平成 24 年度　熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
医学部医学科　平成 24 年 2 月 25 日

1 $n \geqq 4$ とする。$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 からなる数列 a_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) このような数列 $\{a_k\}$ は何通りあるか求めよ。

(2) 数列 $\{a_k\}$ の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1 a_2 \cdots a_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ とおく。$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。

(3) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ の最大値および最小値を与える数列 $\{a_k\}$ はそれぞれ何通りあるか求めよ。

2 実数 c に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換を T とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) xy 平面上の同一直線上にない 3 点 P，Q，R が T によってそれぞれ P′，Q′，R′ に移るとする。三角形 P′Q′R′ の面積が三角形 PQR の面積の k 倍 $(k \geqq 1)$ となる c の値を求めよ。

(2) 楕円

$$E : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

上の点が T によって楕円 E' 上の点に移るとする。楕円 E' 上のすべての点が楕円 E の周上または外部にあるための，c の条件を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 正の定数 a に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin t - ax \cos t \right| dt$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 一辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M，辺 BC を $1:2$ に内分する点を N，辺 OC の中点を L とする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 L，M，N を通る平面と直線 OA の交点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 辺 OB の中点 K から直線 DN 上の点 P へ垂線 KP を引く。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 を並べる順列の総数であるから

$$\frac{n!}{(n-4)!4!} = \boldsymbol{\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)} \quad (\text{通り})$$

(2) $b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大となるのは，$\{a_n\}$ において -1 が連続して偶数回並ぶ場合であり，このとき，数列 $\{b_n\}$ は $n-2$ 個の 1 と 2 個の -1 からなる．したがって，求める最大値は

$$(n-2)\cdot 1 + 2\cdot(-1) = \boldsymbol{n-4}$$

$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最小となるのは，$\{a_n\}$ において $a_1=a_n=-1$ であり，残りの 2 つの -1 が連続して並ぶ場合であり，このとき，数列 $\{b_n\}$ は $n-2$ 個の -1 と 2 個の 1 からなる．したがって，求める最小値は

$$(n-2)\cdot(-1) + 2\cdot 1 = \boldsymbol{-n+4}$$

(3) $b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大となるのは，$\{a_n\}$ において -1 が連続して偶数回並ぶ場合であるから，連続する 2 つの -1 をひとまとめにしたものを c とする．このとき，$n-4$ 個の 1 と 2 個の c を並べる順列の総数であるから

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)!2!} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(n-2)(n-3)} \quad (\text{通り})$$

$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最小となるのは，$\{a_n\}$ において $a_1=a_n=-1$ であり，2 つの -1 が連続して並ぶ場合であるから，連続する 2 つの -1 をひとまとめにしたものを d とする．このとき，$n-4$ 個の 1 と 1 個の d を並べる順列の総数であるから

$$\frac{(n-3)!}{(n-4)!1!} = \boldsymbol{n-3} \quad (\text{通り})$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 3点P，Q，Rの原点Oに関する位置ベクトルをそれぞれ$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$とし，また3点P$'$，Q$'$，R$'$の原点Oに関する位置ベクトルをそれぞれ$\vec{p'}$，$\vec{q'}$，$\vec{r'}$とする．△PQRの面積Sは，$\vec{u}=\vec{q}-\vec{p}$，$\vec{v}=\vec{r}-\vec{p}$とおくと

$$S=\frac{1}{2}\left|\det(\vec{u}\ \vec{v})\right|$$

$\vec{p'}=A\vec{p}$，$\vec{q'}=A\vec{q}$，$\vec{r'}=A\vec{r}$であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}=\vec{q'}-\vec{p'}=A\vec{q}-A\vec{p}=A(\vec{q}-\vec{p})=A\vec{u}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{P'R'}}=\vec{r'}-\vec{p'}=A\vec{r}-A\vec{p}=A(\vec{r}-\vec{p})=A\vec{v}$$

△P$'$Q$'$R$'$の面積S'は

$$\begin{aligned}S'&=\frac{1}{2}\left|\det(A\vec{u}\ A\vec{v})\right|=\frac{1}{2}\left|\det(A(\vec{u}\ \vec{v}))\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\det A\det(\vec{u}\ \vec{v})\right|=\frac{1}{2}\left|\det A\right|\left|\det(\vec{u}\ \vec{v})\right|\end{aligned}$$

したがって　　$S'=|\det A|S$

条件により，$k=|\det A|$であるから

$$k=|1+c^2|\quad ゆえに\quad c^2=k-1$$

$k\geqq 1$に注意して　　$\boldsymbol{c=\pm\sqrt{k-1}}$

補足

正方行列A，Bについて，$\mathbf{det}(\boldsymbol{AB})=\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}\,\mathbf{det}\,\boldsymbol{B}$が成り立つ.

