平成25年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120分
医学部医学科　平成25年2月25日

$\boxed{\mathbf{1}}$ X，Y は $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ の空でない部分集合で，$X \cap Y$ は空集合とする。また，n を自然数とする。A 君，B 君が以下のルールで対戦する。

(i) 1 回目の対戦では，まず A 君がさいころを投げて，出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする。出た目が X に属さなければ B 君がさいころを投げて，出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする。

(ii) 1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は，1 回目と同じ方法で 2 回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける。ただし，n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする。

以下の問いに答えよ。

(1) さいころを投げたとき，X，Y に属する目が出る確率をそれぞれ p，q とする。A 君が勝つ確率を求めよ。

(2) A 君が勝つ確率が，B 君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組 $(X,\ Y)$ は何通りあるか。

$\boxed{\mathbf{2}}$ O を原点とする空間内の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ -2)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 k に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき，k の値の範囲を求めよ。

(2) 点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ が最小となる C の座標を求めよ。

3 半径 1，中心角 θ $(0 < \theta < \pi)$ の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(\theta)$ を求めよ。

(2) $0 < \theta < \pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ。

(3) 定積分

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\, d\theta$$

を求めよ。

4 xy 平面上で，点 $(1,\ 0)$ までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) C で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) a を正の数とする。円 $x^2 + y^2 = a$ と C の交点の個数が，a の値によってどのように変わるかを調べよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) A 君が k $(1 \leqq k \leqq n)$ 回目に勝つ確率は　　$(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}p$

条件より，$0<p<1$，$0<q<1$ であるから　　$(1-p)(1-q) \neq 1$

よって，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}p = \boldsymbol{\frac{p\{1-(1-p)^n(1-q)^n\}}{1-(1-p)(1-q)}}$$

(2) B 君が k $(1 \leqq k \leqq n)$ 回目に勝つ確率は　　$(1-p)^{k}(1-q)^{k-1}q$

(1) と同様に，B の勝つ確率は

$$\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k}(1-q)^{k-1}q = \frac{q(1-p)\{1-(1-p)^n(1-q)^n\}}{1-(1-p)(1-q)}$$

A 君の勝つ確率が B 君の勝つ確率よりも大きくなるのは，上式および (1) の結果から

$$p > q(1-p)$$

このとき，$p+q \leqq 1$ に注意して　　$\dfrac{q}{1+q} < p \leqq 1-q$

p，q は $\dfrac{j}{6}$ $(j=1,2,3,4,5)$ であるから

(i) $q=\dfrac{1}{6}$ のとき　$\dfrac{1}{7}<p\leqq\dfrac{5}{6}$　ゆえに　$p=\dfrac{1}{6},\ \dfrac{2}{6},\ \dfrac{3}{6},\ \dfrac{4}{6},\ \dfrac{5}{6}$

(ii) $q=\dfrac{2}{6}$ のとき　$\dfrac{1}{4}<p\leqq\dfrac{4}{6}$　ゆえに　$p=\dfrac{2}{6},\ \dfrac{3}{6},\ \dfrac{4}{6}$

(iii) $q=\dfrac{3}{6}$ のとき　$\dfrac{1}{3}<p\leqq\dfrac{3}{6}$　ゆえに　$p=\dfrac{3}{6}$

(iv) $q=\dfrac{4}{6}$ のとき　$\dfrac{2}{5}<p\leqq\dfrac{2}{6}$　ゆえに　p は存在しない

(v) $q=\dfrac{5}{6}$ のとき　$\dfrac{5}{11}<p\leqq\dfrac{1}{6}$　ゆえに　p は存在しない

よって，求める $(X,\ Y)$ の組の総数は

$$ {}_6\mathrm{C}_1\sum_{k=1}^{5}{}_5\mathrm{C}_k + {}_6\mathrm{C}_2\sum_{k=2}^{4}{}_4\mathrm{C}_k + {}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_3$$
$$=6(2^5-1)+15(2^4-1-4)+20\times1=\mathbf{371}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 1,-2)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=3,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=9,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-3$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\{k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\\&=k|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=k\cdot3+(1-k)\cdot(-3)=6k-3\\\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\{k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\\&=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-k)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=k\cdot(-3)+(1-k)\cdot9=-12k+9\end{aligned}$$

Q は D 上の点より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\geqq0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\geqq0$ であるから

$$\begin{cases}6k-3\geqq0\\-12k+9\geqq0\end{cases}\qquad \text{ゆえに}\qquad \boldsymbol{\frac{1}{2}\leqq k\leqq\frac{3}{4}}$$

