平成 29 年度　熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
医学部医学科　平成 29 年 2 月 25 日

1 半径 1 の円に外接する △ABC について，$\angle\mathrm{CAB} = 2x$，$\angle\mathrm{ABC} = 2y$，$\angle\mathrm{BCA} = 2z$ とする。△ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $S = \dfrac{1}{\tan x} + \dfrac{1}{\tan y} + \dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2) $z = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの x，y を求めよ。

2 $s > 0$，$t > 0$ とする。複素数平面上の $\alpha = -i$，$\beta = 2 - 2i$，$\gamma = s + ti$ を表す点をそれぞれ A，B，C とする。さらに，点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり，△ACD が正三角形になるようにする。点 D を表す複素数を z とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) z を s，t を用いて表せ。

(2) α，β，γ が等式 $4(\beta-\alpha)^2 + (\gamma-\alpha)^2 - 2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) = 0$ を満たすとき，γ と z をそれぞれ求めよ。

(3) (2) で求めた γ と z に対して，直線 AC と直線 BD の交点を F とし，$\angle\mathrm{DFC} = \theta$ とする。このとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

3 $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$ $(x > 0)$ とする。座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とし，点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t > 0)$ における曲線 C の接線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。

(2) (1) で求めた t の値を a とする。実数 k に対し，直線 $\ell_k : y = k(x-a) + f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。

(3) (2) の直線 ℓ_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき，それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\dfrac{1}{3}$ となるような k を求め，そのときの曲線 C と直線 ℓ_k で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ n は 2 以上の自然数とする。1 から $2n$ までの自然数の順列 a_1, a_2, $\cdots$, a_{2n} に対して，分数の和

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_{n+2}} + \cdots + \frac{a_n}{a_{2n}} \qquad \cdots (*)$$

を考える。1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して $(*)$ がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

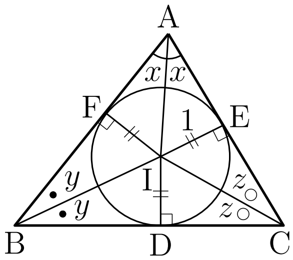
(1) S_2 を求めよ。

(2) S_n を与える順列 a_1, a_2, $\cdots$, a_{2n} の例を 1 つ挙げ，その理由を述べよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log n}$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 右の図のように $\triangle$ABC の内心を I とし，この内接円と 3 辺 BC，CA，AB との接点をそれぞれ D，E，F とする．$\triangle$AEI について



$$\tan x = \frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{AE}} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AE} = \frac{1}{\tan x}$$

AE $=$ AF であるから

$$\triangle\mathrm{AEI} = \triangle\mathrm{AFI} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot 1 = \frac{1}{2\tan x}$$

同様に　$\triangle\mathrm{BDI} = \triangle\mathrm{BFI} = \dfrac{1}{2\tan y}$，　$\triangle\mathrm{CDI} = \triangle\mathrm{CEI} = \dfrac{1}{2\tan z}$

S はこれらの三角形の面積の和であるから

$$S = 2\left(\frac{1}{2\tan x} + \frac{1}{2\tan y} + \frac{1}{2\tan z}\right) = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

(2) $2x + 2y + 2z = \pi$ より，$z = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$x + y = \dfrac{\pi}{3} \cdots ①$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} + \sqrt{3} \\ &= \frac{\cos x\sin y + \sin x\cos y}{\sin x\sin y} + \sqrt{3} = \frac{2\sin(x+y)}{\cos(x-y) - \cos(x+y)} + \sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\cos(x-y) - \frac{1}{2}} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

① より，$0 < x, y < \dfrac{\pi}{3}$ であるから

S は $\boldsymbol{x = y = \dfrac{\pi}{6}}$ のとき，最小値 $\mathbf{3\sqrt{3}}$

補足 $x,\ y,\ z>0$，$x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$S=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}$$

の最小値を求める．

$z=\theta$ (θは定数) に対し，S が最小となるときの x，y の値は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{1}{\tan\theta}\\&=\frac{\cos x\sin y+\sin x\cos y}{\sin x\sin y}+\frac{1}{\tan\theta}\\&=\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x-y)-\cos(x+y)}+\frac{1}{\tan\theta}\end{aligned}$$

$0\leqq|x-y|<x+y=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ に注意すると，S が最小となるのは，$y=x$，$z=\dfrac{\pi}{2}-2x>0$ のときであるから

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}\qquad\left(0<x<\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{2}{\tan x}+\tan 2x=\frac{2}{\tan x}+\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{aligned}$$

