平成27年度　熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
医学部医学科　平成27年2月25日

$\boxed{1}$ $\triangle$ABCの3辺の長さを$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{AC}=b$，$\mathrm{AB}=c$とし，条件

$$a+b+c=1,\quad 9ab=1$$

が成り立つとする．以下の問いに答えよ。

(1) aの値の範囲を求めよ。

(2) $\theta=\angle\mathrm{C}$とするとき，$\cos\theta$の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ p，q，rを実数とする。空間内の3点$\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1, -1,\ r)$が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ。ただし，Oを原点とする。

(1) pは1でも-1でもないことを示せ。

(2) q，rをpを用いて表せ。

(3) p'，q'，r'を実数とし，空間内の3点を$\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}'(-1, -1,\ r')$とする。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$がいずれもベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$に垂直であるとき，$p'$，$q'$，$r'$を$p$を用いて表せ。

(4) (3)における3点A'，B'，C'は一直線上にないことを示せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ a と b を正の実数とする。$\triangle$ABC において，$\angle$B と $\angle$C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$\mathrm{BX}_1 = a$，$\mathrm{CX}_1 = b$ とする。各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して以下の操作を行う。

> 辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 を a，b を用いて表せ。

(2) l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ。

(3) $b = 8a$ のとき，$l_n > \dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてもよい。

$\boxed{\mathbf{4}}$ r を正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-rx} |\sin x|\, dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を r を用いて表せ。

(4) (3) で求めた r の式を $f(r)$ とおく。$\displaystyle\lim_{r\to+0} rf(r)$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 三角形の成立条件により

$$a+b>c,\quad b+c>a,\quad c+a>b$$

$a+b+c=1$ より，$c=1-a-b$ を上の 3 式に代入すると

$$a+b>1-a-b,\quad b+(1-a-b)>a,\quad (1-a-b)+a>b$$

したがって $\qquad a+b>\dfrac{1}{2},\quad a<\dfrac{1}{2},\quad b<\dfrac{1}{2}$

$9ab=1$ より，$b=\dfrac{1}{9a}$ であるから

$$a+\frac{1}{9a}>\frac{1}{2}\quad\cdots①,\quad a<\frac{1}{2}\quad\cdots②,\quad \frac{1}{9a}<\frac{1}{2}\quad\cdots③$$

ここで，$a>0$ であるから，相加・相乗平均の関係により

$$a+\frac{1}{9a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{9a}}=\frac{2}{3}$$

ゆえに，$a>0$ について，① は成立する．

③ を解くと $\quad a>\dfrac{2}{9}\quad$ よって，これと ② から $\qquad \boldsymbol{\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}}$

(2) 余弦定理により $\qquad \cos\theta=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$c=1-a-b$，$ab=\dfrac{1}{9}$，$b=\dfrac{1}{9a}$ であるから

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{a^2+b^2-(1-a-b)^2}{2ab}=\frac{2a+2b-2ab-1}{2ab}\\&=\frac{2a+2b-2\cdot\frac{1}{9}-1}{2\cdot\frac{1}{9}}=9(a+b)-\frac{11}{2}\\&=9\left(a+\frac{1}{9a}\right)-\frac{11}{2}=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}\end{aligned}$$

ここで，$f(a)=9a+\dfrac{1}{a}-\dfrac{11}{2}\ \left(\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(a)&=9-\frac{1}{a^2}\\&=\frac{(3a+1)(3a-1)}{a^2}\end{aligned}$$

a	$\left(\frac{2}{9}\right)$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	(1)	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	(1)

よって $\qquad \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) A$(1,\ p,\ 0)$，B$(q,\ 1,\ 1)$，C$(-1, -1,\ r)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (1-q,\ p-1, -1),\qquad \overrightarrow{\mathrm{CA}} = (2,\ p+1, -r),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-q-1, -2,\ r-1),\qquad \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (q+1,\ 2,\ 1-r)$$

3 点 A，B，C が同一直線上にあるから，$p=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の y 成分に注意すると，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{0}$ となり，2 点 A，B が一致する．これら 2 点の z 座標は異なるので，不適.
また，$p=-1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の y 成分に注意すると，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{0}$ となり，2 点 C，A が一致する．これら 2 点の x 座標は異なるので，不適.
よって，$p \neq \pm 1$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CA}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ であるから，これらの x 成分，y 成分により

$$2{\cdot}2-(p+1)(q+1)=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q = \frac{3-p}{p+1}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから，これらの y 成分，z 成分により

$$(p-1)(r-1)-(-1)(-2)=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r = \frac{p+1}{p-1}}$$

(3) (2) の結果より，A$(1,\ p,\ 0)$，B$\left(\dfrac{3-p}{p+1},\ 1,\ 1\right)$ であるから

$$(p+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2-2p,\ 1-p^2,\ 1+p)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = (1,\ p',\ 0)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$2-2p+p'(1-p^2)=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{p' = -\frac{2}{p+1}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = (q',\ 1,\ 1)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$q'(2-2p)+1-p^2+1+p=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q' = -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = (-1, -1',\ r')$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$-(2-2p)-(1-p^2)+r'(1+p)=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r' = -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}}$$

