

平成 26 年度 熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分
 医学部医学科 平成 26 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし、OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < t < 1$ に対し、BC を $t : (1 - t)$ に内分する点を Q とする。また、 $PM + MQ$ が最小となる OB 上の点を M とし、 $PN + NQ$ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき、 \overrightarrow{OM} と \overrightarrow{ON} を、それぞれ t 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表せ。
- (2) $\triangle QMN$ の面積を t を用いて表せ。
- (3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき、 $\triangle QMN$ の面積の最大値を求めよ。

2 a を正の定数とする。条件

$$\cos \theta - \sin \theta = a \sin \theta \cos \theta, \quad 0 < \theta < \pi$$

を満たす θ について、以下の問いに答えよ。

- (1) 条件を満たす θ は、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で、ただ 1 つ存在することを示せ。
- (2) 条件を満たす θ の個数を求めよ。

3 以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 a, b, c について, 不等式

$$\frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} < \log 4$$

が成立することを示せ。ただし, \log は自然対数とし, 必要なら $e > 2.7$ および $\log 2 > 0.6$ を用いてもよい。

(2) 自然数 a, b, c, d の組で

$$a^{bc}b^{ca}c^{ab} = d^{abc}, \quad a \leq b \leq c, \quad d \geq 3$$

を満たすものすべて求めよ。

4 a を $a > 2$ である実数とする。 xy 平面上の曲線 $C: y = \frac{1}{\sin x \cos x}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) と直線 $y = a$ の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とする。以下の問いに答えよ。

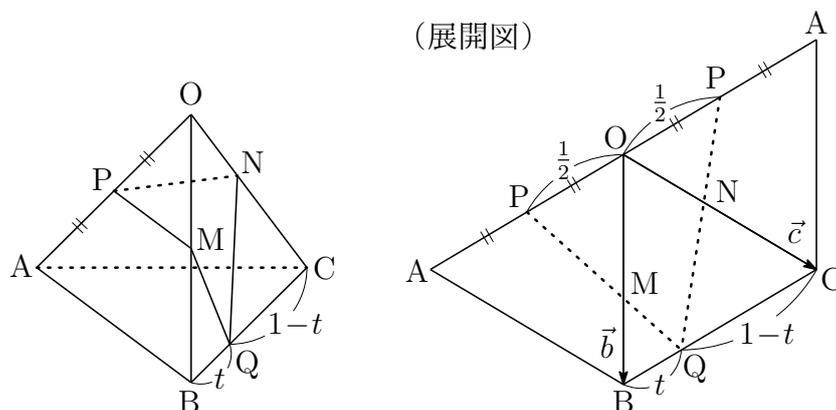
(1) $\tan \alpha$ および $\tan \beta$ を a を用いて表せ。

(2) C と x 軸, および 2 直線 $x = \alpha, x = \beta$ で囲まれた領域を S とする。 S の面積を a を用いて表せ。

(3) S を x 軸の回りに回転して得られる立体の体積 V を a を用いて表せ。

解答例

- 1 (1) 正四面体 OABC(左図)において PM + MQ が最小となる OB 上の点 M は、その展開図(右図)において、線分 PQ と OB の交点である。また、点 N は展開図において、線分 PQ と OC の交点である。



展開図において、 $\triangle OPM \sim \triangle BQM$, $\triangle OPN \sim \triangle CQN$ であるから、これらの相似比から

$$OM : MB = \frac{1}{2} : t, \quad ON : NC = \frac{1}{2} : (1-t)$$

$$\text{よって } \vec{OM} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + t} \vec{OB} = \frac{1}{1 + 2t} \vec{b}, \quad \vec{ON} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + (1-t)} \vec{OC} = \frac{1}{3 - 2t} \vec{c}$$

- (2) (1) で示した相似比から

$$\begin{aligned} \frac{\triangle OMN}{\triangle OBC} &= \frac{1}{1 + 2t} \times \frac{1}{3 - 2t} = \frac{1}{(1 + 2t)(3 - 2t)} \\ \frac{\triangle BQM}{\triangle OBC} &= \frac{MB}{OB} \times \frac{BQ}{BC} = \frac{t}{\frac{1}{2} + t} \times t = \frac{2t^2}{1 + 2t} \\ \frac{\triangle CQN}{\triangle OBC} &= \frac{NC}{OC} \times \frac{QC}{BC} = \frac{1-t}{\frac{1}{2} + (1-t)} \times (1-t) = \frac{2(1-t)^2}{3 - 2t} \end{aligned}$$

$\triangle OMN + \triangle BQM + \triangle CQN = \triangle OBC - \triangle QMN$ であるから、上の3式の辺々を加えると

