平成22年度　熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
医学部医学科　平成22年2月25日

1 原点をOとし，空間内に3点A(4, 0, 0)，B(1, 2, 0)，C(2, 1, 2)をとる。

線分BCを$t:(1-t)$ $(0<t<1)$に内分する点をPとおく．このとき，以下の問いに答えよ。

(1) △OAPの面積を最小にするtの値を求めよ。

(2) Cを通り，3点O，A，Pを通る平面に垂直な直線とxy平面との交点をDとする。Dが△OABの内部にあるとき，tの範囲を求めよ。

2 赤球4個と白球6個の入った袋から2個の球を同時に取り出し，その中に赤球が含まれていたら，その個数だけさらに袋から球を取り出す。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 取り出した赤球の総数が2である確率を求めよ。

(2) 取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ。

3 関数$f(x)=\displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{8}\right)$について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$の導関数$f'(x)$を求めよ。

(2) $f(0)$の値を求めよ。

(3) 条件$a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$によって定まる数列$\{a_n\}$の一般項a_nを求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

(1) pを0でない定数とする。関数$f(x)=ae^{-x}\sin px+be^{-x}\cos px$について，$f'(x)=e^{-x}\sin px$となるように，定数$a$，$b$を定めよ。

(2) $S(t)=\displaystyle\int_0^{t^2}e^{-x}\sin\frac{x}{t}\,dx$ $(t\neq 0)$とおく。このとき，$S(t)$を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3}$の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) P は BC を $t:(1-t)$ に内分する点であるから $(0<t<1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)(1,\ 2,\ 0)+t(2,\ 1,\ 2)$

$$=(1+t,\ 2-t,\ 2t)$$

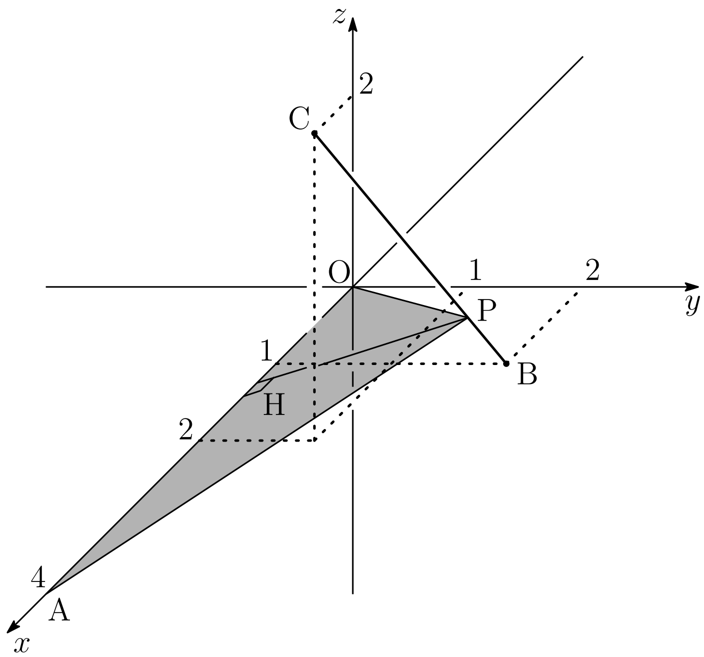
OA 上に $\mathrm{H}(1+t,\ 0,\ 0)$ をとると $\overrightarrow{\mathrm{HP}}=(0,\ 2-t,\ 2t)$

このとき $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ ゆえに $\triangle\mathrm{OAP}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{HP}$

したがって，HP が最小のとき，△OAP は最小となる．

$$\mathrm{HP}^2=(2-t)^2+(2t)^2=5t^2-4t+4$$
$$=5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{16}{5}$$

よって，求める t の値は，$0<t<1$ に注意して $\boldsymbol{t=\dfrac{2}{5}}$



補足

一般に，2 直線 ℓ_1，ℓ_2 がねじれの位置にあり，ℓ_1 上の点 P と ℓ_2 上の点 Q を結ぶ線分 PQ が最小となるとき，$\mathrm{PQ}\perp\ell_1$，$\mathrm{PQ}\perp\ell_2$ である．
ここでは，2 直線 OA，BC がねじれの位置にあり，このとき $\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ を解いて t の値を求めることができる．

(2) D は xy 平面上の点であるから，その座標を $(a,\ b,\ 0)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (a,\ b,\ 0) - (2,\ 1,\ 2) = (a-2,\ b-1, -2)$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ より　$4(a-2) + 0(b-1) + 0 \cdot (-2) = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ より　$(1+t)(a-2) + (2-t)(b-1) + 2t \cdot (-2) = 0$

$2 - t \neq 0$ であるから上の 2 式より　　$a = 2$，$b = \dfrac{2+3t}{2-t}$

したがって　　$\mathrm{D}\left(2,\ \dfrac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$

