

平成 21 年度 熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
 医学部医学科 平成 21 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 実数 t に対して、座標平面上の点 $(0, 1)$ と $(1, t)$ を通る直線を l とし、行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で表される移動により、直線 l 上の各点は、ある直線 m 上の点に移るとする。 l と m の交点を $P(x, y)$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) x, y を t の式で表せ。
- (2) t がすべての実数を動くとき、 P はある円周上を動くことを示せ。

2 $p > 0$ とする。各項が正である 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は、次の条件をみたすものとする。

$$\begin{cases} a_1 = 3, b_1 = 1 \\ a_n - a_{n-1} = b_n - b_{n-1} + 1 & (n = 2, 3, 4, \dots) \\ (a_{n-1} + b_n)(b_n - b_{n-1}) = 2pn + 3 - b_n & (n = 2, 3, 4, \dots) \end{cases}$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a_n - b_n$ を求めよ。
- (2) $a_n b_n$ を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3 + b_n^3}{a_n^3 - b_n^3}$ の値を $f(p)$ とおくと、 $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \log f(p)$ を求めよ。

3 大小 2 個のサイコロを投げ、大きいサイコロの目の数を p 、小さいサイコロの目の数を q とする。 $y = px^2$ のグラフと $y = qx + 1$ のグラフの交点のうち、 x 座標が負のものを A、正のものを B とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB の中点の y 座標が 2 より小さくなる確率を求めよ。
- (2) A の x 座標が有理数となる確率を求めよ。
- (3) $\angle OAB$ が 90° より大きくなる確率を求めよ。ただし、O は座標平面の原点である。

4 次の問いに答えよ。

- (1) $-\pi \leq x \leq \pi$ のとき、 $\sqrt{3} \cos x - \sin x > 0$ をみたす x の範囲を求めよ。
- (2) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4 \sin x}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} \right| dx$ を求めよ。

解答例

1 (1) 2点 $(0, 1)$, $(1, t)$ を通る直線 l の方程式は

$$y = (t - 1)x + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

2点 $(0, 1)$, $(1, t)$ の $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ による像は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ -2 + t \end{pmatrix}$$

2点 $(2, 1)$, $(1 + 2t, -2 + t)$ を通る直線 m の方程式は

$$(t - 3)x - (2t - 1)y + 5 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

P は l と m の交点であるから、 $\textcircled{1}$ を $\textcircled{2}$ に代入して、整理すると

$$(t^2 - 2t + 2)x = -t + 3$$

$t^2 - 2t + 2 = (t - 1)^2 + 1 \neq 0$ であるから

$$x = \frac{-t + 3}{t^2 - 2t + 2}$$

これを $\textcircled{1}$ に代入して
$$y = \frac{2t - 1}{t^2 - 2t + 2}$$

(2) $t = 1 + \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) とおいて (1) の結果に代入すると

$$x = \frac{2 - \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = 2 \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta = \cos 2\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + 1$$

$$y = \frac{1 + 2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2}$$

$$x - 1 = \cos 2\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta, \quad y - \frac{1}{2} = \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \quad (-\pi < 2\theta < \pi)$$

であるから、P は円

$$(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

の周上を動く.

(2)の別解を与える前に、次の準備を行う。

準備 問題に t の値により、 P が円周上を動くことあるので、適当な t の値をとって円の方程式を予想することができる。たとえば

$$\begin{aligned} t = 0 \text{ のとき} & \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) \\ t = 1 \text{ のとき} & \quad (2, 1) \\ t = 2 \text{ のとき} & \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

よって、この3点を通る円の方程式は $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$

別解 (1)の結果を $x^2 + y^2 - 2x - y$ に代入すると

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - y &= \left(\frac{-t+3}{t^2-2t+2} \right)^2 + \left(\frac{2t-1}{t^2-2t+2} \right)^2 \\ &\quad - 2 \times \frac{-t+3}{t^2-2t+2} - \frac{2t-1}{t^2-2t+2} \\ &= \frac{(-t+3)^2 + (2t-1)^2}{(t^2-2t+2)^2} - \frac{2(-t+3) + (2t-1)}{t^2-2t+2} \\ &= \frac{5(t^2-2t+2)}{(t^2-2t+2)^2} - \frac{5}{t^2-2t+2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、 P は円