ここで，$t=\tan x$，$f(t)=\dfrac{2}{t}+\dfrac{2t}{1-t^2}\quad(0<t<1)$ とおくと

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{2}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\\f'(t)&=-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{(t-1)^2}=\frac{2(3t^2-1)}{t^2(t+1)^2(t-1)^2}\end{aligned}$$

したがって，$f(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	極小 $3\sqrt{3}$	$\nearrow$	

S が最小となるのは，$\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，すなわち，$x=y=z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，
最小値 $3\sqrt{3}$ をとる．

発展 $x,\ y,\ z>0$，$x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$S=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}$$

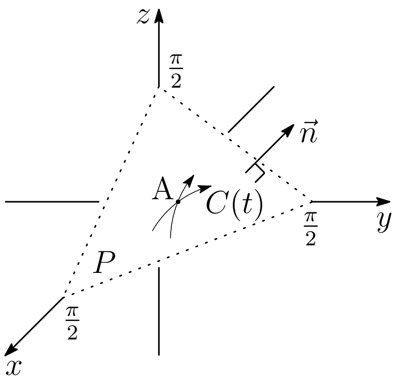
の最小値を求める．

束縛条件を平面

$$P: x+y+z=\frac{\pi}{2}\ (x,\ y,\ z>0)$$

とし，P 上の正則な平面曲線

$$\begin{aligned} C(t) &= (x,\ y,\ z) \\ &= (x(t),\ y(t),\ z(t)) \end{aligned}$$



が $t=t_0$ で極値をとり，その点 A を

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=(x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0))$$

とする．$C(t)$ は P 上にあるから，$x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=0,\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d^2z}{dt^2}=0\quad\cdots(*)$$

上の第 1 式から

$$(1,\ 1,\ 1)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)=0\quad\cdots(**)$$

$C(t)$ の接方向は，常に P の法ベクトル $\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$ に垂直である．

$C(t)$ 上の点 $(x,\ y,\ z)$ について，S は t の関数であるから

$$f(t)=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{1}{\sin^2 y}\cdot\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin^2 z}\cdot\frac{dz}{dt}, \\ f''(t) &= \frac{2\cos x}{\sin^3 x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{2\cos y}{\sin^3 y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\frac{2\cos z}{\sin^3 z}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \\ &\qquad -\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{1}{\sin^2 y}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{\sin^2 z}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}$$

$t=t_0$ で S が極値をとるための必要条件は，$f'(t_0)=0$ であるから

$$-\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{\sin^2\beta}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin^2\gamma}\frac{dz}{dt}=0$$
$$\left(-\frac{1}{\sin^2\alpha},-\frac{1}{\sin^2\beta},-\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)=0$$

A を通る $C(t)$ の任意の接方向に対して上式が成り立つので，$(**)$ より

$$\left(-\frac{1}{\sin^2\alpha},-\frac{1}{\sin^2\beta},-\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)//(1,\ 1,\ 1)$$

$0<\alpha,\ \beta,\ \gamma<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma\quad\text{すなわち}\quad\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{6}$$

このとき，$C(t)$ は正則であるから $\quad\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt},\ \dfrac{dz}{dt}\right)\neq\vec{0}$

また，$(*)$ の第 2 式に注意して

$$\begin{aligned}f''(t_0)&=8\sqrt{3}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}-4\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d^2z}{dt^2}\right)\\&=8\sqrt{3}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}>0\end{aligned}$$

$f'(t_0)=0$，$f''(t_0)>0$ より，$f(t)$ は極小値 $f(t_0)$ をとる．
よって，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ で S は極小値，すなわち，最小値 $3\sqrt{3}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 点 D は直線 AC に関して点 B と反対側にあり，△ACD が正三角形であるから

$$z=\alpha+\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\gamma-\alpha)=-i+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\{s+(t+1)i\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{s-\sqrt{3}(t+1)}{2}+\frac{\sqrt{3}s+t-1}{2}i}$$

(2) $4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$ より

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-2\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)+4=0$$

