

平成22年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
 医学部医学科 平成22年2月25日

問題 1 2 3 4

- 1 原点を O とし、空間内に3点 $A(4, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $C(2, 1, 2)$ をとる。
 線分 BC を $t : (1-t)$ ($0 < t < 1$) に内分する点を P とおく。このとき、以下の問いに答えよ。
- (1) $\triangle OAP$ の面積を最小にする t の値を求めよ。
 - (2) C を通り、3点 O , A , P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。 D が $\triangle OAB$ の内部にあるとき、 t の範囲を求めよ。
- 2 赤球4個と白球6個の入った袋から2個の球を同時に取り出し、その中に赤球が含まれていたなら、その個数だけさらに袋から球を取り出す。このとき、以下の問いに答えよ。
- (1) 取り出した赤球の総数が2である確率を求めよ。
 - (2) 取り出した赤球の総数が、取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ。
- 3 関数 $f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1 + \tan t) dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}$) について、以下の問いに答えよ。
- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
 - (2) $f(0)$ の値を求めよ。
 - (3) 条件 $a_1 = f(0)$, $a_{n+1} = f(a_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。
- 4 以下の問いに答えよ。
- (1) p を0でない定数とする。関数 $f(x) = ae^{-x} \sin px + be^{-x} \cos px$ について、 $f'(x) = e^{-x} \sin px$ となるように、定数 a , b を定めよ。
 - (2) $S(t) = \int_0^{t^2} e^{-x} \sin \frac{x}{t} dx$ ($t \neq 0$) とおく。このとき、 $S(t)$ を求めよ。
 - (3) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)}{t^3}$ の値を求めよ。

解答例

- 1 (1) PはBCを $t:(1-t)$ に内分する点であるから($0 < t < 1$)

$$\vec{OP} = (1-t)\vec{OB} + t\vec{OC}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } \vec{OP} &= (1-t)(1, 2, 0) + t(2, 1, 2) \\ &= (1+t, 2-t, 2t) \end{aligned}$$

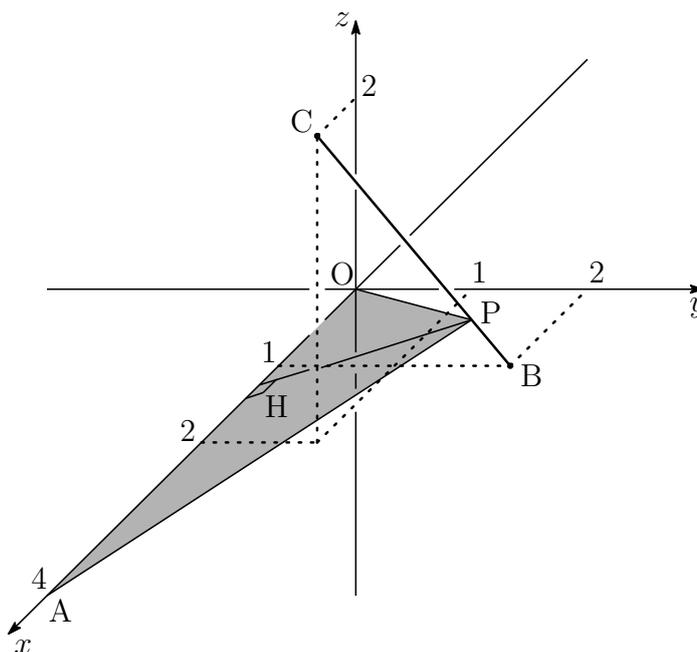
$$\text{OA上にH}(1+t, 0, 0)\text{をとると } \vec{HP} = (0, 2-t, 2t)$$

$$\text{このとき } \vec{OA} \perp \vec{HP} \quad \text{ゆえに } \triangle OAP = \frac{1}{2} \text{OA} \cdot \text{HP}$$

したがって、HPが最小のとき、 $\triangle OAP$ は最小となる。

$$\begin{aligned} \text{HP}^2 &= (2-t)^2 + (2t)^2 = 5t^2 - 4t + 4 \\ &= 5\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{16}{5} \end{aligned}$$

よって、求める t の値は、 $0 < t < 1$ に注意して $t = \frac{2}{5}$



補足

一般に、2直線 l_1, l_2 がねじれの位置にあり、 l_1 上の点Pと l_2 上の点Qを結ぶ線分PQが最小となるとき、 $PQ \perp l_1, PQ \perp l_2$ である。

ここでは、2直線OA, BCがねじれの位置にあり、このとき $\vec{HP} \perp \vec{BC}$ であるから $\vec{HP} \cdot \vec{BC} = 0$ を解いて t の値を求めることができる。

2 (1) 取り出した赤球の総数が2であるのは、次 [1] , [2] の場合である.

