平成28年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120分
医学部医学科　平成28年2月25日

1 $\triangle$ABCと，Aを通りBCに平行な直線lを考える。kを正の数とし，直線l上に点Pを$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$となるようにとる。また直線$l$上に点Qを，線分PBと線分QCが1点で交わるようにとる。その交点をRとする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$とおき，また$m$を$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = m\overrightarrow{\mathrm{AP}}$により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$，$k$，$m$を用いて表せ。

(2) $|\vec{b}| = 1$，$|\vec{c}| = 2$，$\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{3}{4}$，$m = -1$とする。$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$と$\overrightarrow{\mathrm{CR}}$が直交するとき，$k$の値を求めよ。

2 $x \geqq 1$で定義された関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 1$における$f(x)$の最大値とそのときのxの値を求めよ。

(2) (1)で求めたxの値をaとする。曲線$y = f(x)$と2直線$y = 0$，$x = a$で囲まれた図形をDとする。Dの面積を求めよ。

(3) (2)の図形Dをy軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

3 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$を満たす$\theta$に対して，$\alpha = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$とする。ただし，$i$は虚数単位である。$n = 1, 2, 3, \cdots$に対して

$$z_n = \alpha^n - 2\alpha^{n-1}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$とするとき，z_nを極形式で表せ。

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| > 500$となる最小の$n$を求めよ。

(3) z_{1000}が実数となるようなθの値の個数を求めよ。

4 a，bを実数とし，曲線$C : y = x^3 - 3ax^2 + bx$を考える。Cの接線の傾きの最小値が-3であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) bをaを用いて表せ。

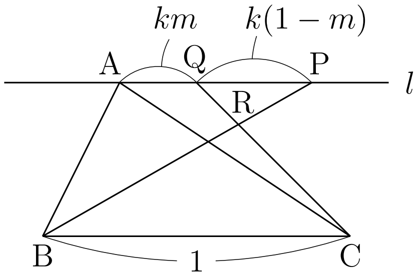
(2) Cがx軸の正の部分，負の部分とそれぞれ1点で交わるとする。このときaの値の範囲を求めよ。

(3) aが(2)で求めた範囲にあるとき，Cとx軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め，そのときのaの値を求めよ。

解答例

$\boxed{\textbf{1}}$ (1) $\mathrm{BC}:\mathrm{AP}=1:k$，$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=1:1-m$ より　　$\mathrm{BC}:\mathrm{PQ}=1:k(1-m)$

$\triangle\mathrm{RBC}\backsim\triangle\mathrm{RPQ}$ より　　$\mathrm{BR}:\mathrm{PR}=1:k(1-m)$

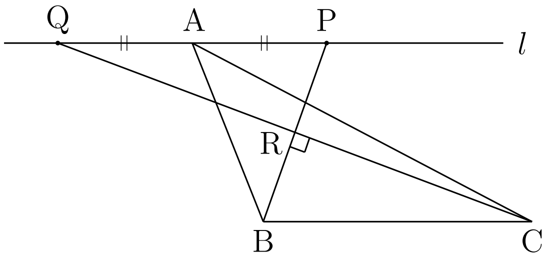


$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}=k(\vec{c}-\vec{b})$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{k(1-m)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{1+k(1-m)}=\frac{k(1-m)\vec{b}+k(\vec{c}-\vec{b})}{1+k(1-m)}=\boldsymbol{\frac{-km\vec{b}+k\vec{c}}{1+k(1-m)}}$$

(2) $m=-1$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-k(\vec{c}-\vec{b})$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k(\vec{c}-\vec{b})-\vec{b}=-(k+1)\vec{b}+k\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-k(\vec{c}-\vec{b})-\vec{c}=k\vec{b}-(k+1)\vec{c}$$



$\overrightarrow{\mathrm{BR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=0$ であるから

$$\{-(k+1)\vec{b}+k\vec{c}\}\cdot\{k\vec{b}-(k+1)\vec{c}\}=0$$
$$-k(k+1)|\vec{b}|^2+\{k^2+(k+1)^2\}\vec{b}\cdot\vec{c}-k(k+1)|\vec{c}|^2=0$$

$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BAC}=1\cdot2\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$ であるから

$$-k(k+1)\cdot1^2+\{k^2+(k+1)^2\}\cdot\frac{3}{2}-k(k+1)\cdot2^2=0$$

整理すると　$4k^2+4k-3=0$　ゆえに　$(2k-1)(2k+3)=0$

$k>0$ であるから　　$\boldsymbol{k=\dfrac{1}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ を微分すると

$$f'(x) = (\log x)'\frac{1}{x^2} + \log x\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2} + \log x\left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{1-2\log x}{x^3}$$

$f'(x) = 0$ とすると　　$x = \sqrt{e}$

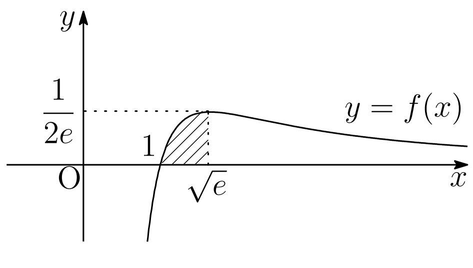
$f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ $(x \geqq 1)$ の増減表は，次のようになる．

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，求める最大値は　　$\boldsymbol{f(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2e}}$

(2) 求める面積を S とすると，(1) の結果から

$$\begin{aligned}S &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x^2}\,dx = -\int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{x}\right)' \log x\,dx \\ &= -\left[\ \frac{1}{x}\log x\ \right]_1^{\sqrt{e}} + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= -\left[\ \frac{1}{x}(\log x + 1)\ \right]_1^{\sqrt{e}} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{e}}}\end{aligned}$$