2 点 A，B の位置関係に注意してこれを解くと

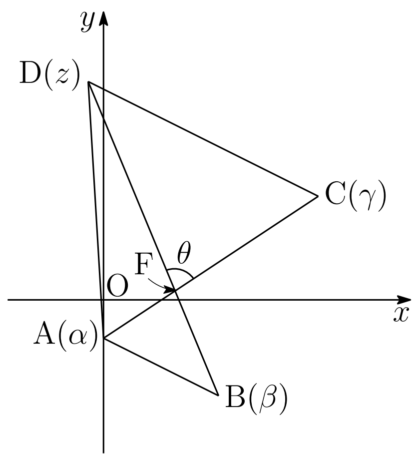
$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$w=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とおくと，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=2w$，$\dfrac{z-\alpha}{\gamma-\alpha}=w$ より

$$\gamma-\alpha=2w(\beta-\alpha)=(1+\sqrt{3}i)(2-i)=2+\sqrt{3}+(-1+2\sqrt{3})i$$
$$z-\alpha=2w^2(\beta-\alpha)=(-1+\sqrt{3}i)(2-i)=-2+\sqrt{3}+(1+2\sqrt{3})i$$

$\alpha=-i$ より　$\boldsymbol{\gamma=2+\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})i}$
$\boldsymbol{z=-2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}i}$

(3) (2) の結果から



$$\frac{z-\beta}{\gamma-\alpha}=\frac{z-\alpha-(\beta-\alpha)}{\gamma-\alpha}$$
$$=\frac{2w^2(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)}{2w(\beta-\alpha)}$$
$$=\frac{2w^2-1}{2w}=\frac{1}{2}\left(2w-\frac{1}{w}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}(1+3\sqrt{3}i)$$

上の図から，$\theta=\arg\dfrac{z-\beta}{\gamma-\alpha}$ であるから

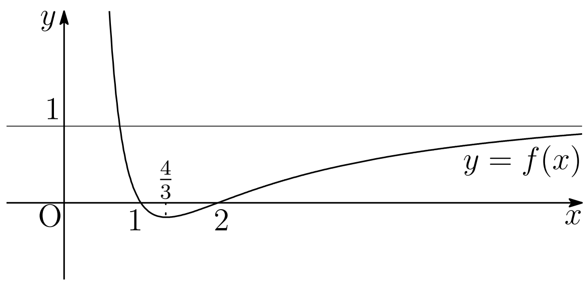
$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1^2+(3\sqrt{3})^2}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{14}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}=1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}$ より

$$f'(x)=\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}=\frac{3x-4}{x^3},$$
$$f''(x)=-\frac{6}{x^3}+\frac{12}{x^4}=-\frac{6(x-2)}{x^4},$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$$

$f(x)$ の増減表 $(x>0)$ および $y=f(x)$ のグラフは，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	極小 $-\frac{1}{8}$	↗	変曲点 0	↗



曲線 $C:y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t>0)$ における接線 ℓ が点 P 以外に共有点をもたない t の値は

$$0<t\leqq\frac{4}{3},\quad t=2$$

よって，求める t の最大値は　　$\boldsymbol{t=2}$

別解 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}=1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}$ より，$f'(x)=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}$ であるから

$$\begin{aligned}
&f(x)-\{f'(t)(x-t)+f(t)\}\\
=&1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\left(\frac{3}{t^2}-\frac{4}{t^3}\right)(x-t)-\left(1-\frac{3}{t}+\frac{2}{t^2}\right)\\
=&-3\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}(x-t)\right\}+2\left\{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t^3}(x-t)\right\}\\
=&-3\left\{-\frac{x-t}{xt}+\frac{1}{t^2}(x-t)\right\}+2\left\{\frac{-(x^2-t^2)}{x^2t^2}+\frac{2}{t^3}(x-t)\right\}\\
=&-3(x-t)\left(-\frac{1}{xt}+\frac{1}{t^2}\right)+2(x-t)\left(-\frac{x+t}{x^2t^2}+\frac{2}{t^3}\right)\\
=&-3(x-t)\cdot\frac{-t+x}{xt^2}+2(x-t)\cdot\frac{-t(x+t)+2x^2}{x^2t^3}\\
=&-3(x-t)^2\cdot\frac{1}{xt^2}+2(x-t)\cdot\frac{(x-t)(2x+t)}{x^2t^3}\\
=&(x-t)^2\left\{-\frac{3}{xt^2}+\frac{2(2x+t)}{x^2t^3}\right\}=\frac{(x-t)^2\{(-3t+4)x+2t\}}{x^2t^3}
\end{aligned}$$