[1] 1回目に赤球2個を取り出し、箱の中には赤球2個、白球6個が残り、2回目にこの箱から白球2個を取り出す場合で、その確率は

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_6C_2}{{}_8C_2} = \frac{6}{45} \times \frac{15}{28} = \frac{1}{14}$$

[2] 1回目に赤球、白球をそれぞれ1個ずつ取り出し、箱の中には赤球3個、白球5個が残り、2回目に赤球1個を取り出す場合で、その確率は

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_6C_1}{{}_{10}C_2} \times \frac{3}{8} = \frac{4 \times 6}{45} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{5}$$

[1] , [2] は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{1}{14} + \frac{1}{5} = \frac{19}{70}$$

(2) 取り出した赤球の総数が、取り出した白球の総数をこえるのは、上の [2] と次の [3] の場合である.

[3] 1回目に赤球を2個取り出し、2回目に取り出した球が2個とも赤球、または、赤球と白球が1個ずつの場合で、その確率は

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_2C_2 + {}_2C_1 \times {}_6C_1}{{}_8C_2} = \frac{6}{45} \times \frac{1 + 2 \times 6}{28} = \frac{13}{210}$$

[2] , [3] は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{1}{5} + \frac{13}{210} = \frac{11}{42}$$

3 (1) $f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1 + \tan t) dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}$) を x について微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log_4 \left\{ 1 + \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right\} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - x \right)' - \log_4(1 + \tan x) \cdot (x)' \\ &= -\log_4 \left\{ 1 + \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right\} - \log_4(1 + \tan x) \\ &= -\log_4 \left\{ 1 + \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x} \right\} - \log_4(1 + \tan x) \\ &= -\log_4 \frac{2}{1 + \tan x} - \log_4(1 + \tan x) \\ &= -\log_4 2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(2) \quad f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}} \log_4(1 + \tan t) dt = 0$$

上式および(1)の結果から

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{8}\right) + \int_{\frac{\pi}{8}}^x f'(t) dt = 0 + \int_{\frac{\pi}{8}}^x \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\text{よって} \quad f(0) = -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{16}$$

$$(3) \quad (2) \text{の結果から} \quad a_1 = f(0) = \frac{\pi}{16}, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{\pi}{16}$$

$$\text{ゆえに} \quad a_{n+1} - \frac{\pi}{24} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{\pi}{24}\right)$$

数列 $\left\{a_n - \frac{\pi}{24}\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{\pi}{24}$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n - \frac{\pi}{24} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(a_1 - \frac{\pi}{24}\right)$$

$$\text{よって} \quad a_n = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{48} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\pi}{24} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

別解 $f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1 + \tan t) dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}$) より

$$f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{8}} \log_4(1 + \tan t) dt + \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1 + \tan t) dt \quad \dots (*)$$

$$\text{ここで, } t = \frac{\pi}{4} - u \text{ とおくと} \quad \frac{dt}{du} = -1 \quad \begin{array}{c|c|c} t & \frac{\pi}{8} & \rightarrow \frac{\pi}{4} - x \\ \hline u & \frac{\pi}{8} & \rightarrow x \end{array}$$

$$1 + \tan t = 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right) = 1 + \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u} = \frac{2}{1 + \tan u}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1 + \tan t) dt &= \int_{\frac{\pi}{8}}^x \log_4 \frac{2}{1 + \tan u} (-du) \\ &= -\int_{\frac{\pi}{8}}^x \log_4 \frac{2}{1 + \tan t} dt \quad \dots (**) \end{aligned}$$

(*), (**) より

$$\begin{aligned} f(x) &= -\int_{\frac{\pi}{8}}^x \log_4(1 + \tan t) dt - \int_{\frac{\pi}{8}}^x \log_4 \frac{2}{1 + \tan t} dt \\ &= -\int_{\frac{\pi}{8}}^x \log_4 2 dt = -\int_{\frac{\pi}{8}}^x \frac{1}{2} dt = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \end{aligned}$$



