

平成 29 年度 熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
 医学部医学科 平成 29 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 半径 1 の円に外接する $\triangle ABC$ について、 $\angle CAB = 2x$, $\angle ABC = 2y$, $\angle BCA = 2z$ とする。 $\triangle ABC$ の面積を S とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) $S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2) $z = \frac{\pi}{6}$ のとき、 S の最小値とそのときの x , y を求めよ。

2 $s > 0$, $t > 0$ とする。複素数平面上の $\alpha = -i$, $\beta = 2 - 2i$, $\gamma = s + ti$ を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに、点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり、 $\triangle ACD$ が正三角形になるようにする。点 D を表す複素数を z とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) z を s , t を用いて表せ。

(2) α , β , γ が等式 $4(\beta - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2 - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = 0$ を満たすとき、 γ と z をそれぞれ求めよ。

(3) (2) で求めた γ と z に対して、直線 AC と直線 BD の交点を F とし、 $\angle DFC = \theta$ とする。このとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

3 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$ ($x > 0$) とする。座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とし、点 $P(t, f(t))$ ($t > 0$) における曲線 C の接線を l とする。以下の問いに答えよ。

(1) 接線 l と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。

(2) (1) で求めた t の値を a とする。実数 k に対し、直線 $l_k: y = k(x-a) + f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。

(3) (2) の直線 l_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき、それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\frac{1}{3}$ となるような k を求め、そのときの曲線 C と直線 l_k で囲まれた部分の面積を求めよ。

- 4 n は 2 以上の自然数とする。1 から $2n$ までの自然数の順列 a_1, a_2, \dots, a_{2n} に対して、分数の和

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_{n+2}} + \dots + \frac{a_n}{a_{2n}} \quad \dots (*)$$

を考える。1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して $(*)$ がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) S_2 を求めよ。
- (2) S_n を与える順列 a_1, a_2, \dots, a_{2n} の例を 1 つ挙げ、その理由を述べよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log n}$ を求めよ。

解答例

- 1 (1) 右の図のように $\triangle ABC$ の内心を I とし、この内接円と 3 辺 BC , CA , AB との接点をそれぞれ D , E , F とする. $\triangle AEI$ について

$$\tan x = \frac{EI}{AE} \quad \text{ゆえに} \quad AE = \frac{1}{\tan x}$$

$AE = AF$ であるから

$$\triangle AEI = \triangle AFI = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot 1 = \frac{1}{2 \tan x}$$

$$\text{同様に} \quad \triangle BDI = \triangle BFI = \frac{1}{2 \tan y}, \quad \triangle CDI = \triangle CEI = \frac{1}{2 \tan z}$$

S はこれらの三角形の面積の和であるから

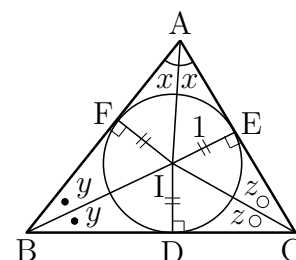
$$S = 2 \left(\frac{1}{2 \tan x} + \frac{1}{2 \tan y} + \frac{1}{2 \tan z} \right) = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

- (2) $2x + 2y + 2z = \pi$ より, $z = \frac{\pi}{6}$ のとき, $x + y = \frac{\pi}{3} \dots \textcircled{1}$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} + \sqrt{3} \\ &= \frac{\cos x \sin y + \sin x \cos y}{\sin x \sin y} + \sqrt{3} = \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x-y) - \cos(x+y)} + \sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\cos(x-y) - \frac{1}{2}} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

- $\textcircled{1}$ より, $0 < x, y < \frac{\pi}{3}$ であるから

$$S \text{ は } x = y = \frac{\pi}{6} \text{ のとき, 最小値 } 3\sqrt{3}$$



補足 $x, y, z > 0$, $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

の最小値を求める.