方程式 $f(x)-\{f'(t)(x-t)+f(t)\}=0$ の解 $x>0$ が1個であるのは

$-3t+4\geqq 0$　すなわち　$0<t\leqq\dfrac{4}{3}$ のとき　$x=t$ の1個

$\dfrac{2t}{3t-4}=t$　すなわち　$t=2$ のとき　$x=2$ の1個

よって，求める t の最大値は　$\boldsymbol{t=2}$

補足 $y=f(x)$ と $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ は，$x=t$ で1次の接触をなす．$f(x)$ は有理関数であるから，$f(x)-\{f'(t)(x-t)+f(t)\}$ は $(x-t)^2$ を因数にもつ．別解では関数 $h_0(x)=1$，$h_1(x)=\dfrac{1}{x}$，$h_2(x)=\dfrac{1}{x^2}$ を考え，

$$h_i(x)-\{h_i'(t)(x-t)+h_i(t)\}$$

は $(x-t)^2$ を因数にもつことに注意し $(i=1,2)$，

$$f(x)=h_0(x)-3h_1(x)+2h_2(x)$$

として計算した．

(2) (1) の結果から，変曲点 $(2,\ 0)$ における接線の傾きは　$f'(2)=\dfrac{1}{4}$

直線 $l_k: y=k(x-2)$ と曲線 C の共有点の個数は，(1) のグラフから

$k\leqq 0$ のとき　2個

$0<k<\dfrac{1}{4}$ のとき　3個

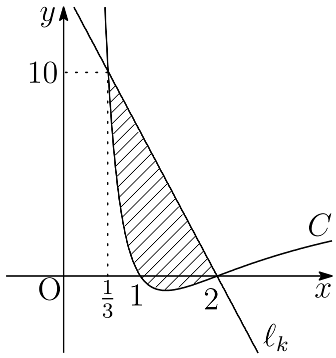
$\dfrac{1}{4}\leqq k$ のとき　1個

(3) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=10$

k は2点 $\left(\dfrac{1}{3},\ 10\right)$，$(2,\ 0)$ を結ぶ直線の傾きであるから

$$k=\frac{0-10}{2-\frac{1}{3}}=\mathbf{-6}$$

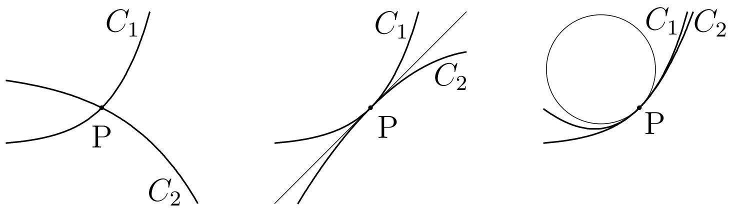
求める面積は，右の図の斜線部分で，その面積を S とすると



$$S=\int_{\frac{1}{3}}^{2}\left\{-6(x-2)-\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right\}dx$$
$$=\left[-3(x-2)^2-x+3\log x+\frac{2}{x}\right]_{\frac{1}{3}}^{2}=\boldsymbol{\frac{5}{3}+3\log 6}$$

解説 2曲線 $C_1 : y=f(x)$ と $C_2 : y=g(x)$ の共有点Pの x 座標を α とする．

1. $f(\alpha)=g(\alpha)$ であるとき，C_1 と C_2 はPで0次の接触をなすという．
2. $f(\alpha)=g(\alpha)$，$f'(\alpha)=g'(\alpha)$ であるとき，C_1 と C_2 はPで1次の接触をなすといい，Pにおける C_1 および C_2 の接線が一致する．
3. $f(\alpha)=g(\alpha)$，$f'(\alpha)=g'(\alpha)$，$f''(\alpha)=g''(\alpha)$ であるとき，C_1 と C_2 はPで2次の接触をなすといい，Pにおける C_1 および C_2 の接触円 (曲率円)[1] が一致する．



0次の接触　　1次の接触　　2次の接触

一般に，$f^{(k)}(\alpha)=g^{(k)}(\alpha)$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$ が成り立つとき，C_1 と C_2 はPで n 次の接触をなすという．

準備 ライプニッツの公式 (Leibniz formula)

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

証明は，数学的帰納法により示すことができる．

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf $\boxed{3}$ 解説を参照．

補題 2 つの有理関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x=\alpha$ で 1 次の接触をなすとき，有理関数 $\varphi_1(x)$ を用いて

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)\varphi_1(x)$$

これを微分して　$f'(x)-g'(x)=\varphi_1(x)+(x-\alpha)\varphi_1'(x)$

$f'(\alpha)=g'(\alpha)$ であるから，有理関数 $\varphi_2(x)$ を用いて

$$\varphi_1(x)+(x-\alpha)\varphi_1'(x)=(x-\alpha)\varphi_2(x)$$

ゆえに　$\varphi_1(x)=(x-\alpha)\{\varphi_2(x)-\varphi_1'(x)\}$

したがって　$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2\{\varphi_2(x)-\varphi_1'(x)\}$

