平成26年度　熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
医学部医学科　平成26年2月25日

$\boxed{1}$ 空間内の1辺の長さ1の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$．$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とし，OAの中点をPとする。以下の問いに答えよ。

(1) $0 < t < 1$ に対し，BCを $t : (1-t)$ に内分する点をQとする。また，PM＋MQが最小となるOB上の点をMとし，PN＋NQが最小となるOC上の点をNとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) △QMNの面積を t を用いて表せ。

(3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，△QMNの面積の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$ a を正の定数とする。条件

$$\cos\theta - \sin\theta = a\sin\theta\cos\theta, \qquad 0 < \theta < \pi$$

を満たす θ について，以下の問いに答えよ。

(1) 条件を満たす θ は，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，ただ1つ存在することを示せ。

(2) 条件を満たす θ の個数を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 a，b，c について，不等式

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}<\log 4$$

が成立することを示せ。ただし，$\log$ は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい。

(2) 自然数 a，b，c，d の組で

$$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}, \qquad a \leqq b \leqq c, \qquad d \geqq 3$$

を満たすものすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ a を $a>2$ である実数とする。xy 平面上の曲線 $C: y=\dfrac{1}{\sin x\cos x}\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y=a$ の交点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とする。以下の問いに答えよ。

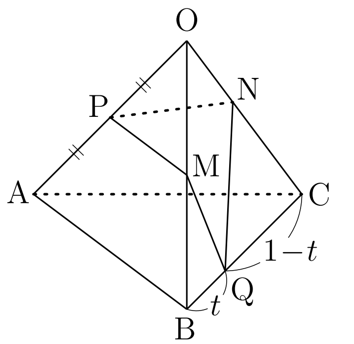
(1) $\tan\alpha$ および $\tan\beta$ を a を用いて表せ。

(2) C と x 軸，および 2 直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた領域を S とする。S の面積を a を用いて表せ。

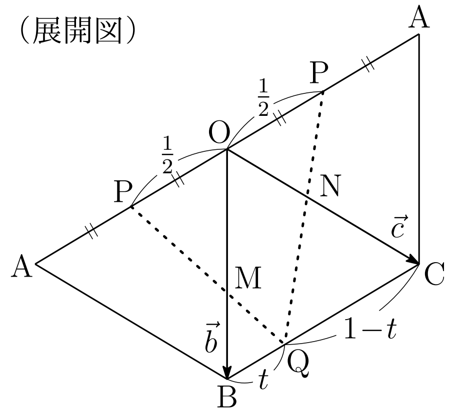
(3) S を x 軸の回りに回転して得られる立体の体積 V を a を用いて表せ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) 正四面体 OABC(左図) において PM + MQ が最小となる OB 上の点 M は，その展開図 (右図) において，線分 PQ と OB の交点である．また，点 N は展開図において，線分 PQ と OC の交点である．



（展開図）



展開図において，△OPM ∽ △BQM，△OPN ∽ △CQN であるから，これらの相似比から

$$\mathrm{OM}:\mathrm{MB}=\frac{1}{2}:t,\quad \mathrm{ON}:\mathrm{NC}=\frac{1}{2}:(1-t)$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+2}\boldsymbol{t}}\vec{\boldsymbol{b}},\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3-2}\boldsymbol{t}}\vec{\boldsymbol{c}}$

(2) (1) で示した相似比から

$$\frac{\triangle\mathrm{OMN}}{\triangle\mathrm{OBC}}=\frac{1}{1+2t}\times\frac{1}{3-2t}=\frac{1}{(1+2t)(3-2t)}$$
$$\frac{\triangle\mathrm{BQM}}{\triangle\mathrm{OBC}}=\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{OB}}\times\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{BC}}=\frac{t}{\frac{1}{2}+t}\times t=\frac{2t^2}{1+2t}$$
$$\frac{\triangle\mathrm{CQN}}{\triangle\mathrm{OBC}}=\frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{OC}}\times\frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{BC}}=\frac{1-t}{\frac{1}{2}+(1-t)}\times(1-t)=\frac{2(1-t)^2}{3-2t}$$