$z = \theta$ (θ は定数) に対し, S が最小となるときの x, y の値は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} + \frac{1}{\tan \theta} \\ &= \frac{\cos x \sin y + \sin x \cos y}{\sin x \sin y} + \frac{1}{\tan \theta} \\ &= \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x-y) - \cos(x+y)} + \frac{1}{\tan \theta} \end{aligned}$$

$0 \leq |x - y| < x + y = \frac{\pi}{2} - \theta$ に注意すると, S が最小となるのは, $y = x$, $z = \frac{\pi}{2} - 2x > 0$ のときであるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{2}{\tan x} + \tan 2x = \frac{2}{\tan x} + \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

ここで, $t = \tan x$, $f(t) = \frac{2}{t} + \frac{2t}{1-t^2}$ ($0 < t < 1$) とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \\ f'(t) &= -\frac{2}{t^2} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{2(3t^2 - 1)}{t^2(t+1)^2(t-1)^2} \end{aligned}$$

したがって, $f(t)$ の増減表は

t	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	(1)
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		\searrow	極小 $3\sqrt{3}$	\nearrow	

S が最小となるのは, $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, すなわち, $x = y = z = \frac{\pi}{6}$ のとき, 最小値 $3\sqrt{3}$ をとる.

発展 $x, y, z > 0, x + y + z = \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

の最小値を求める.

束縛条件を平面

$$P: x + y + z = \frac{\pi}{2} \quad (x, y, z > 0)$$

とし, P 上の正則な平面曲線

$$\begin{aligned} C(t) &= (x, y, z) \\ &= (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

が $t = t_0$ で極値をとり, その点 A を

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$$

とする. $C(t)$ は P 上にあるから, $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad \dots (*)$$

上の第1式から

$$(1, 1, 1) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = 0 \quad \dots (**)$$

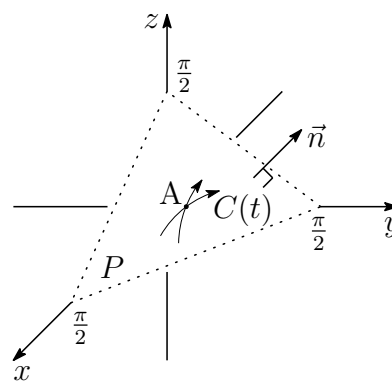
$C(t)$ の接方向は, 常に P の法ベクトル $\vec{n} = (1, 1, 1)$ に垂直である.

$C(t)$ 上の点 (x, y, z) について, S は t の関数であるから

$$f(t) = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{1}{\sin^2 y} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\sin^2 z} \cdot \frac{dz}{dt}, \\ f''(t) &= \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{2 \cos y}{\sin^3 y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{2 \cos z}{\sin^3 z} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{\sin^2 y} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{\sin^2 z} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}$$



$t = t_0$ で S が極値をとるための必要条件は、 $f'(t_0) = 0$ であるから

$$-\frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{\sin^2 \beta} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\sin^2 \gamma} \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{\sin^2 \alpha}, -\frac{1}{\sin^2 \beta}, -\frac{1}{\sin^2 \gamma} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = 0$$

A を通る $C(t)$ の任意の接方向に対して上式が成り立つので、(**) より

$$\left(-\frac{1}{\sin^2 \alpha}, -\frac{1}{\sin^2 \beta}, -\frac{1}{\sin^2 \gamma} \right) // (1, 1, 1)$$

$0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma \quad \text{すなわち} \quad \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{6}$$

このとき、 $C(t)$ は正則であるから $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \neq \vec{0}$

また、(*) の第 2 式に注意して

$$f''(t_0) = 8\sqrt{3} \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} - 4 \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2} \right)$$

$$= 8\sqrt{3} \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} > 0$$

$f'(t_0) = 0$, $f''(t_0) > 0$ より、 $f(t)$ は極小値 $f(t_0)$ をとる.