(4) (3) の結果から　$\mathrm{A}'\left(1, -\dfrac{2}{p+1},\ 0\right)$,

$$\mathrm{B}'\left(-\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)},\ 1,\ 1\right),$$

$$\mathrm{C}'\left(-1, -1, -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}\right)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = \left(\dfrac{-p^2-p+4}{2(p-1)},\ \dfrac{p+3}{p+1},\ 1\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{C}'} = \left(-2,\ \frac{-p+1}{p+1}, -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{C}'}$ であるとき，これらの x 成分，y 成分から

$$\frac{-p^2-p+4}{2(p-1)} \cdot \frac{-p+1}{p+1} - \frac{p+3}{p+1} \cdot (-2) = 0$$

整理すると　$p^2+5p+8=0 \quad \cdots (*)$

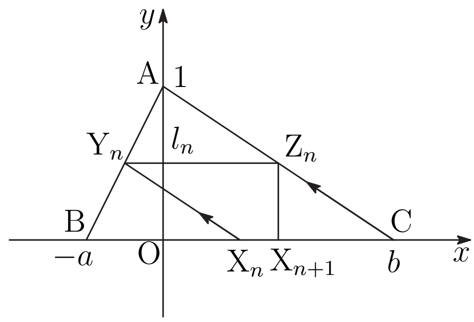
この方程式の判別式を D とすると

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -7 < 0$$

したがって，方程式 $(*)$ は実数解をもたない．

よって，3 点 A$'$，B$'$，C$'$ は一直線上にない．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 座標平面上に点 A(0, 1), B($-a$, 0), C(b, 0), $\mathrm{X}_n(x_n,\ 0)$ ($n=1,2,3,\cdots$) をとる．直線 AB の方程式は



$$y=\frac{1}{a}x+1 \quad \cdots ①$$

直線 AC の方程式は

$$y=-\frac{1}{b}x+1 \quad \cdots ②$$

直線 $\mathrm{X}_n\mathrm{Y}_n$ は点 $(x_n,\ 0)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{b}$ の直線であるから

$$y=-\frac{1}{b}(x-x_n) \quad \cdots ③$$

点 Y_n の y 座標 l_n は，①，③ を解いて　$l_n=\dfrac{a+x_n}{a+b}$ $\cdots$④

このとき，$x_1=0$ であるから　$\boldsymbol{l_1=\dfrac{a}{a+b}}$

(2) 点 Z_n の y 座標が l_n であるから，その x 座標は，② より

$$l_n=-\frac{x}{b}+1 \quad \text{これを解いて} \quad x=b(1-l_n)$$

これが点 X_{n+1} の x 座標であるから　$x_{n+1}=b(1-l_n)$

したがって，上式および ④ から

$$l_{n+1}=\frac{a+x_{n+1}}{a+b}=\frac{a+b(1-l_n)}{a+b}=\boldsymbol{-\frac{b}{a+b}l_n+1}$$

(3) $b=8a$ のとき，(1)，(2) の結果から　$l_{n+1}=-\dfrac{8}{9}l_n+1$，$l_1=\dfrac{1}{9}$

この漸化式から　$l_n=\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n$

$l_n>\dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$

n は奇数であるから　$(-1)^n\left(\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$　ゆえに　$\left(\dfrac{8}{9}\right)^n<\dfrac{1}{16}$

したがって　$n>\dfrac{4}{\log_2 9-3}$

このとき，$3.169<\log_2 9<3.17$ より

$$23.5\cdots=\frac{4}{3.17-3}<\frac{4}{\log_2 9-3}<\frac{4}{3.169-3}=23.6\cdots$$

よって，求める最小の奇数 n は　$\boldsymbol{n=25}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_{n+1}-a_n=\displaystyle\int_0^{(n+1)\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx-\int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx$

$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx$$

$t=x-n\pi$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=1$,

x	$n\pi \longrightarrow (n+1)\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= \int_0^{\pi} e^{-r(n\pi+t)}|\sin(t+n\pi)|\,dt \\ &= e^{-rn\pi}\int_0^{\pi} e^{-rt}\sin t\,dt = e^{-rn\pi}a_1 \\ &= e^{-rn\pi}\left[-\frac{e^{-rt}}{r^2+1}(t\sin t+\cos t)\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}e^{-nr\pi}} \end{aligned}$$

(2) $a_{n+1}-a_n=e^{-rn\pi}a_1$，$a_1=\dfrac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) &= a_1\sum_{k=1}^{n-1}e^{-rk\pi} \\ a_n &= a_1\sum_{k=0}^{n-1}e^{-rk\pi} = a_1\times\frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}} \\ &= \frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}\times\frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}} = \frac{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})} \end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$a_n=\boldsymbol{\frac{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}}$$

(3) $r>0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{-rn\pi}=0$ であるから

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+e^{-r\pi}}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}}$$

(4) $rf(r)=\dfrac{r(1+e^{-r\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}=\dfrac{1+e^{-r\pi}}{(1+r^2)\pi}\times\dfrac{-r\pi}{e^{-r\pi}-1}$ であるから

$$\lim_{r\to+0}rf(r)=\frac{1+1}{\pi}\times 1=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$