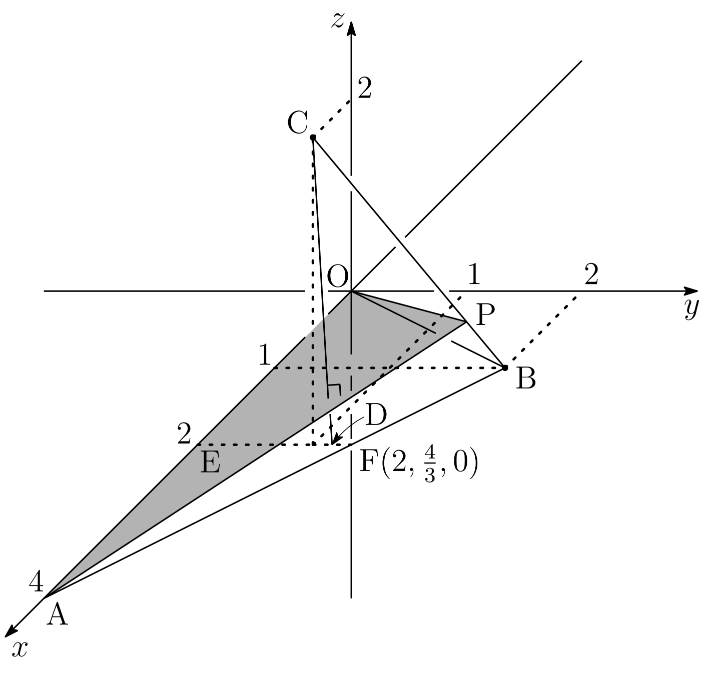
点 E を $(2,\ 0,\ 0)$，AB 上の x 座標が 2 である点を F とすると，3 点 A，F，B の x 座標から F は線分 AB を $2:1$ に内分する点であるから，その座標は

$$\left(\frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{2+1},\ \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 2}{2+1},\ \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 0}{2+1}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(2,\ \frac{4}{3},\ 0\right)$$

D が $\triangle$OAB の内部にあるためには，D は EF 間にあればよいので

$$0 < \frac{2+3t}{2-t} < \frac{4}{3}$$

$0 < t < 1$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{0 < t < \dfrac{2}{13}}$



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 取り出した赤球の総数が 2 であるのは，次［1］,［2］の場合である．

［1］1 回目に赤球 2 個を取り出し，箱の中には赤球 2 個，白球 6 個が残り，2 回目にこの箱から白球 2 個を取り出す場合で，その確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{6}{45}\times\frac{15}{28}=\frac{1}{14}$$

［2］1 回目に赤球，白球をそれぞれ 1 個ずつ取り出し，箱の中には赤球 3 個，白球 5 個が残り，2 回目に赤球 1 個を取り出す場合で，その確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{3}{8}=\frac{4\times 6}{45}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{5}$$

［1］,［2］は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{14}+\frac{1}{5}=\boldsymbol{\frac{19}{70}}$$

(2) 取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえるのは，上の［2］と次の［3］の場合である．

［3］1 回目に赤球を 2 個取り出し，2 回目に取り出した球が 2 個とも赤球，または，赤球と白球が 1 個ずつの場合で，その確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{6}{45}\times\frac{1+2\times 6}{28}=\frac{13}{210}$$

［2］,［3］は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{5}+\frac{13}{210}=\boldsymbol{\frac{11}{42}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}\right)$ を x について微分すると

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\log_4\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}\cdot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)'-\log_4(1+\tan x)\cdot(x)'\\
&=-\log_4\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}-\log_4(1+\tan x)\\
&=-\log_4\left\{1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right\}-\log_4(1+\tan x)\\
&=-\log_4\frac{2}{1+\tan x}-\log_4(1+\tan x)\\
&=-\log_4 2=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(2) $$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}}\log_4(1+\tan t)\,dt=0$$

上式および (1) の結果から

$$f(x)=f\left(\frac{\pi}{8}\right)+\int_{\frac{\pi}{8}}^{x}f'(t)\,dt=0+\int_{\frac{\pi}{8}}^{x}\left(-\frac{1}{2}\right)\,dt=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$$

よって　$f(0)=-\dfrac{1}{2}\left(0-\dfrac{\pi}{8}\right)=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{16}}$

(3) (2) の結果から　$a_1=f(0)=\dfrac{\pi}{16}$，$a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{\pi}{16}$

ゆえに　$a_{n+1}-\dfrac{\pi}{24}=-\dfrac{1}{2}\left(a_n-\dfrac{\pi}{24}\right)$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{\pi}{24}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{\pi}{24}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n-\frac{\pi}{24}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1-\frac{\pi}{24}\right)$$

よって　$a_n=\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi}{48}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{24}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}}$

別解 $f(x)=\displaystyle\int_{x}^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{8}\right)$ より

$$f(x)=\int_{x}^{\frac{\pi}{8}}\log_4(1+\tan t)\,dt+\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\quad\cdots(*)$$

