平成23年度　熊本大学2次試験前期日程 (数学問題)120分
医学部医学科　平成23年2月25日

$\boxed{1}$ x，y を整数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $x^5 - x$ は30の倍数であることを示せ。

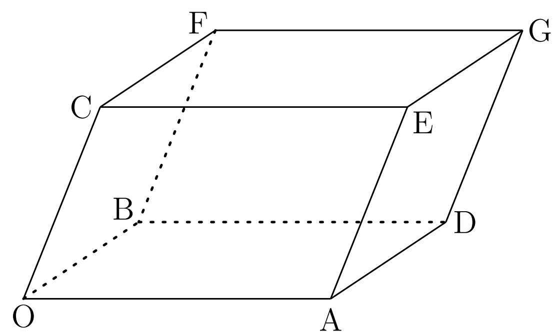
(2) $x^5y - xy^5$ は30の倍数であることを示せ。

$\boxed{2}$ 平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を 2 : 3 に内分する点を N，辺 DG を 1 : 2 に内分する点を L とする。また，辺 OC を $k : 1 - k$ $(0 < k < 1)$ に内分する点を K とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3点 M，N，K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ。

(3) 3点 M，N，K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。



$\boxed{\mathbf{3}}$ 楕円 $C : x^2 + 4y^2 = 4$ と点 $\mathrm{P}(2,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 $y = x + b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(2) (1) における 2 つの交点を A，B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0, -1)$，$\mathrm{R}(t,\ t^2 - t + 1,\ 0)$ を考える。t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2) K の体積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)

$$\begin{aligned} x^5 - x &= x(x^2+1)(x^2-1) \\ &= x\{(x^2-4)+5\}(x^2-1) \\ &= (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2) + 5(x-1)x(x+1) \end{aligned}$$

$(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$ は連続する 5 整数の積で 5! の倍数であり，$5(x-1)x(x+1)$ は $5\cdot3!$ の倍数であるから，x^5-x は 30 の倍数である．

別解　2 項定理により

$$(a+b)^5 - a^5 - b^5 = \sum_{j=1}^{4} {}_5\mathrm{C}_j a^{5-j} b^j$$

${}_5\mathrm{C}_j$ $(1 \leqq j \leqq 4)$ は 5 の倍数であるから，a，b が整数であるとき，上式は 5 の倍数である．k が整数のとき，$a=k-1$，$b=1$ とし，数列 $\{a_k\}$ を

$$a_k = k^5 - (k-1)^5 - 1$$

とおく．この数列の初項から第 n 項までの和を求めると

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^5 - n$$

a_k は 5 の倍数であるから，自然数 n について，n^5-n は 5 の倍数である．
また，負の整数 m について，$m=-n$ とすると

$$m^5 - m = (-n)^5 - (-n) = -(n^5-n)$$

したがって，上式は 5 の倍数である．
$x=0$ のとき，x^5-x が 5 の倍数であることは明らか．以上のことから，x が整数であるとき，x^5-x は 5 の倍数である．次に

$$x^5 - x = (x-1)x(x+1)(x^2+1)$$

であるから，上式は連続する 3 数の積を因数にもち，2×3 の倍数である．
よって，x^5-x は $2\times3\times5$，すなわち，30 の倍数である．

(2)

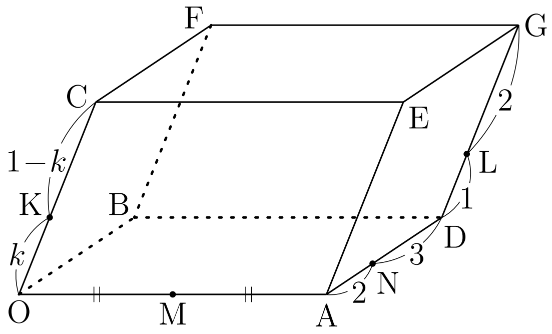
$$x^5y - xy^5 = y(x^5-x) - x(y^5-y)$$

(1) の結果により x，y が整数のとき，x^5-x，y^5-y は 30 の倍数であるから，上式は，30 の倍数である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AN}}$
$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{ML}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DL}}$
$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{MK}} = \overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{OK}}$
$= \boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}}$



(2) 3 点 M，N，K を通る平面を α とする．α 上の点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は，(1) の結果から，実数 s，t を用いて