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\triangle QMN}{\triangle OBC} &= \frac{1}{(1 + 2t)(3 - 2t)} + \frac{2t^2}{1 + 2t} + \frac{2(1-t)^2}{3 - 2t} \\ &= \frac{1 + 2t^2(3 - 2t) + 2(1-t)^2(1 + 2t)}{(1 + 2t)(3 - 2t)} \\ &= \frac{3}{(1 + 2t)(3 - 2t)} \end{aligned}$$

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \triangle QMN &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ 1 - \frac{3}{(1+2t)(3-2t)} \right\} \quad \dots \textcircled{1} \\ &= \frac{\sqrt{3}t(1-t)}{(1+2t)(3-2t)} \end{aligned}$$

(3) ① から

$$\triangle QMN = \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ 1 - \frac{3}{4 - (2t-1)^2} \right\}$$

$0 < t < 1$ であるから, $t = \frac{1}{2}$ のとき, 最大値 $\frac{\sqrt{3}}{16}$ をとる.

参考 (行列を使った解法)

\vec{b}, \vec{c} を (1) の展開図における平面のベクトルとする. このとき

$$\vec{OQ} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

したがって, 上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned} \vec{QM} &= \vec{OM} - \vec{OQ} \\ &= \frac{1}{1+2t}\vec{b} - \{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \\ &= \frac{2t(t-1)}{1+2t}\vec{b} - t\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{QN} &= \vec{ON} - \vec{OQ} \\ &= \frac{1}{3-2t}\vec{c} - \{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \\ &= (t-1)\vec{b} + \frac{(t-1)(2t-1)}{3-2t}\vec{c} \end{aligned}$$

\overrightarrow{QM} , \overrightarrow{QN} から, 2 次の正方行列を考えると

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{QM} \quad \overrightarrow{QN} \right) &= \left(\frac{2t(t-1)}{1+2t}\vec{b} - t\vec{c} \quad (t-1)\vec{b} + \frac{(t-1)(2t-1)}{3-2t}\vec{c} \right) \\ &= \left(\vec{b} \quad \vec{c} \right) \begin{pmatrix} \frac{t(2t-1)}{1+2t} & t-1 \\ -t & \frac{(t-1)(2t-1)}{3-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{t(2t-1)}{1+2t} & t-1 \\ -t & \frac{(t-1)(2t-1)}{3-2t} \end{pmatrix} \text{とおくと}$$

$$\det \left(\overrightarrow{QM} \quad \overrightarrow{QN} \right) = \det \left(\vec{b} \quad \vec{c} \right) \det X \quad \cdots (*)$$

$$\begin{aligned} \text{また} \quad \det X &= t(t-1) \det \begin{pmatrix} \frac{2t-1}{1+2t} & 1 \\ -1 & \frac{2t-1}{3-2t} \end{pmatrix} \\ &= t(t-1) \left\{ \frac{2t-1}{1+2t} \times \frac{2t-1}{3-2t} - 1 \times (-1) \right\} \\ &= t(t-1) \times \frac{4}{(1+2t)(3-2t)} \end{aligned}$$

$0 < t < 1$ より

$$|\det X| = t(1-t) \times \frac{4}{(1+2t)(3-2t)} = \frac{4t(1-t)}{(1+2t)(3-2t)}$$

$$\left| \det \left(\vec{b} \quad \vec{c} \right) \right| = \sqrt{|\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} = \sqrt{1^2 \cdot 1^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(*) および上の2式から

$$\begin{aligned} \triangle QMN &= \frac{1}{2} \left| \det \left(\vec{b} \quad \vec{c} \right) \right| |\det X| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4t(1-t)}{(1+2t)(3-2t)} = \frac{\sqrt{3}t(1-t)}{(1+2t)(3-2t)} \end{aligned}$$



2 (1) $\cos \theta - \sin \theta = a \sin \theta \cos \theta \quad (0 < \theta < \pi) \quad \dots (*)$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\sin \theta \cos \theta \neq 0$ であるから $a = \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta}$

$f(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta}$ とおくと

$$f'(\theta) = -\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において, $f'(\theta) < 0$ であるから, $f(\theta)$ は単調減少.

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} f(\theta) = \infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} f(\theta) = -\infty$$

よって, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において, $f(\theta) = a$ をみたす θ はただ 1 つ存在する.

(2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ は, (*) の解ではない. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -\frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = -\frac{(\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= -\frac{\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$f(\theta)$ の増減表は次のようになる.