よって，$f(x)-g(x)$ は $(x-\alpha)^2$ を因数にもつ．

定理

2 つの有理関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x=\alpha$ で n 次の接触をなすとき，$f(x)-g(x)$ は $(x-\alpha)^{n+1}$ を因数にもつ．

証明 $n=0$ のとき，明らか．$n=1$ のとき，補題により示された．

n 次の接触をなすとき，$0\leqq k\leqq n$ について，k 次の接触をなす．

$n=k$ のとき成り立つと仮定すると，有理関数 $\varphi(x)$ を用いて

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^{k+1}\varphi(x)$$

と表せる．ライプニッツの公式を用いてこれを $k+1$ 回微分すると

$$f^{(k+1)}(x)-g^{(k+1)}(x)=(k+1)!\varphi(x)+\sum_{j=1}^{k+1}{}_{k+1}\mathrm{C}_j\{(x-\alpha)^{k+1}\}^{(k+1-j)}\varphi^{(j)}(x)$$

$f^{(k+1)}(\alpha)=g^{(k+1)}(\alpha)$ であるから，上式は $x-\alpha$ を因数にもつ．

また，$1\leqq j\leqq k+1$ のとき $\{(x-\alpha)^{k+1}\}^{(k+1-j)}$ は $x-\alpha$ を因数にもつので，$\varphi(x)$ は有理関数 $\phi(x)$ を用いて

$$\varphi(x)=(x-\alpha)\phi(x)$$

したがって，$n=k+1$ のとき，次式が成り立つ．

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^{k+2}\phi(x)$$

このとき，$f(x)-g(x)$ は $(x-\alpha)^{k+2}$ を因数にもつ．

よって，数学的帰納法により，定理は示された．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) S_2 は分母が 1 と 2 の組合せについて調べればよいので

$$\frac{4}{1}+\frac{3}{2}=\frac{11}{2},\quad \frac{3}{1}+\frac{4}{2}=5 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{S_2=\frac{11}{2}}$$

(2) 1 から $2n$ までの自然数を分母と分子にもつ分数で最大のものは $\dfrac{2n}{1}$

2 から $2n-1$ までの自然数を分母と分子にもつ分数で最大のものは $\dfrac{2n-1}{2}$

順次この法則によりできる分数の和

$$\frac{2n}{1}+\frac{2n-1}{2}+\cdots+\frac{n+1}{n}$$

が S_n である．この法則に従わない部分和

$$\frac{c}{a}+\frac{d}{b} \quad (a<b<c<d)$$

をもつ S_n が存在すると仮定すると

$$\left(\frac{d}{a}+\frac{c}{b}\right)-\left(\frac{c}{a}+\frac{d}{b}\right)=\frac{(b-a)(d-c)}{ab}>0$$

すなわち
$$\frac{c}{a}+\frac{d}{b}<\frac{d}{a}+\frac{c}{b}$$

これは，S_n であることに反する．よって

$$S_n=\frac{2n}{1}+\frac{2n-1}{2}+\cdots+\frac{n+1}{n}$$

となり，求める順列の例の 1 つは

$$\boldsymbol{a_1=2n,\ a_2=2n-1,\ \cdots,\ a_n=n+1,}$$
$$\boldsymbol{a_{n+1}=1,\ a_{n+2}=2,\ \cdots,\ a_{2n}=n}$$

(3) (2) の結果から，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2n+1-k}{k}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{S_n}{n\log n}&=\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2n+1-k}{k}\\&=\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2n+1}{k}-1\right)\\&=\frac{1}{\log n}\left(-1+\frac{2n+1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \quad \cdots①\end{aligned}$$

ここで，自然数 k について，$\dfrac{1}{k} > \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) > \log n$$

次に，2 以上の自然数 k について，$\dfrac{1}{k} < \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x} = 1 + \int_1^{n} \frac{dx}{x} = \log n + 1$$

上の 2 式から　　$\log n < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \log n + 1 \quad \cdots ②$

①，② から

$$\frac{1}{\log n}\left(-1 + \frac{2n+1}{n}\log n\right) < \frac{S_n}{n\log n} < \frac{1}{\log n}\left\{-1 + \frac{2n+1}{n}(\log n + 1)\right\}$$
$$-\frac{1}{\log n} + 2 + \frac{1}{n} < \frac{S_n}{n\log n} < -\frac{1}{\log n} + \left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{\log n}\right)$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log n} = \mathbf{2}$$

補足 ② はオイラーの定数 γ に関係している．

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) \fallingdotseq 0.5772156649\cdots$$

は無理数であるかどうかさえ分かっていない．