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} + s\overrightarrow{\mathrm{MN}} + t\overrightarrow{\mathrm{MK}} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) + t\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1+s-t)\vec{a} + \frac{2}{5}s\vec{b} + tk\vec{c} \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

点 L の位置ベクトルは，$\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ であるから，L が α 上の点であるとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$\frac{1}{2}(1+s-t) = 1, \quad \frac{2}{5}s = 1, \quad tk = \frac{1}{3}$$

これを解いて　　$s = \frac{5}{2}$，$t = \frac{3}{2}$，$\boldsymbol{k = \frac{2}{9}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{FG}} = \vec{a}$ より，辺 GF 上の点の位置ベクトルは実数 x を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} + x\overrightarrow{\mathrm{FG}} = x\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

α と辺 GF が交点をもつとき，上式および $(*)$ から

$$\frac{1}{2}(1+s-t) = x, \quad \frac{2}{5}s = 1, \quad tk = 1$$

第 1 式および第 2 式から　　$t = \frac{7}{2} - 2x$

$0 \leqq x \leqq 1$ であるから　　$\frac{3}{2} \leqq t \leqq \frac{7}{2}$

$0 < k < 1$ に注意しながら，これと第 3 式により　$\boldsymbol{\frac{2}{7} \leqq k \leqq \frac{2}{3}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x^2+4y^2=4\cdots$①，$y=x+b\cdots$② とおく．

①，② から y を消去して整理すると

$$5x^2+8bx+4(b^2-1)=0 \quad \cdots ③$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D/4=(4b)^2-5\cdot 4(b^2-1)=4(5-b^2)$$

①，② が異なる 2 つの交点をもつとき，$D>0$ であるから

$5-b^2>0$　これを解いて　$\boldsymbol{-\sqrt{5}<b<\sqrt{5}}$

(2) 2 つの交点 A，B の x 座標を，それぞれ α，β とすると，$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha+b)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta+b)$ であるから，三角形 PAB の面積を S とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(\alpha-2,\ \alpha+b),\quad \overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\beta-2,\ \beta+b)$$

ゆえに　$S=\dfrac{1}{2}|\,(\alpha-2)(\beta+b)-(\beta-2)(\alpha+b)\,|=\dfrac{1}{2}|\,(b+2)(\alpha-\beta)\,|$

③ の解は $x=\dfrac{-4b\pm 2\sqrt{5-b^2}}{5}$ であるから　$|\alpha-\beta|=\dfrac{4}{5}\sqrt{5-b^2}$

したがって　$S=\dfrac{2}{5}|b+2|\sqrt{5-b^2}=\dfrac{2}{5}\sqrt{(b+2)^2(5-b^2)}$

ここで，$f(b)=(b+2)^2(5-b^2)$ $(-\sqrt{5}<b<\sqrt{5})$ とおくと，S を最大にする b の値は，$f(b)$ を最大にする b の値であるから

$$f'(b)=-2(b+2)(2b^2+2b-5)$$

$-\sqrt{5}<b<\sqrt{5}$ に注意して，$f'(b)=0$ を解くと　$b=-2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{11}}{2}$

$f(b)$ の増減表は，次のようになる．

b	$-\sqrt{5}$	$\cdots$	$\frac{-1-\sqrt{11}}{2}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{5}$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(b)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$f(b)=(2b^2+2b-5)(-\frac{1}{2}b^2-\frac{3}{2}b+\frac{3}{4})+11b+\frac{95}{4}$ であるから

$$f\left(\tfrac{-1-\sqrt{11}}{2}\right)<f\left(\tfrac{-1+\sqrt{11}}{2}\right)$$

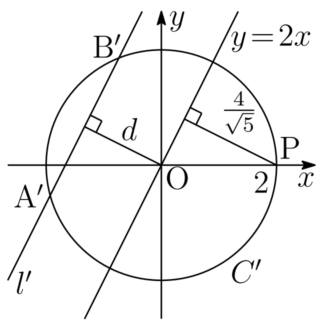
よって，求める b の値は　$\boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}}$

別解　(1) $C : x^2+4y^2=4$ および直線 $l : y=x+b$ を x 軸を元に y 軸方向に 2 倍に拡大した図形を，それぞれ，$C' : x^2+y^2=4$，$l' : y=2x+2b$ とする．C と l が異なる 2 つの交点をもつとき，C' と l' は異なる 2 つの交点をもつから

$$\frac{|2b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}<2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-\sqrt{5}<b<\sqrt{5}}$$