よって、点 A $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right)$ で S は極小値、すなわち、最小値 $3\sqrt{3}$ をとる. ■

- 2 (1) 点Dは直線ACに関して点Bと反対側にあり、 $\triangle ACD$ が正三角形であるから

$$\begin{aligned} z &= \alpha + \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (\gamma - \alpha) = -i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \{s + (t+1)i\} \\ &= \frac{s - \sqrt{3}(t+1)}{2} + \frac{\sqrt{3}s + t - 1}{2}i \end{aligned}$$

(2) $4(\beta - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2 - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = 0$ より

$$\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right)^2 - 2 \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) + 4 = 0$$

2点A, Bの位置関係に注意してこれを解くと

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$w = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ とおくと, $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 2w$, $\frac{z - \alpha}{\gamma - \alpha} = w$ より

$$\gamma - \alpha = 2w(\beta - \alpha) = (1 + \sqrt{3}i)(2 - i) = 2 + \sqrt{3} + (-1 + 2\sqrt{3})i$$

$$z - \alpha = 2w^2(\beta - \alpha) = (-1 + \sqrt{3}i)(2 - i) = -2 + \sqrt{3} + (1 + 2\sqrt{3})i$$

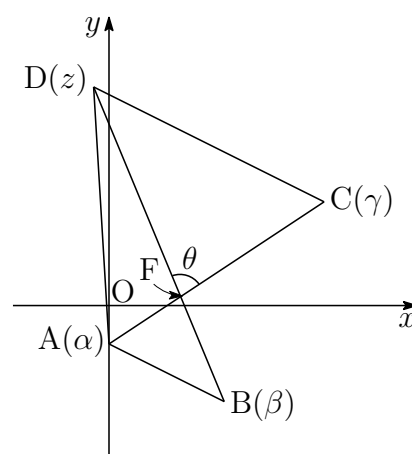
$$\begin{aligned} \alpha &= -i \text{ より} & \gamma &= 2 + \sqrt{3} + (-1 + 2\sqrt{3})i \\ & & z &= -2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i \end{aligned}$$

- (3) (2)の結果から

$$\begin{aligned} \frac{z - \beta}{\gamma - \alpha} &= \frac{z - \alpha - (\beta - \alpha)}{\gamma - \alpha} \\ &= \frac{2w^2(\beta - \alpha) - (\beta - \alpha)}{2w(\beta - \alpha)} \\ &= \frac{2w^2 - 1}{2w} = \frac{1}{2} \left(2w - \frac{1}{w} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} (1 + 3\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

上の図から, $\theta = \arg \frac{z - \beta}{\gamma - \alpha}$ であるから

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$



3 (1) $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$ より

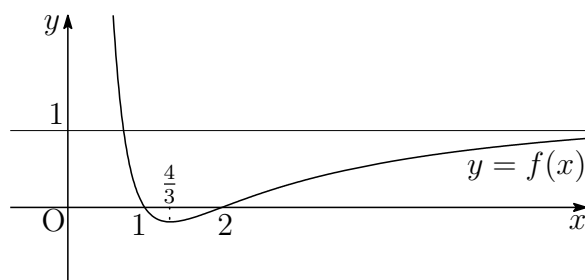
$$f'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} = \frac{3x-4}{x^3},$$

$$f''(x) = -\frac{6}{x^3} + \frac{12}{x^4} = -\frac{6(x-2)}{x^4},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$f(x)$ の増減表 ($x > 0$) および $y = f(x)$ のグラフは、次のようになる。

x	(0)	...	$\frac{4}{3}$...	2	...
$f'(x)$		-	0	+	+	+
$f''(x)$		+	+	+	0	-
$f(x)$		↘	極小 $-\frac{1}{8}$	↗	変曲点 0	↗



曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ ($t > 0$) における接線 ℓ が点 P 以外に共有点をもたない t の値は

$$0 < t \leq \frac{4}{3}, \quad t = 2$$

よって、求める t の最大値は $t = 2$

別解 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$ より, $f'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}$ であるから

$$\begin{aligned}
 & f(x) - \{f'(t)(x-t) + f(t)\} \\
 &= 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \left(\frac{3}{t^2} - \frac{4}{t^3}\right)(x-t) - \left(1 - \frac{3}{t} + \frac{2}{t^2}\right) \\
 &= -3 \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}(x-t) \right\} + 2 \left\{ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^3}(x-t) \right\} \\
 &= -3 \left\{ -\frac{x-t}{xt} + \frac{1}{t^2}(x-t) \right\} + 2 \left\{ \frac{-(x^2-t^2)}{x^2t^2} + \frac{2}{t^3}(x-t) \right\} \\
 &= -3(x-t) \left(-\frac{1}{xt} + \frac{1}{t^2} \right) + 2(x-t) \left(-\frac{x+t}{x^2t^2} + \frac{2}{t^3} \right) \\
 &= -3(x-t) \cdot \frac{-t+x}{xt^2} + 2(x-t) \cdot \frac{-t(x+t) + 2x^2}{x^2t^3} \\
 &= -3(x-t)^2 \cdot \frac{1}{xt^2} + 2(x-t) \cdot \frac{(x-t)(2x+t)}{x^2t^3} \\
 &= (x-t)^2 \left\{ -\frac{3}{xt^2} + \frac{2(2x+t)}{x^2t^3} \right\} = \frac{(x-t)^2 \{(-3t+4)x + 2t\}}{x^2t^3}
 \end{aligned}$$

方程式 $f(x) - \{f'(t)(x-t) + f(t)\} = 0$ の解 $x > 0$ が 1 個であるのは

$$\begin{aligned}
 -3t + 4 \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < t \leq \frac{4}{3} \quad \text{のとき} \quad x = t \text{ の 1 個} \\
 \frac{2t}{3t-4} = t \quad \text{すなわち} \quad t = 2 \quad \text{のとき} \quad x = 2 \text{ の 1 個}
 \end{aligned}$$

よって, 求める t の最大値は $t = 2$

補足 $y = f(x)$ と $y = f'(t)(x-t) + f(t)$ は, $x = t$ で 1 次の接触をなす. $f(x)$ は有理関数であるから, $f(x) - \{f'(t)(x-t) + f(t)\}$ は $(x-t)^2$ を因数にもつ. 別解では関数 $h_0(x) = 1$, $h_1(x) = \frac{1}{x}$, $h_2(x) = \frac{1}{x^2}$ を考え,

$$h_i(x) - \{h'_i(t)(x-t) + h_i(t)\}$$

は $(x-t)^2$ を因数にもつことに注意し ($i = 1, 2$),

$$f(x) = h_0(x) - 3h_1(x) + 2h_2(x)$$

として計算した.

(2) (1) の結果から, 変曲点 $(2, 0)$ における接線の傾きは $f'(2) = \frac{1}{4}$
直線 $l_k : y = k(x-2)$ と曲線 C の共有点の個数は, (1) のグラフから

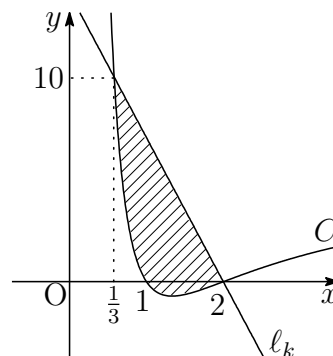
$$\begin{aligned}
 k \leq 0 \quad \text{のとき} & \quad 2 \text{ 個} \\
 0 < k < \frac{1}{4} \quad \text{のとき} & \quad 3 \text{ 個} \\
 \frac{1}{4} \leq k \quad \text{のとき} & \quad 1 \text{ 個}
 \end{aligned}$$