(2) E 上の点 $(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ の T による像は $(0 \leqq \theta < 2\pi)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta - c\sin\theta \\ 2c\cos\theta + \sin\theta \end{pmatrix}$$

これが楕円 E の周上または外部にあるから

$$\frac{(2\cos\theta - c\sin\theta)^2}{4} + (2c\cos\theta + \sin\theta)^2 \geqq 1$$

整理すると　$\dfrac{c^2}{4}\sin^2\theta + 3c\sin\theta\cos\theta + 4c^2\cos^2\theta \geqq 0$

ゆえに　　$12c\sin 2\theta + 15c^2\cos 2\theta + 17c^2 \geqq 0$

$c = 0$ はこの不等式を満たす．$c \neq 0$ のとき，上式より

$$\frac{4}{c}\sin 2\theta + 5\cos 2\theta + \frac{17}{3} \geqq 0 \quad \cdots (*)$$

ここで　　$\dfrac{4}{c}\sin 2\theta + 5\cos 2\theta \geqq -\sqrt{\left(\dfrac{4}{c}\right)^2 + 5^2}$

したがって，$(*)$ が常に成立するには，次式を満たせばよい．

$$-\sqrt{\left(\frac{4}{c}\right)^2 + 5^2} + \frac{17}{3} \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{\left(\frac{4}{c}\right)^2 + 5^2} \leqq \frac{17}{3}$$

両辺を平方して整理すると

$$\frac{16}{c^2} \leqq \left(\frac{17}{3} + 5\right)\left(\frac{17}{3} - 5\right) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{c^2} \leqq \frac{4}{9}$$

したがって　　$c^2 \geqq \dfrac{9}{4}$　これを解いて　$c \leqq -\dfrac{3}{2},\ \ \dfrac{3}{2} \leqq c$

よって，求める c の値の範囲は　$\boldsymbol{c \leqq -\dfrac{3}{2},\ \ c = 0,\ \ \dfrac{3}{2} \leqq c}$

別解

E 上の点 $(x,\ y)$ の T による像は

$$\begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-cy \\ cx+y \end{pmatrix}$$

これが楕円 E の周上または外部にあるから

$$\frac{(x-cy)^2}{4} + (cx+y)^2 \geqq 1$$

$\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ により　　$4c^2x^2 + 6cxy + c^2y^2 \geqq 0$　　$\cdots(*)$

また　　$4c^2x^2 + 6cxy + c^2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4c^2 & 3c \\ 3c & c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

まず，$c=0$ は $(*)$ を満たす．

次に，$c \neq 0$ のとき，対称行列 $A = \begin{pmatrix} 4c^2 & 3c \\ 3c & c^2 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1，λ_2 とし，それぞれの単位固有ベクトルを $\vec{u}_1$，$\vec{u}_2$ とする $(\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2)$．このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad すなわち \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{u}_1 \\ {}^t\vec{u}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと (計算の詳細は，九大 2010 年一般前期理系数学 $\boxed{\mathbf{5}}$ の解説を参照[1])

$$4c^2x^2 + 6cxy + c^2y^2 = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \qquad \cdots(**)$$

E 上の点 P，Q を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\vec{u}_1$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \beta\vec{u}_2$ とすると $(\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{u}_1 \\ {}^t\vec{u}_2 \end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{u}_1 \\ {}^t\vec{u}_2 \end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

$(**)$ は P，Q それぞれについて $\lambda_1\alpha^2$，$\lambda_2\beta^2$ であるから，$(*)$ より

$$\lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0 \quad すなわち \quad \lambda_1 + \lambda_2 \geqq 0,\ \ \lambda_1\lambda_2 \geqq 0$$

ここで，対角和 $\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2$，行列式 $\det A = \lambda_1\lambda_2$ であるから

$$4c^2 + c^2 \geqq 0,\ \ 4c^2 \cdot c^2 - 3c \cdot 3c \geqq 0$$

以上の結果から　　$\boldsymbol{c \leqq -\dfrac{3}{2},\ \ c = 0,\ \ \dfrac{3}{2} \leqq c}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2010.pdf

