pi}$$

解説 2 次曲線の極方程式の極は 2 次曲線の焦点であるから，2 次曲線の焦点を複素数平面の原点とする出題もある [3]．

例えば，$|z+2i| - |z| = \pm 1$ に対し，$r = |z|$，$\theta = \arg z$ とおくと，前ページで調べたように，離心率 $e = 2$ および点 $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ を通ることから

$$C : r = \frac{\frac{3}{2}}{1 - 2\sin\theta} \quad \cdots (*)$$

となる．C を $0 \leqq \theta < 2\pi$ で考えると，$1 - 2\sin\theta = 0$，すなわち，$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ のとき，漸近線と平行となり，これに対応する C 上の点は存在しない．なお，$\theta = \frac{\pi}{6} - 0$ のとき，C は第 1 象限の無限遠点あり，$\theta = \frac{\pi}{6} + 0$ のとき，C は第 3 象限の無限遠点にある．また，$\theta = \frac{5}{6}\pi - 0$ のとき，C は第 4 象限の無限遠点にあり，$\theta = \frac{5}{6}\pi + 0$ のとき，C は第 2 象限の無限遠点にある．



$(*)$ から，C を複素数平面上の点 z を

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{3(\cos\theta + i\sin\theta)}{2(1 - 2\sin\theta)}$$

と表すことができる．■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_kou_2002.pdf $\boxed{3}$

$\boxed{4}$ (1) $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}$ $(x \geqq -3)$ より $\quad f'(x)=\dfrac{3x(x+2)}{2\sqrt{3x^2+x^3}}$

したがって $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

増減表から，求める極大値は $\quad \boldsymbol{f(-2)=2}$

(2) $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ より $(-3 \leqq x \leqq 0)$

$$\begin{aligned}F'(x)&=f(x+3)-f(x)=\frac{\{f(x+3)\}^2-\{f(x)\}^2}{f(x+3)+f(x)}\\&=\frac{3(x+3)^2+(x+3)^3-(3x^2+x^3)}{f(x+3)+f(x)}=\frac{9(x+3)(x+2)}{f(x+3)+f(x)}\end{aligned}$$

$f(x)=|x|\sqrt{x+3}$ であるから，$F(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$-3 \leqq x \leqq 0$ に注意して，$F(x)$ を求める．

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_x^0 f(t)\,dt+\int_0^{x+3} f(t)\,dt\\&=\int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt+\int_0^{x+3} t\sqrt{t+3}\,dt \qquad \cdots①\end{aligned}$$

まず
$$\begin{aligned}\int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt&=\int_0^x \{(t+3)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{t+3}\}\,dt\\&=\left[\,\frac{2}{5}(t+3)^{\frac{5}{2}}-2(t+3)^{\frac{3}{2}}\,\right]_0^x\\&=\left[\,\frac{2}{5}(t-2)(t+3)^{\frac{3}{2}}\,\right]_0^x\\&=\frac{2}{5}(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}}+\frac{12}{5}\sqrt{3} \qquad \cdots②\end{aligned}$$

①，② より

$$F(x)=\frac{2}{5}\{(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}}+(x+1)(x+6)^{\frac{3}{2}}\}+\frac{24}{5}\sqrt{3}$$

増減表の x の値から

$$\begin{aligned}F(-3)&=\frac{2}{5}(-2\cdot 3^{\frac{3}{2}})+\frac{24}{5}\sqrt{3}=\frac{12}{5}\sqrt{3}\\F(-2)&=\frac{2}{5}(-4-4^{\frac{3}{2}})+\frac{24}{5}\sqrt{3}=\frac{24}{5}(\sqrt{3}-1)\\F(0)&=\frac{2}{5}(-2\cdot 3^{\frac{3}{2}}+6^{\frac{3}{2}})+\frac{24}{5}\sqrt{3}=\frac{12}{5}(\sqrt{3}+\sqrt{6})\end{aligned}$$

よって　**最大値** $\boldsymbol{F(0)=\frac{12}{5}(\sqrt{3}+\sqrt{6})}$，

最小値 $\boldsymbol{F(-2)=\frac{24}{5}(\sqrt{3}-1)}$ ■