$$(3) f\left(\frac{1}{3}\right) = 10$$

k は 2 点 $\left(\frac{1}{3}, 10\right)$, $(2, 0)$ を結ぶ直線の傾きであるから

$$k = \frac{0 - 10}{2 - \frac{1}{3}} = -6$$

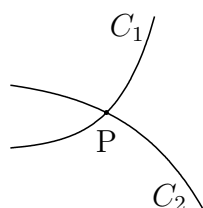
求める面積は、右の図の斜線部分で、その面積を S とすると



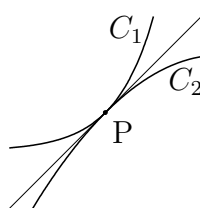
$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{3}}^2 \left\{ -6(x-2) - \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \right\} dx \\ &= \left[-3(x-2)^2 - x + 3 \log x + \frac{2}{x} \right]_{\frac{1}{3}}^2 = \frac{5}{3} + 3 \log 6 \end{aligned}$$

解説 2 曲線 $C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = g(x)$ の共有点 P の x 座標を α とする。

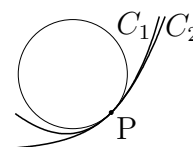
1. $f(\alpha) = g(\alpha)$ であるとき、 C_1 と C_2 は P で 0 次の接触をなすという。
2. $f(\alpha) = g(\alpha)$, $f'(\alpha) = g'(\alpha)$ であるとき、 C_1 と C_2 は P で 1 次の接触をなすという、 P における C_1 および C_2 の接線が一致する。
3. $f(\alpha) = g(\alpha)$, $f'(\alpha) = g'(\alpha)$, $f''(\alpha) = g''(\alpha)$ であるとき、 C_1 と C_2 は P で 2 次の接触をなすという、 P における C_1 および C_2 の接触円 (曲率円)¹ が一致する。



0 次の接触



1 次の接触



2 次の接触

一般に、 $f^{(k)}(\alpha) = g^{(k)}(\alpha)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) が成り立つとき、 C_1 と C_2 は P で n 次の接触をなすという。

準備 ライプニッツの公式 (Leibniz formula)

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

証明は、数学的帰納法により示すことができる。

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf [3] 解説を参照。

補題 2つの有理関数 $f(x)$, $g(x)$ が $x = \alpha$ で1次の接触をなすとき, 有理関数 $\varphi_1(x)$ を用いて

$$f(x) - g(x) = (x - \alpha)\varphi_1(x)$$

これを微分して $f'(x) - g'(x) = \varphi_1(x) + (x - \alpha)\varphi_1'(x)$

$f'(\alpha) = g'(\alpha)$ であるから, 有理関数 $\varphi_2(x)$ を用いて

$$\varphi_1(x) + (x - \alpha)\varphi_1'(x) = (x - \alpha)\varphi_2(x)$$

ゆえに $\varphi_1(x) = (x - \alpha)\{\varphi_2(x) - \varphi_1'(x)\}$

したがって $f(x) - g(x) = (x - \alpha)^2\{\varphi_2(x) - \varphi_1'(x)\}$

よって, $f(x) - g(x)$ は $(x - \alpha)^2$ を因数にもつ.

定理

2つの有理関数 $f(x)$, $g(x)$ が $x = \alpha$ で n 次の接触をなすとき, $f(x) - g(x)$ は $(x - \alpha)^{n+1}$ を因数にもつ.

証明 $n = 0$ のとき, 明らか. $n = 1$ のとき, 補題により示された.

n 次の接触をなすとき, $0 \leq k \leq n$ について, k 次の接触をなす.