4 (1) $f(x) = e^{-x}(a \sin px + b \cos px)$ であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(a \sin px + b \cos px) + e^{-x}(ap \cos px - bp \sin px) \\ &= e^{-x}\{-(a + bp) \sin px + (ap - b) \cos px\} \end{aligned}$$

これが $f'(x) = e^{-x} \sin px$ となるので

$$e^{-x}\{-(a + bp) \sin px + (ap - b) \cos px\} = e^{-x} \sin px$$

$$\text{ゆえに } e^{-x}\{-(a + bp + 1) \sin px + (ap - b) \cos px\} = 0$$

すべての x に対して、上式は成立するので、 $x = 0, \frac{\pi}{2p}$ を代入すると

$$ap - b = 0, \quad a + bp + 1 = 0$$

$$\text{よって } \mathbf{a} = -\frac{1}{1 + p^2}, \quad \mathbf{b} = -\frac{p}{1 + p^2}$$

別解 $e^{-x} \sin px, e^{-x} \cos px$ を微分すると

$$\begin{aligned} (e^{-x} \sin px)' &= -e^{-x} \sin px + e^{-x} \cdot p \cos px \\ &= -e^{-x} \sin px + pe^{-x} \cos px \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e^{-x} \cos px)' &= -e^{-x} \cos px + e^{-x}(-p \sin px) \\ &= -pe^{-x} \sin px - e^{-x} \cos px \end{aligned}$$

上の2式から

$$\begin{pmatrix} (e^{-x} \sin px)' \\ (e^{-x} \cos px)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & p \\ -p & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x} \sin px \\ e^{-x} \cos px \end{pmatrix}$$

2次の正方行列 $\begin{pmatrix} -1 & p \\ -p & -1 \end{pmatrix}$ は正則であるから、 $\begin{pmatrix} -1 & p \\ -p & -1 \end{pmatrix}^{-1}$ を上式の両辺に左からかけると

$$\frac{1}{1 + p^2} \begin{pmatrix} -1 & -p \\ p & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e^{-x} \sin px)' \\ (e^{-x} \cos px)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \sin px \\ e^{-x} \cos px \end{pmatrix}$$

上式の(1,1)成分から

$$\left(-\frac{1}{1 + p^2} e^{-x} \sin px - \frac{p}{1 + p^2} e^{-x} \cos px \right)' = e^{-x} \sin px$$

$$\text{よって } \mathbf{a} = -\frac{1}{1 + p^2}, \quad \mathbf{b} = -\frac{p}{1 + p^2}$$

(2) $p = \frac{1}{t}$ とおくと ($t \neq 0$), (1) の結果から

$$\left(-\frac{t^2}{t^2+1} e^{-x} \sin \frac{x}{t} - \frac{t}{t^2+1} e^{-x} \cos \frac{x}{t} \right)' = e^{-x} \sin \frac{x}{t}$$

したがって

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{t^2} e^{-x} \sin \frac{x}{t} dx \\ &= \left[-\frac{t^2}{t^2+1} e^{-x} \sin \frac{x}{t} - \frac{t}{t^2+1} e^{-x} \cos \frac{x}{t} \right]_0^{t^2} \\ &= -\frac{t^2}{t^2+1} e^{-t^2} \sin t + \frac{t}{t^2+1} (1 - e^{-t^2} \cos t) \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{S(t)}{t^3} &= -\frac{e^{-t^2}}{t^2+1} \times \frac{\sin t}{t} + \frac{1}{t^2+1} \times \frac{1 - e^{-t^2} \cos t}{t^2} \\ &= -\frac{e^{-t^2}}{t^2+1} \times \frac{\sin t}{t} + \frac{1}{t^2+1} \left\{ \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} + \frac{e^{-t^2}(1 - \cos t)}{t^2} \right\} \\ &= -\frac{e^{-t^2}}{t^2+1} \times \frac{\sin t}{t} + \frac{1}{t^2+1} \left\{ \frac{e^{-t^2} - 1}{-t^2} + e^{-t^2} \times \frac{1 - \cos t}{t^2} \right\} \end{aligned}$$

ここで $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t^2} - 1}{-t^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos t} \times \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

よって $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)}{t^3} = -1 \times 1 + 1 \left(1 + 1 \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$ ■