# 平成 27 年度　熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
# 医学部医学科　平成 27 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

**1** △ABC の 3 辺の長さを $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{AC}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とし，条件

$$a+b+c=1,\quad 9ab=1$$

が成り立つとする．以下の問いに答えよ。

(1) $a$ の値の範囲を求めよ。

(2) $\theta=\angle\mathrm{C}$ とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ。

**2** $p$，$q$，$r$ を実数とする。空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,-1,\ r)$ が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ。ただし，O を原点とする。

(1) $p$ は 1 でも $-1$ でもないことを示せ。

(2) $q$，$r$ を $p$ を用いて表せ。

(3) $p'$，$q'$，$r'$ を実数とし，空間内の 3 点を $\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}'(-1,-1,\ r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとき，$p'$，$q'$，$r'$ を $p$ を用いて表せ。

(4) (3) における 3 点 $\mathrm{A}'$，$\mathrm{B}'$，$\mathrm{C}'$ は一直線上にないことを示せ。

**3** $a$ と $b$ を正の実数とする。△ABC において，∠B と ∠C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を $\mathrm{X}_1$ とし，線分 $\mathrm{AX}_1$ の長さを 1 とする。また，$\mathrm{BX}_1 = a$，$\mathrm{CX}_1 = b$ とする。各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して以下の操作を行う。

> 辺 BC 上の点 $\mathrm{X}_n$ を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を $\mathrm{Y}_n$ とする。また，点 $\mathrm{Y}_n$ を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を $\mathrm{Z}_n$ とする。点 $\mathrm{Z}_n$ を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を $\mathrm{X}_{n+1}$ とする。

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを $l_n$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $l_1$ を $a$，$b$ を用いて表せ。

(2) $l_{n+1}$ を $l_n$，$a$，$b$ を用いて表せ。

(3) $b = 8a$ のとき，$l_n > \dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 $n$ を求めよ。必要ならば，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてもよい。

**4** $r$ を正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-rx} |\sin x| \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を $r$ を用いて表せ。

(4) (3) で求めた $r$ の式を $f(r)$ とおく。$\displaystyle\lim_{r\to+0} rf(r)$ を求めよ。

解答例

**1** (1) 三角形の成立条件により

$$a+b>c,\quad b+c>a,\quad c+a>b$$

$a+b+c=1$ より，$c=1-a-b$ を上の 3 式に代入すると

$$a+b>1-a-b,\quad b+(1-a-b)>a,\quad (1-a-b)+a>b$$

したがって $\qquad a+b>\dfrac{1}{2},\quad a<\dfrac{1}{2},\quad b<\dfrac{1}{2}$

$9ab=1$ より，$b=\dfrac{1}{9a}$ であるから

$$a+\frac{1}{9a}>\frac{1}{2}\quad\cdots①,\quad a<\frac{1}{2}\quad\cdots②,\quad \frac{1}{9a}<\frac{1}{2}\quad\cdots③$$

ここで，$a>0$ であるから，相加・相乗平均の関係により

$$a+\frac{1}{9a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{9a}}=\frac{2}{3}$$

ゆえに，$a>0$ について，① は成立する．

③ を解くと　$a>\dfrac{2}{9}$　よって，これと ② から　$\boldsymbol{\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}}$

(2) 余弦定理により　$\cos\theta=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$c=1-a-b$，$ab=\dfrac{1}{9}$，$b=\dfrac{1}{9a}$ であるから

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{a^2+b^2-(1-a-b)^2}{2ab}=\frac{2a+2b-2ab-1}{2ab}\\&=\frac{2a+2b-2\cdot\frac{1}{9}-1}{2\cdot\frac{1}{9}}=9(a+b)-\frac{11}{2}\\&=9\left(a+\frac{1}{9a}\right)-\frac{11}{2}=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}\end{aligned}$$

ここで，$f(a)=9a+\dfrac{1}{a}-\dfrac{11}{2}\ \left(\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(a)&=9-\frac{1}{a^2}\\&=\frac{(3a+1)(3a-1)}{a^2}\end{aligned}$$

| $a$ | $\left(\frac{2}{9}\right)$ | $\cdots$ | $\frac{1}{3}$ | $\cdots$ | $\left(\frac{1}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(a)$ | $(1)$ | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $(1)$ |

よって　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<1}$ ■

**2** (1) A$(1,\ p,\ 0)$，B$(q,\ 1,\ 1)$，C$(-1,-1,\ r)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(q-1,\ 1-p,\ 1),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,-1-p,\ r)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}//\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，これらの $z$ 成分に注目すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=r\overrightarrow{\mathrm{AB}}\quad \text{ゆえに}\quad \begin{cases} -2=r(q-1) & \cdots ① \\ -1-p=r(1-p) & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$r\neq 0$　$\cdots$③

$p=1$ は，② を満たさない．

$p=-1$ を ② に代入すると，$r=0$ となり，③ に反する．

よって　$p\neq\pm 1$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}//\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，これらの $x$ 成分，$y$ 成分により

$$(q-1)(-1-p)-(1-p)\cdot(-2)=0\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{q=\frac{3-p}{p+1}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}//\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから，これらの $y$ 成分，$z$ 成分により

$$(p-1)(r-1)-(-1)(-2)=0\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{r=\frac{p+1}{p-1}}$$

(3) (2) の結果より，A$(1,\ p,\ 0)$，B$\left(\dfrac{3-p}{p+1},\ 1,\ 1\right)$ であるから

$$(p+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2-2p,\ 1-p^2,\ 1+p)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=(1,\ p',\ 0)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$2-2p+p'(1-p^2)=0\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{p'=-\frac{2}{p+1}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=(q',\ 1,\ 1)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$q'(2-2p)+1-p^2+1+p=0\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{q'=-\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=(-1,-1',\ r')$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$-(2-2p)-(1-p^2)+r'(1+p)=0\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{r'=-\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}}$$