(2) D 内の点 P について，s，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots①$$

とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=s\cdot3+t\cdot(-3)=3(s-t)\\\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=s\cdot(-3)+t\cdot9=3(-s+3t)\end{aligned}$$

与えられた条件により，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq0$ であるから

$$s-t=\alpha,\quad -s+3t=\beta$$

とおくと，$\alpha\geqq0$，$\beta\geqq0$．また上の 2 式から

$$s=\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta,\quad t=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\quad\cdots②$$

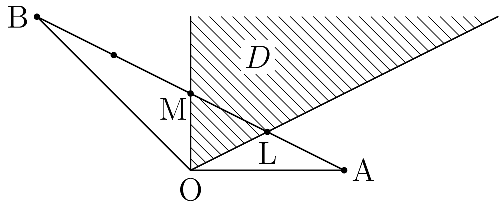
② を ① に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \left(\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{1}{2}\alpha(3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) + \frac{1}{2}\beta(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\ &= 2\alpha \times \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4} + \beta \times \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\end{aligned}$$

線分 AB を $1:3$ に内分する点を L，中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2\alpha\overrightarrow{\mathrm{OL}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OM}} \quad (\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0)$$

ゆえに，P の表す領域 D は，次の図の斜線部分で，境界線を含む．



$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4} = \frac{1}{4}(-1,\ 4,\ 1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2} = \frac{1}{2}(1,\ 2, -1)$$

$\overrightarrow{\ell} = (-1,\ 4,\ 1)$，$\overrightarrow{m} = (1,\ 2, -1)$ とおくと

$$|\overrightarrow{\ell}| = \sqrt{18},\quad |\overrightarrow{m}| = \sqrt{6} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\ell}| : |\overrightarrow{m}| = \sqrt{3} : 1$$

ここで，D 上の点 H を

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\ell} + \sqrt{3}\overrightarrow{m} = (-1 + \sqrt{3},\ 4 + 2\sqrt{3},\ 1 - \sqrt{3})$$

とすると，H は $\angle\mathrm{LOM}$ の二等分線上にある．また

$$|\overrightarrow{m}|^2\overrightarrow{\ell} - (\overrightarrow{\ell}\cdot\overrightarrow{m})\overrightarrow{m} = 6(-1,\ 4,\ 1) - 6(1,\ 2, -1) = 12(-1,\ 1,\ 1)$$

は平面 OLM に平行で，$\overrightarrow{m}$ に垂直．これと平行な単位ベクトルの 1 つを

$$\overrightarrow{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,\ 1,\ 1)$$

とおく．

H から直線 OM に下ろした垂線の長さは

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{e}\,| = 2\sqrt{3}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ が最小となる点 C の位置ベクトルは，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ の向きが同じであることに注意して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\sqrt{3},\ 4+2\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3}) \\ &= \left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},\ 2\sqrt{2}+\sqrt{6},\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)\end{aligned}$$

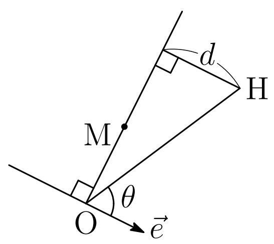
よって，求める C の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},\ 2\sqrt{2}+\sqrt{6},\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)}$$

注意 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{m}$ に気付けば，$\overrightarrow{e}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と平行な単位ベクトルに定めればよい．

補足

平面 HOM 上のベクトルで，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{e}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とすると，H から直線 OM に下ろした垂線の長さ d は

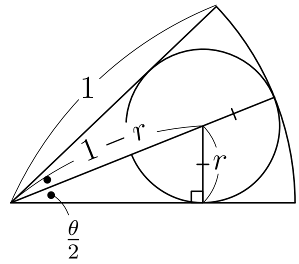


$$d = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}||\cos\theta|$$

また　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{e} = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}||\vec{e}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\cos\theta$

上の 2 式より　$d = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{e}|$

3 (1) $r = f(\theta)$ とおくと，右の図から



$$(1-r)\sin\frac{\theta}{2} = r \quad \cdots ①$$

ゆえに $\qquad r = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$

よって $\qquad \boldsymbol{f(\theta) = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}}$

(2) $0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\qquad \sin\dfrac{\theta}{2} > 0$，$\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$

また，$r > 0$ であるから，① より $\quad 1 - r > 0$

① の両辺を θ で微分すると

$$-r'\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}(1-r)\cos\frac{\theta}{2} = r'$$

ゆえに $\qquad \left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)r' = \dfrac{1}{2}(1-r)\cos\dfrac{\theta}{2} \quad \cdots ②$

② において，$1+\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$，$1-r > 0$，$\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$ であるから $\quad r' > 0$