(3) 求める立体の体積を V とすると

$$V = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} x\cdot\frac{\log x}{x^2}\,dx = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)(\log x)'\,dx = \pi\Big[\ (\log x)^2\ \Big]_1^{\sqrt{e}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\alpha = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ より

$$\begin{aligned} z_n &= \alpha^n - 2\alpha^{n-1} = \{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n - 2\{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{n-1} \\ &= 2^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) - 2^n\{\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta\} \\ &= 2^n\{\cos n\theta - \cos(n-1)\theta\} + 2^n i\{\sin n\theta - \sin(n-1)\theta\} \\ &= -2^{n+1}\sin\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} + 2^{n+1}i\cos\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} z_n &= -2^{n+1}\sin\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6} + 2^{n+1}i\cos\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6} \\ &= -2^n\sin\left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 2^n i\cos\left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \boldsymbol{2^n\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi + i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)} \end{aligned}$$

補足 $z_n = -2^n\sin\dfrac{2n-1}{6}\pi + 2^n i\cos\dfrac{2n-1}{6}\pi = 2^n i\left(\cos\dfrac{2n-1}{6}\pi + i\sin\dfrac{2n-1}{6}\pi\right)$

$$\begin{aligned} &= 2^n\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{2n-1}{6}\pi + i\sin\frac{2n-1}{6}\pi\right) \\ &= 2^n\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi + i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

別解 $z_n = \alpha^n - 2\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(\alpha - 2) \quad \cdots①$

$$\begin{aligned} \alpha - 2 &= 2(\cos\theta + i\sin\theta) - 2 = 2(\cos\theta - 1 + i\sin\theta) \\ &= 4\left(-\sin^2\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) = 4i\sin\frac{\theta}{2}\left(i\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta+\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

上式および ① から

$$\begin{aligned} z_n &= 2^{n-1}\{\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\}\cdot 4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta+\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+\pi}{2}\right) \\ &= 2^{n+1}\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{(2n-1)\theta+\pi}{2} + i\sin\frac{(2n-1)\theta+\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

これに $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ を代入すると $\quad z_n = 2^n\left(\cos\dfrac{n+1}{3}\pi + i\sin\dfrac{n+1}{3}\pi\right)$

(2) (1) の結果より，$|z_k| = 2^k$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2(2^n - 1)$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| > 500$ のとき　$2(2^n - 1) > 500$　ゆえに　$2^n > 251$

これを満たす最小の整数 n は　**8**

(3) $(*)$ より　$z_{1000} = -2^{1001} \sin \dfrac{1999}{2}\theta \sin \dfrac{\theta}{2} + 2^{1001} i \cos \dfrac{1999}{2}\theta \sin \dfrac{\theta}{2}$

z_{1000} が実数であるとき，自然数 j を用いて

$$\frac{1999}{2}\theta = \frac{2j-1}{2}\pi \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{2j-1}{1999}\pi$$

このとき，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$1 \leqq j \leqq 500$

よって，求める θ の個数は　**500** (個)

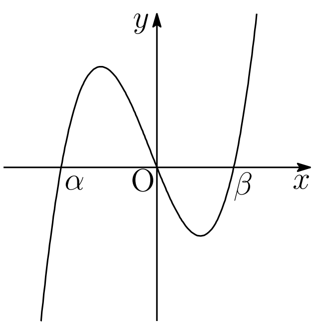
$\boxed{\textbf{4}}$ (1) $y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 6ax + b = 3(x - a)^2 - 3a^2 + b$$

y' の最小値が -3 であるから

$$-3a^2 + b = -3 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b = 3a^2 - 3}$$

(2) $y = x(x^2 - 3ax + b)$ より，このグラフの x 軸の負の部分，正の部分で交わる点の x 座標をそれぞれ α，β とすると $(\alpha < 0 < \beta)$，α，β は 2 次方程式 $x^2 - 3ax + b = 0$ の解であるから，解と係数の関係により



$$\alpha + \beta = 3a, \quad \alpha\beta = b \quad \cdots (*)$$

このとき，$b < 0$ であるから，(1) の結果から

$$3a^2 - 3 < 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-1 < a < 1}$$

(3) $(*)$ から，$y = x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x$．図形の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^0 \{x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x\}dx - \int_0^\beta \{x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x\}dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2\right]_\alpha^0 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2\right]_0^\beta \\
&= \frac{1}{12}(\alpha^4+\beta^4) - \frac{1}{6}\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)
\end{aligned}
$$

ここで，(1) の結果および $(*)$ に注意して

$$
\begin{aligned}
\alpha\beta &= b = 3a^2 - 3 \\
\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (3a)^2 - 2(3a^2-3) = 3a^2+6 \\
\alpha^4+\beta^4 &= (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 \\
&= (3a^2+6)^2 - 2(3a^2-3)^2 = -9a^4 + 72a^2 + 18
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{12}(-9a^4+72a^2+18) - \frac{1}{6}(3a^2-3)(3a^2+6) \\
&= -\frac{9}{4}a^4 + \frac{9}{2}a^2 + \frac{9}{2} \\
\frac{dS}{da} &= -9a^3 + 9a = -9a(a+1)(a-1)
\end{aligned}
$$

S の増減表は次のようになる．

a	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$\frac{dS}{da}$		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	極小 $\frac{9}{2}$	$\nearrow$	

$\boldsymbol{a = 0}$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\frac{9}{2}}$ をとる．