(2) C' と l' の交点を $\mathrm{A'}$，$\mathrm{B'}$ とし，$\triangle\mathrm{PAB}$，$\triangle\mathrm{PA'B'}$ の面積を，それぞれ，S，S' とすると，$S'=2S$ が成り立つ．S' が最大となるとき，S は最大となるから，S' を最大にする b の値を求めればよい．

原点 O から l' までの距離を d とすると



$$d=\frac{|2b|}{\sqrt{5}}$$

$$\mathrm{A'B'}=2\sqrt{2^2-d^2}=\frac{4\sqrt{5-b^2}}{\sqrt{5}}$$

S' を最大する b は，右の図から

$$0<b<\sqrt{5}$$

の範囲で調べればよい．P から l' に引いた垂線の長さを h とすると

$$h=\frac{2b}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{2b+4}{\sqrt{5}}$$

$$S'=\frac{1}{2}\mathrm{A'B'}\cdot h=\frac{4}{5}(b+2)\sqrt{5-b^2}$$

$$S=\frac{1}{2}S'=\frac{2}{5}(b+2)\sqrt{5-b^2}=\frac{2}{5}\sqrt{(b+2)^2(5-b^2)}$$

したがって，関数

$$f(b)=(b+2)^2(5-b^2) \quad (0<b<\sqrt{5})$$

を最大にする b の値を求めればよい．

$$f'(b)=-2(b+2)(2b^2+2b-5)$$

$0<b<\sqrt{5}$ に注意して $f'(b)=0$ を解くと　$b=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}$

$f(b)$ の増減は，右のようになる．よって，求める b の値は

$$\boldsymbol{b=\frac{-1+\sqrt{11}}{2}}$$

b	(0)	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$	$\cdots$	$(\sqrt{5})$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$		↗	極大	↘	

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) R は，xy 平面上の放物線 $y = x^2 - x + 1$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上を動く．

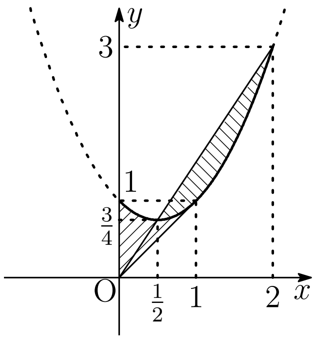
放物線と原点を通る直線 $y = kx$ が接するときの k の値は，2 式から y を消去して

$$x^2 - x + 1 = kx \quad \text{すなわち} \quad x^2 - (k+1)x + 1 = 0$$

この方程式の判別式および重解について，$D = 0$，$x = \dfrac{k+1}{2}$ であるから

$$(k+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0, \quad 0 \leqq \frac{k+1}{2} \leqq 2$$

したがって　　$k = 1$



よって，原点を通る直線 $y = x$ は，点 $(1,\ 1)$ で接する．原点と点 $(2,\ 3)$ を通る直線 $y = \frac{3}{2}x$ は，放物線との交点 $(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4})$ をもつから，求める面積を S とすると，右の図から

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(x^2 - x + 1) - x\}dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left\{\frac{3}{2}x - (x^2 - x + 1)\right\} dx \\ &= \int_0^1 (x-1)^2\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx = \mathbf{\frac{43}{48}} \end{aligned}$$

別解　($r = \mathrm{OR}$ とする極座標による求積法)

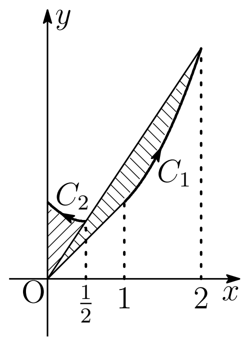
$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2(1 + \tan^2\theta) = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{x^2 - x + 1}{x} \text{ を } x \text{ で微分して} \quad \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

上の 2 式から　　$r^2\,d\theta = (x^2 - 1)\,dx$

右の図から，求める面積 S は

(注意：積分区間は，回転角の向きにとる)



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_{C_1} r^2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{C_2} r^2\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 (x^2 - 1)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^0 (x^2 - 1)\,dx = \mathbf{\frac{43}{48}} \end{aligned}$$

(2) K は xy 平面に関して対称であるから，求める体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}S \cdot \mathrm{OP} \times 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{43}{48} \cdot 1 \times 2 = \mathbf{\frac{43}{72}}$$