さらに，② の両辺を θ で微分すると

$$\frac{1}{2}r'\cos\frac{\theta}{2} + \left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)r'' = -\frac{1}{2}r'\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}(1-r)\sin\frac{\theta}{2}$$

ゆえに $\qquad \left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)r'' = -\left\{r'\cos\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{1}{4}(1-r)\sin\dfrac{\theta}{2}\right\}$

上式において $r' > 0$，$1-r > 0$，$\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$，$\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$ であるから $\quad r'' < 0$

したがって $\qquad 0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ において $\qquad r' > 0$，$r'' < 0$

よって $\qquad 0 < \theta < \pi$ の範囲で，$f(\theta)$ は単調増加，$f'(\theta)$ は単調減少．

補足 $f'(\theta) = \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2} > 0$，$f''(\theta) = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2} - 2}{4\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2} < 0$

(3) $x = \dfrac{\theta}{2}$ とおくと $\dfrac{d\theta}{dx} = 2$

θ	$\frac{\pi}{3} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
x	$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x+\sin x-1}{\cos^2 x}\,dx \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx \\
&= 2\Big[\,x+\frac{1}{\cos x}-\tan x\,\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{6}-2+2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，条件により

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+|x|=2 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{(x-1)^2+y^2}=2-|x| \quad \cdots ①$$

① の両辺を平方して整理すると

$$y^2=2x-4|x|+3$$

上の方程式で x のとりうる値の範囲は

$$2x-4|x|+3 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 4|x| \leqq 2x+3$$

ゆえに $\quad -(2x+3) \leqq 4x \leqq 2x+3$

① の $2-|x| \geqq 0$ に注意して $\quad -\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$

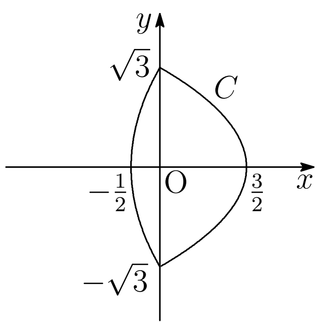
したがって $\quad C: y^2=2x-4|x|+3$

C は $\quad x \geqq 0$ のとき $\quad y^2=-2x+3$ すなわち $\quad x=-\dfrac{1}{2}(y^2-3)$,

$x<0$ のとき $\quad y^2=6x+3$ すなわち $\quad x=\dfrac{1}{6}(y^2-3)$

C の表す図形は右の図の曲線 (閉曲線) で，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left\{-\frac{1}{2}(y^2-3)-\frac{1}{6}(y^2-3)\right\} dy \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{3}} (3-y^2)\, dy \\ &= \frac{4}{3}\left[\ 3y-\frac{y^3}{3}\ \right]_0^{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{8}{3}\sqrt{3}} \end{aligned}$$



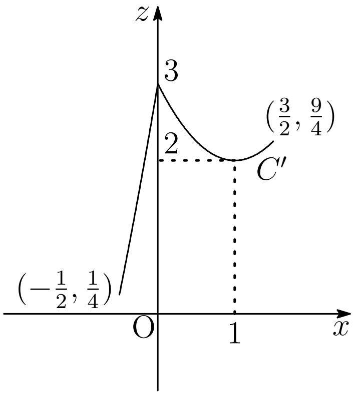
(2) 円 $x^2+y^2=a$ と $C: y^2=2x-4|x|+3$ の交点は $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ の範囲にあり，2 式から y^2 を消去すると

$$x^2+2x-4|x|+3=a \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\right) \quad \cdots(*)$$

方程式 $(*)$ の実数解は，xz 平面上の曲線

$$C': z=x^2+2x-4|x|+3 \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\right)$$

と直線 $z=a$ の交点の x 座標である．



C' は　$-\frac{1}{2} \leqq x < 0$ のとき　$z=(x+3)^2-6$

$0 \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ のとき　$z=(x-1)^2+2$

円と C はともに x 軸に関して対称であるから，方程式 $(*)$ の実数解について，$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ にある解 1 個に対して交点は 2 個あり，$x=-\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$ に対して交点は 1 個である．よって，求める交点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < a < \frac{1}{4}} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{a = \frac{1}{4}} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{\frac{1}{4} < a < 2} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{a = 2} \text{ のとき} & \textbf{4 個} \\ \boldsymbol{2 < a < \frac{9}{4}} \text{ のとき} & \textbf{6 個} \\ \boldsymbol{a = \frac{9}{4}} \text{ のとき} & \textbf{5 個} \\ \boldsymbol{\frac{9}{4} < a < 3} \text{ のとき} & \textbf{4 個} \\ \boldsymbol{a = 3} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{3 < a} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \end{cases}$$