ここで，$t=\dfrac{\pi}{4}-u$ とおくと　$\dfrac{dt}{du}=-1$

t	$\frac{\pi}{8}\longrightarrow\frac{\pi}{4}-x$
u	$\frac{\pi}{8}\longrightarrow x$

$$1+\tan t=1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)=1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}=\frac{2}{1+\tan u}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt&=\int_{\frac{\pi}{8}}^{x}\log_4\frac{2}{1+\tan u}\,(-du)\\&=-\int_{\frac{\pi}{8}}^{x}\log_4\frac{2}{1+\tan t}\,dt\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned}f(x)&=-\int_{\frac{\pi}{8}}^{x}\log_4(1+\tan t)\,dt-\int_{\frac{\pi}{8}}^{x}\log_4\frac{2}{1+\tan t}\,dt\\&=-\int_{\frac{\pi}{8}}^{x}\log_4 2\,dt=-\int_{\frac{\pi}{8}}^{x}\frac{1}{2}\,dt=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=e^{-x}(a\sin px+b\cos px)$ であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(a\sin px+b\cos px)+e^{-x}(ap\cos px-bp\sin px) \\ &= e^{-x}\{-(a+bp)\sin px+(ap-b)\cos px\} \end{aligned}$$

これが $f'(x)=e^{-x}\sin px$ となるので

$$e^{-x}\{-(a+bp)\sin px+(ap-b)\cos px\}=e^{-x}\sin px$$

ゆえに $\quad e^{-x}\{-(a+bp+1)\sin px+(ap-b)\cos px\}=0$

すべての x に対して，上式は成立するので，$x=0,\ \dfrac{\pi}{2p}$ を代入すると

$$ap-b=0,\quad a+bp+1=0$$

よって $\quad \boldsymbol{a=-\dfrac{1}{1+p^2},\ \ b=-\dfrac{p}{1+p^2}}$

別解 $e^{-x}\sin px$，$e^{-x}\cos px$ を微分すると

$$\begin{aligned} (e^{-x}\sin px)' &= -e^{-x}\sin px+e^{-x}\cdot p\cos px \\ &= -e^{-x}\sin px+pe^{-x}\cos px \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e^{-x}\cos px)' &= -e^{-x}\cos px+e^{-x}(-p\sin px) \\ &= -pe^{-x}\sin px-e^{-x}\cos px \end{aligned}$$

上の 2 式から

$$\begin{pmatrix} (e^{-x}\sin px)' \\ (e^{-x}\cos px)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & p \\ -p & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-x}\sin px \\ e^{-x}\cos px \end{pmatrix}$$

2 次の正方行列 $\begin{pmatrix} -1 & p \\ -p & -1 \end{pmatrix}$ は正則であるから，$\begin{pmatrix} -1 & p \\ -p & -1 \end{pmatrix}^{-1}$ を上式の両辺に左からかけると

$$\frac{1}{1+p^2}\begin{pmatrix} -1 & -p \\ p & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (e^{-x}\sin px)' \\ (e^{-x}\cos px)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x}\sin px \\ e^{-x}\cos px \end{pmatrix}$$

上式の (1,1) 成分から

$$\left(-\frac{1}{1+p^2}e^{-x}\sin px-\frac{p}{1+p^2}e^{-x}\cos px\right)'=e^{-x}\sin px$$

よって $\quad \boldsymbol{a=-\dfrac{1}{1+p^2},\ \ b=-\dfrac{p}{1+p^2}}$

(2) $p = \dfrac{1}{t}$ とおくと $(t \neq 0)$，(1) の結果から

$$\left(-\frac{t^2}{t^2+1}e^{-x}\sin\frac{x}{t} - \frac{t}{t^2+1}e^{-x}\cos\frac{x}{t}\right)' = e^{-x}\sin\frac{x}{t}$$

したがって

$$\begin{aligned}
S(t) &= \int_0^{t^2} e^{-x}\sin\frac{x}{t}\,dx \\
&= \left[-\frac{t^2}{t^2+1}e^{-x}\sin\frac{x}{t} - \frac{t}{t^2+1}e^{-x}\cos\frac{x}{t}\,\right]_0^{t^2} \\
&= \boldsymbol{-\frac{t^2}{t^2+1}e^{-t^2}\sin t + \frac{t}{t^2+1}\left(1 - e^{-t^2}\cos t\right)}
\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}
\frac{S(t)}{t^3} &= -\frac{e^{-t^2}}{t^2+1} \times \frac{\sin t}{t} + \frac{1}{t^2+1} \times \frac{1 - e^{-t^2}\cos t}{t^2} \\
&= -\frac{e^{-t^2}}{t^2+1} \times \frac{\sin t}{t} + \frac{1}{t^2+1}\left\{\frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} + \frac{e^{-t^2}(1-\cos t)}{t^2}\right\} \\
&= -\frac{e^{-t^2}}{t^2+1} \times \frac{\sin t}{t} + \frac{1}{t^2+1}\left\{\frac{e^{-t^2}-1}{-t^2} + e^{-t^2} \times \frac{1-\cos t}{t^2}\right\}
\end{aligned}$$

ここで　$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1,\quad \lim_{t\to 0}\frac{e^{-t^2}-1}{-t^2} = \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\cos t} \times \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

よって　$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3} = -1 \times 1 + 1\left(1 + 1 \times \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$