△OMN + △BQM + △CQN = △OBC − △QMN であるから，上の 3 式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}1-\frac{\triangle\mathrm{QMN}}{\triangle\mathrm{OBC}}&=\frac{1}{(1+2t)(3-2t)}+\frac{2t^2}{1+2t}+\frac{2(1-t)^2}{3-2t}\\&=\frac{1+2t^2(3-2t)+2(1-t)^2(1+2t)}{(1+2t)(3-2t)}\\&=\frac{3}{(1+2t)(3-2t)}\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{OBC} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{QMN} &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1 - \frac{3}{(1+2t)(3-2t)}\right\} \quad \cdots ① \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}t(1-t)}{(1+2t)(3-2t)}}\end{aligned}$$

(3) ① から

$$\triangle\mathrm{QMN} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1 - \frac{3}{4-(2t-1)^2}\right\}$$

$0 < t < 1$ であるから，$\boldsymbol{t = \dfrac{1}{2}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{16}}$ **をとる．**

参考 (行列を使った解法)

$\vec{b}$，$\vec{c}$ を (1) の展開図における平面のベクトルとする．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

したがって，上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QM}} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \\ &= \frac{1}{1+2t}\vec{b} - \{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \\ &= \frac{2t(t-1)}{1+2t}\vec{b} - t\vec{c} \\ \overrightarrow{\mathrm{QN}} &= \overrightarrow{\mathrm{ON}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \\ &= \frac{1}{3-2t}\vec{c} - \{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \\ &= (t-1)\vec{b} + \frac{(t-1)(2t-1)}{3-2t}\vec{c}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{QM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QN}}$ から，2 次の正方行列を考えると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{QM}} & \overrightarrow{\mathrm{QN}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2t(t-1)}{1+2t}\vec{b}-t\vec{c} & (t-1)\vec{b}+\frac{(t-1)(2t-1)}{3-2t}\vec{c} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{t(2t-1)}{1+2t} & t-1 \\ -t & \frac{(t-1)(2t-1)}{3-2t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$X = \begin{pmatrix} \frac{t(2t-1)}{1+2t} & t-1 \\ -t & \frac{(t-1)(2t-1)}{3-2t} \end{pmatrix}$ とおくと

$$\det\begin{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{QM}} & \overrightarrow{\mathrm{QN}} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}\det X \quad \cdots (*)$$

また
$$\begin{aligned}\det X &= t(t-1)\det\begin{pmatrix} \frac{2t-1}{1+2t} & 1 \\ -1 & \frac{2t-1}{3-2t} \end{pmatrix} \\ &= t(t-1)\left\{\frac{2t-1}{1+2t}\times\frac{2t-1}{3-2t} - 1\times(-1)\right\} \\ &= t(t-1)\times\frac{4}{(1+2t)(3-2t)}\end{aligned}$$

$0<t<1$ より

$$|\det X| = t(1-t)\times\frac{4}{(1+2t)(3-2t)} = \frac{4t(1-t)}{(1+2t)(3-2t)}$$

$$\left|\det\begin{pmatrix} \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2} = \sqrt{1^2\cdot 1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$(*)$ および上の 2 式から

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{QMN} &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}\right||\det X| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4t(1-t)}{(1+2t)(3-2t)} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}t(1-t)}{(1+2t)(3-2t)}}\end{aligned}$$

2 (1) $\cos\theta - \sin\theta = a\sin\theta\cos\theta \quad (0 < \theta < \pi) \qquad \cdots(*)$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta \neq 0$ であるから　$a = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\cos\theta}$

$f(\theta) = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\cos\theta}$ とおくと

$$f'(\theta) = -\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f'(\theta) < 0$ であるから，$f(\theta)$ は単調減少．

$$\lim_{\theta\to+0} f(\theta) = \infty, \quad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} f(\theta) = -\infty$$

よって，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f(\theta) = a$ をみたす θ はただ 1 つ存在する．

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ は，$(*)$ の解ではない．$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき

$$f'(\theta) = -\frac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = -\frac{(\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$= -\frac{\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

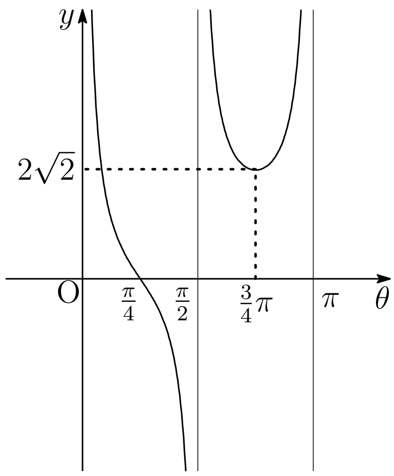
$f(\theta)$ の増減表は次のようなる．

θ	$(\frac{\pi}{2})$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0} f(\theta) = \infty, \quad \lim_{\theta\to\pi-0} f(\theta) = \infty$$