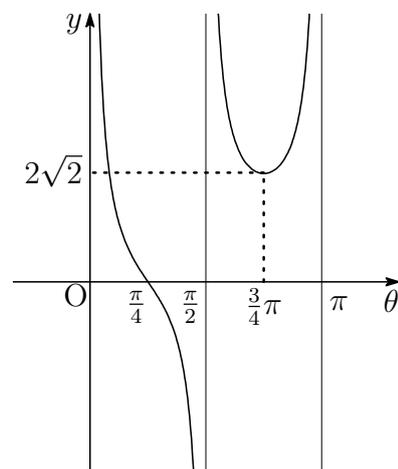
θ	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$	\dots	$\frac{3}{4}\pi$	\dots	(π)
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		\searrow	$2\sqrt{2}$	\nearrow	

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} f(\theta) = \infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi - 0} f(\theta) = \infty$$

(1) および上の結果から, $y = f(\theta)$ のグラフは右のようになる.

$y = f(\theta)$ と $y = a$ の共有点の個数が, (*) の解の個数であるから

$$\begin{cases} 0 < a < 2\sqrt{2} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = 2\sqrt{2} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ 2\sqrt{2} < a \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$



3 (1) $f(x) = \frac{\log x}{x}$ とおくと $f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$

$f(x)$ の増減表は、次のようになる.

x	(0)	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

正の実数 a, b, c について

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq 3f(e) = \frac{3}{e} < \frac{3}{2.7} < 2 \times 0.6 < 2 \log 2 = \log 4$$

したがって $\frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} < \log 4$

(2) a, b, c, d は自然数であるから

$$a^{bc} b^{ca} c^{ab} = d^{abc} \quad \dots (*)$$

の両辺の自然対数をとると

$$bc \log a + ca \log b + ab \log c = abc \log d$$

ゆえに $\frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} = \log d$

$d \geq 3$ であるから、上式および (1) の結果から $d = 3$

(1) の増減表から $f(1) < f(2)$, $f(3) > f(4) > f(5) > \dots$

また $f(2) = \frac{\log 2}{2} = \frac{3 \log 2}{6} = \frac{\log 8}{6}$,

$$f(3) = \frac{\log 3}{3} = \frac{2 \log 3}{6} = \frac{\log 9}{6}$$

ゆえに $f(1) < f(2) < f(3) > f(4) > f(5) > \dots$

$$\frac{\log a}{a} \leq \frac{\log 3}{3}, \quad \frac{\log b}{b} \leq \frac{\log 3}{3}, \quad \frac{\log c}{c} \leq \frac{\log 3}{3}$$

したがって $\frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} \leq \log 3$

上式において、等号が成り立つ a, b, c を求めればよい.

よって $a = b = c = 3$ ■

$$\boxed{4} \quad (1) \quad \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \tan x + \frac{1}{\tan x} \text{ より}$$

$$y = \tan x + \frac{1}{\tan x} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおく. 上式と $y = a$ から y を消去すると

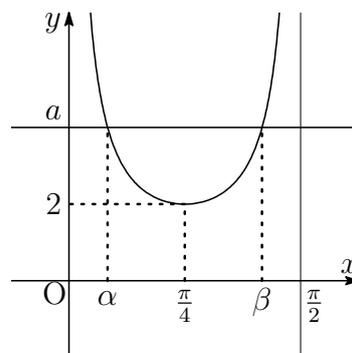
$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = a \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2 x - a \tan x + 1 = 0 \quad \dots (*)$$

この方程式の解が α, β であるから ($\alpha < \beta$), $a > 2$ に注意して

$$\tan \alpha = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad \tan \beta = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

- (2) (*) の解と係数の関係により, $\tan \alpha \tan \beta = 1$ に注意すると, 求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sin x \cos x} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(\tan x)'}{\tan x} dx = \left[\log \tan x \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \log \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \log \tan^2 \beta \\ &= 2 \log \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \end{aligned}$$



- (3) $\tan \alpha \tan \beta = 1$, $\tan \beta - \tan \alpha = \sqrt{a^2 - 4}$ より, 求める体積 V は

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x} \right) (\tan x)' dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ (\tan x)' + \frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} \right\} dx \\ &= \left[\tan x - \frac{1}{\tan x} \right]_{\alpha}^{\beta} = \left(\tan \beta - \frac{1}{\tan \beta} \right) - \left(\tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} \right) \\ &= (\tan \beta - \tan \alpha) - (\tan \alpha - \tan \beta) = 2(\tan \beta - \tan \alpha) = 2\sqrt{a^2 - 4} \end{aligned}$$

よって $V = 2\pi\sqrt{a^2 - 4}$ ■