(4) (3) の結果から　$\mathrm{A}'\left(1, -\dfrac{2}{p+1},\ 0\right)$,

$$\mathrm{B}'\left(-\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)},\ 1,\ 1\right),$$

$$\mathrm{C}'\left(-1, -1, -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}\right)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = \left(\dfrac{-p^2-p+4}{2(p-1)},\ \dfrac{p+3}{p+1},\ 1\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{C}'} = \left(-2,\ \frac{-p+1}{p+1}, -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} // \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{C}'}$ であるとき，これらの $x$ 成分，$y$ 成分から

$$\frac{-p^2-p+4}{2(p-1)} \cdot \frac{-p+1}{p+1} - \frac{p+3}{p+1} \cdot (-2) = 0$$

整理すると　$p^2 + 5p + 8 = 0 \quad \cdots (*)$

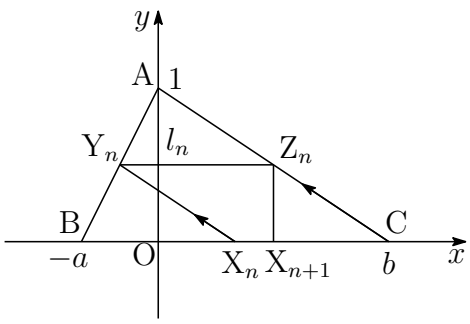
この方程式の判別式を $D$ とすると

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -7 < 0$$

したがって，方程式 $(*)$ は実数解をもたない．

よって，3 点 $\mathrm{A}'$，$\mathrm{B}'$，$\mathrm{C}'$ は一直線上にない．　■

**3** (1) 座標平面上に点 A$(0,\ 1)$，B$(-a,\ 0)$，C$(b,\ 0)$，X$_n(x_n,\ 0)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をとる．直線 AB の方程式は




$$y=\frac{1}{a}x+1 \quad \cdots ①$$

直線 AC の方程式は

$$y=-\frac{1}{b}x+1 \quad \cdots ②$$

直線 X$_n$Y$_n$ は点 $(x_n,\ 0)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{b}$ の直線であるから

$$y=-\frac{1}{b}(x-x_n) \quad \cdots ③$$

点 Y$_n$ の $y$ 座標 $l_n$ は，①，③ を解いて　$l_n=\dfrac{a+x_n}{a+b}$　$\cdots ④$

このとき，$x_1=0$ であるから　$\boldsymbol{l_1=\dfrac{a}{a+b}}$

(2) 点 $Z_n$ の $y$ 座標が $l_n$ であるから，その $x$ 座標は，② より

$$l_n=-\frac{x}{b}+1 \quad \text{これを解いて} \quad x=b(1-l_n)$$

これが点 X$_{n+1}$ の $x$ 座標であるから　$x_{n+1}=b(1-l_n)$

したがって，上式および ④ から

$$l_{n+1}=\frac{a+x_{n+1}}{a+b}=\frac{a+b(1-l_n)}{a+b}=\boldsymbol{-\frac{b}{a+b}l_n+1}$$

(3) $b=8a$ のとき，(1)，(2) の結果から　$l_{n+1}=-\dfrac{8}{9}l_n+1$，$l_1=\dfrac{1}{9}$

この漸化式から　$l_n=\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n$

$l_n>\dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$

$n$ は奇数であるから　$(-1)^n\left(\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$　ゆえに　$\left(\dfrac{8}{9}\right)^n<\dfrac{1}{16}$

したがって　$n>\dfrac{4}{\log_2 9-3}$

このとき，$3.169<\log_2 9<3.17$ より

$$23.5\cdots=\frac{4}{3.17-3}<\frac{4}{\log_2 9-3}<\frac{4}{3.169-3}=23.6\cdots$$

よって，求める最小の奇数 $n$ は　$\boldsymbol{n=25}$　■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_{n+1}-a_n=\displaystyle\int_0^{(n+1)\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx-\int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx$

$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx$$

$t=x-n\pi$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=1$,

| $x$ | $n\pi \longrightarrow (n+1)\pi$ |
|---|---|
| $t$ | $0 \longrightarrow \pi$ |

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{\pi} e^{-r(n\pi+t)}|\sin(t+n\pi)|\,dt$$

$$=e^{-rn\pi}\int_0^{\pi} e^{-rt}\sin t\,dt=e^{-rn\pi}a_1$$

$$=e^{-rn\pi}\left[-\frac{e^{-rt}}{r^2+1}(r\sin t+\cos t)\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}e^{-nr\pi}}$$

(2) $$a_1=\int_0^{\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi} e^{-rx}\sin x\,dx$$

$$=-\frac{1}{r^2+1}\Big[\,e^{-rx}(r\sin x+\cos x)\,\Big]_0^{\pi}=\frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}$$

上式および (1) の結果より，$a_{n+1}-a_n=e^{-n\pi}a_1$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_1\sum_{k=1}^{n-1}e^{-rk\pi}$$

$$a_n=a_1\sum_{k=0}^{n-1}e^{-rk\pi}=a_1\times\frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}}$$

$$=\frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}\times\frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}}=\frac{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$a_n=\boldsymbol{\frac{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}}$$

(3) $r>0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{-rn\pi}=0$ であるから

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+e^{-r\pi}}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}}$$

(4) $rf(r)=\dfrac{r(1+e^{-r\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}=\dfrac{1+e^{-r\pi}}{(1+r^2)\pi}\times\dfrac{-r\pi}{e^{-r\pi}-1}$ であるから

$$\lim_{r\to+0}rf(r)=\frac{1+1}{\pi}\times 1=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$

■