$n = k$ のとき成り立つと仮定すると, 有理関数 $\varphi(x)$ を用いて

$$f(x) - g(x) = (x - \alpha)^{k+1}\varphi(x)$$

と表せる. ライプニッツの公式を用いてこれを $k + 1$ 回微分すると

$$f^{(k+1)}(x) - g^{(k+1)}(x) = (k+1)!\varphi(x) + \sum_{j=1}^{k+1} {}_{k+1}C_j \{(x - \alpha)^{k+1}\}^{(k+1-j)} \varphi^{(j)}(x)$$

$f^{(k+1)}(\alpha) = g^{(k+1)}(\alpha)$ であるから, 上式は $x - \alpha$ を因数にもつ.

また, $1 \leq j \leq k + 1$ のとき $\{(x - \alpha)^{k+1}\}^{(k+1-j)}$ は $x - \alpha$ を因数にもつので, $\varphi(x)$ は有理関数 $\phi(x)$ を用いて

$$\varphi(x) = (x - \alpha)\phi(x)$$

したがって, $n = k + 1$ のとき, 次式が成り立つ.

$$f(x) - g(x) = (x - \alpha)^{k+2}\phi(x)$$

このとき, $f(x) - g(x)$ は $(x - \alpha)^{k+2}$ を因数にもつ.

よって, 数学的帰納法により, 定理は示された. ■

4 (1) S_2 は分母が 1 と 2 の組合せについて調べればよいので

$$\frac{4}{1} + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}, \quad \frac{3}{1} + \frac{4}{2} = 5 \quad \text{よって} \quad S_2 = \frac{11}{2}$$

(2) 1 から $2n$ までの自然数を分母と分子にもつ分数で最大のものは $\frac{2n}{1}$
 2 から $2n-1$ までの自然数を分母と分子にもつ分数で最大のものは $\frac{2n-1}{2}$
 順次この法則によりできる分数の和

$$\frac{2n}{1} + \frac{2n-1}{2} + \cdots + \frac{n+1}{n}$$

が S_n である. この法則に従わない部分

$$\frac{c}{a} + \frac{d}{b} \quad (a < b < c < d)$$

をもつ S_n が存在すると仮定すると

$$\left(\frac{d}{a} + \frac{c}{b}\right) - \left(\frac{c}{a} + \frac{d}{b}\right) = \frac{(b-a)(d-c)}{ab} > 0$$

すなわち $\frac{c}{a} + \frac{d}{b} < \frac{d}{a} + \frac{c}{b}$

これは, S_n であることに反する. よって

$$S_n = \frac{2n}{1} + \frac{2n-1}{2} + \cdots + \frac{n+1}{n}$$

となり, 求める順列の例の 1 つは

$$a_1 = 2n, \quad a_2 = 2n-1, \quad \cdots, \quad a_n = n+1, \\ a_{n+1} = 1, \quad a_{n+2} = 2, \quad \cdots, \quad a_{2n} = n$$

(3) (2) の結果から, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2n+1-k}{k}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n \log n} &= \frac{1}{n \log n} \sum_{k=1}^n \frac{2n+1-k}{k} \\ &= \frac{1}{n \log n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2n+1}{k} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\log n} \left(-1 + \frac{2n+1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで、自然数 k について、 $\frac{1}{k} > \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$ であるから

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) > \log n$$

次に、2以上の自然数 k について、 $\frac{1}{k} < \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}$ であるから

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dx}{x} = 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = \log n + 1$$

上の2式から $\log n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \log n + 1 \quad \dots \textcircled{2}$

①, ②から

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log n} \left(-1 + \frac{2n+1}{n} \log n \right) &< \frac{S_n}{n \log n} < \frac{1}{\log n} \left\{ -1 + \frac{2n+1}{n} (\log n + 1) \right\} \\ -\frac{1}{\log n} + 2 + \frac{1}{n} &< \frac{S_n}{n \log n} < -\frac{1}{\log n} + \left(2 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{\log n} \right) \end{aligned}$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log n} = 2$$

補足 ②はオイラーの定数 γ に関係している。

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \doteq 0.5772156649 \dots$$

は無理数であるかどうかさえ分かっていない。 ■