(1) および上の結果から，$y = f(\theta)$ のグラフは右のようになる．

$y = f(\theta)$ と $y = a$ の共有点の個数が，$(*)$ の解の個数であるから



$$\begin{cases} 0 < a < 2\sqrt{2} \text{のとき} & 1\text{個} \\ a = 2\sqrt{2} \text{のとき} & 2\text{個} \\ 2\sqrt{2} < a \text{のとき} & 3\text{個} \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと　　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

正の実数 a，b，c について

$$f(a)+f(b)+f(c) \leqq 3f(e)=\frac{3}{e}<\frac{3}{2.7}<2\times 0.6<2\log 2=\log 4$$

したがって　　$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$

(2) a，b，c，d は自然数であるから

$$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc} \quad \cdots(*)$$

の両辺の自然対数をとると

$$bc\log a+ca\log b+ab\log c=abc\log d$$

ゆえに　　$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}=\log d$

$d \geqq 3$ であるから，上式および (1) の結果から　$\boldsymbol{d=3}$

(1) の増減表から $f(1)<f(2)$，$f(3)>f(4)>f(5)>\cdots$

また　　$f(2)=\dfrac{\log 2}{2}=\dfrac{3\log 2}{6}=\dfrac{\log 8}{6}$，

$f(3)=\dfrac{\log 3}{3}=\dfrac{2\log 3}{6}=\dfrac{\log 9}{6}$

ゆえに　　$f(1)<f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\cdots$

$$\frac{\log a}{a}\leqq\frac{\log 3}{3},\quad \frac{\log b}{b}\leqq\frac{\log 3}{3},\quad \frac{\log c}{c}\leqq\frac{\log 3}{3}$$

したがって　　$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}\leqq\log 3$

上式において，等号が成り立つ a，b，c を求めればよい．

よって　　$\boldsymbol{a=b=c=3}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\dfrac{1}{\sin x\cos x}=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\tan x+\dfrac{1}{\tan x}$ より

$$y=\tan x+\frac{1}{\tan x}\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

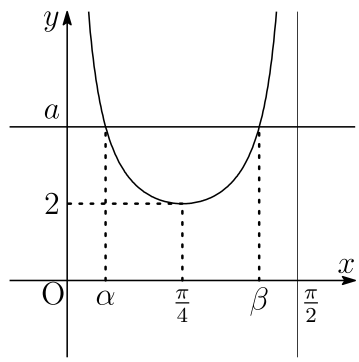
とおく．上式と $y=a$ から y を消去すると

$$\tan x+\frac{1}{\tan x}=a\quad \text{ゆえに}\quad \tan^2 x-a\tan x+1=0\qquad\cdots(*)$$

この方程式の解が α，β であるから $(\alpha<\beta)$，$a>2$ に注意して

$$\boldsymbol{\tan\alpha=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\quad \tan\beta=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}$$

(2) $(*)$ の解と係数の関係により，$\tan\alpha\tan\beta=1$ に注意すると，求める面積 S は，



$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sin x\cos x}dx=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx\\&=\int_\alpha^\beta\frac{(\tan x)'}{\tan x}dx=\Big[\log\tan x\Big]_\alpha^\beta\\&=\log\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\log\tan^2\beta\\&=\boldsymbol{2\log\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}\end{aligned}$$

(3) $\tan\alpha\tan\beta=1$，$\tan\beta-\tan\alpha=\sqrt{a^2-4}$ より，求める体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int_\alpha^\beta\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx\\&=\int_\alpha^\beta\left(1+\frac{1}{\tan^2 x}\right)(\tan x)'dx=\int_\alpha^\beta\left\{(\tan x)'+\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x}\right\}dx\\&=\Big[\tan x-\frac{1}{\tan x}\Big]_\alpha^\beta=\left(\tan\beta-\frac{1}{\tan\beta}\right)-\left(\tan\alpha-\frac{1}{\tan\alpha}\right)\\&=(\tan\beta-\tan\alpha)-(\tan\alpha-\tan\beta)=2(\tan\beta-\tan\alpha)=2\sqrt{a^2-4}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=2\pi\sqrt{a^2-4}}$