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) x の値に対して，次式を満たす θ $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ をとる．

$$\sin\theta = \frac{ax}{\sqrt{1+a^2x^2}}$$

このとき，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2x^2}}$ であるから

$$\sin t - ax\cos t = \sqrt{1+a^2x^2}\sin(t-\theta)$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin t - ax\cos t\right| dt \\ &= \sqrt{1+a^2x^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin(t-\theta)\right| dt \end{aligned}$$

i) $x \geqq 0$ のとき，$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+a^2x^2}\left\{\int_0^{\theta}\{-\sin(t-\theta)\}\,dt + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\sin(t-\theta)\,dt\right\} \\ &= \sqrt{1+a^2x^2}\left\{\Big[\ \cos(t-\theta)\ \Big]_0^{\theta} + \Big[\ -\cos(t-\theta)\ \Big]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\right\} \\ &= \sqrt{1+a^2x^2}(2-\sin\theta-\cos\theta) \\ &= 2\sqrt{1+a^2x^2} - ax - 1 \end{aligned}$$

ii) $x < 0$ のとき，$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+a^2x^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t-\theta)\,dt \\ &= \sqrt{1+a^2x^2}\Big[-\cos(t-\theta)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{1+a^2x^2}\,(-\sin\theta+\cos\theta) \\ &= -ax+1 \end{aligned}$$

i)，ii) より $\quad \boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{1+a^2x^2} - ax - 1 & (x \geqq 0) \\ -ax+1 & (x < 0) \end{cases}}$

(2) $x<0$ で $f(x)$ は単調減少．
$x \geqq 0$ のとき

$$f'(x) = \frac{2a^2x}{\sqrt{1+a^2x^2}} - a = \frac{a(2ax - \sqrt{1+a^2x^2})}{\sqrt{1+a^2x^2}}$$
$$= \frac{a(3a^2x^2-1)}{\sqrt{1+a^2x^2}(2ax+\sqrt{1+a^2x^2})}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$	極小 $\sqrt{3}-1$	$\nearrow$

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{\sqrt{3}a}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\sqrt{3}-1}$ をとる．

別解

$x<0$ において，$f(x)$ は単調減少であるから，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の最小値を調べればよい．(1) により

$$\sqrt{1+a^2x^2} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad ax = \tan\theta$$

ここで，$g(\theta) = f(x)$ とおくと

$$g(\theta) = \frac{2}{\cos\theta} - \tan\theta - 1 \quad \left(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$
$$g'(\theta) = \frac{2\sin\theta - 1}{\cos^2\theta}$$

したがって，$g(\theta)$ の増減表は，次のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$g(\theta)$	1	$\searrow$	極小 $\sqrt{3}-1$	$\nearrow$	

また，$ax = \tan\theta$ により，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}a}$

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{\sqrt{3}a}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\sqrt{3}-1}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 与えられた条件により　$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$,　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$

3 点 L，M，N を通る平面上の位置ベクトルは，実数 s，t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OL}}+s\overrightarrow{\mathrm{LM}}+t\overrightarrow{\mathrm{LN}}&=\frac{1}{2}\vec{c}+s\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)+t\left(\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)\\&=\frac{s}{2}\vec{a}+\left(\frac{s}{2}+\frac{2}{3}t\right)\vec{b}+\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{6}\right)\vec{c}\end{aligned}$$

この平面と直線 OA の交点 D の位置ベクトルは

$$\frac{s}{2}+\frac{2}{3}t=0,\quad \frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{6}=0 \quad ゆえに \quad s=\frac{4}{3},\quad t=-1$$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}}$

(2) 与えられた条件により　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1$

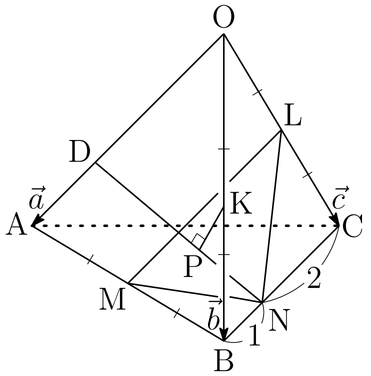
$\overrightarrow{\mathrm{DK}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}-\dfrac{2}{3}\vec{a}$ であるから

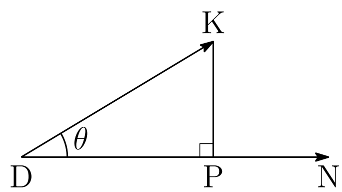
$$\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2+\frac{1}{3}|\vec{b}|^2-\frac{7}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{2}{9}\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{13}{18}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|^2=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2+\frac{1}{9}|\vec{c}|^2-\frac{8}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{4}{9}\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{10}{9}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}})}{|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\frac{13}{20}\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}\right)$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\boldsymbol{\dfrac{7}{30}\vec{a}+\dfrac{13}{30}\vec{b}+\dfrac{13}{60}\vec{c}}$





補足

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DK}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DN}}$ のなす角を θ とすると　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DK}}||\overrightarrow{\mathrm{DN}}|}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=|\overrightarrow{\mathrm{DK}}|\cos\theta\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DN}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}})}{|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{DN}}$