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

の周上を動く。

補足 問題に「点 P はある円周上を動くことを示せ」とあるので、この解答でよい。問題に「点 P の軌跡を求めよ」とあれば、 $(x, y) \neq (0, 0)$ も必要である。■

2 (1) $a_n - a_{n-1} = b_n - b_{n-1} + 1$ より

$$a_n - b_n = a_{n-1} - b_{n-1} + 1, \quad a_1 - b_1 = 3 - 1 = 2$$

よって、 $\{a_n - b_n\}$ は初項2、公差1の等差数列であるから

$$a_n - b_n = 2 + (n-1) \cdot 1 = n + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(2) (1)の結果から $a_n = b_n + n + 1 \dots \textcircled{1}'$

これを $(a_{n-1} + b_n)(b_n - b_{n-1}) = 2pn + 3 - b_n$ に代入すると

$$\begin{aligned}(b_{n-1} + n + b_n)(b_n - b_{n-1}) &= 2pn + 3 - b_n \\ \{b_n + (n + 1)\}b_n - (b_{n-1} + n)b_{n-1} &= 2pn + 3\end{aligned}$$

$$\textcircled{1}' \text{ から } a_n b_n - a_{n-1} b_{n-1} = 2pn + 3$$

$$\begin{aligned}\text{ゆえに } a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n &= 2p(n + 1) + 3 \\ &= 2pn + (2p + 3)\end{aligned}$$

よって, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n b_n &= a_1 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \{2pk + (2p + 3)\} \\ &= 3 \cdot 1 + 2p \times \frac{1}{2} n(n - 1) + (2p + 3)(n - 1) \\ &= pn^2 + (p + 3)n - 2p\end{aligned}$$

$3 \cdot 1 = p \cdot 1^2 + (p + 3) \cdot 1 - 2p$ なので, 上式は $n = 1$ のときにも成り立つ.

$$\text{したがって } a_n b_n = pn^2 + (p + 3)n - 2p \dots \textcircled{2}$$

(3) $\textcircled{1}'$ を $\textcircled{2}$ に代入して, 整理すると

$$b_n^2 + (n + 1)b_n - pn^2 - (p + 3)n + 2p = 0$$

$p > 0, b_n > 0$ に注意して, b_n について解くと

$$b_n = \frac{-(n + 1) + \sqrt{(n + 1)^2 + 4p(n - 1)(n + 2) + 12n}}{2}$$

これを $\textcircled{1}'$ に代入して

$$a_n = \frac{(n + 1) + \sqrt{(n + 1)^2 + 4p(n - 1)(n + 2) + 12n}}{2}$$

上の2式から

$$a_n + b_n = \sqrt{(n + 1)^2 + 4p(n - 1)(n + 2) + 12n} \dots \textcircled{3}$$

したがって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3 + b_n^3}{a_n^3 - b_n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + b_n)\{(a_n - b_n)^2 + a_n b_n\}}{(a_n - b_n)\{(a_n - b_n)^2 + 3a_n b_n\}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n + b_n}{n} \left\{ \left(\frac{a_n - b_n}{n} \right)^2 + \frac{a_n b_n}{n^2} \right\}}{\frac{a_n - b_n}{n} \left\{ \left(\frac{a_n - b_n}{n} \right)^2 + 3 \frac{a_n b_n}{n^2} \right\}} \end{aligned}$$

ここで, ①, ②, ③より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{n^2} = p, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{n} = \sqrt{1 + 4p}$$

であるから

$$f(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3 + b_n^3}{a_n^3 - b_n^3} = \frac{(1 + p)\sqrt{1 + 4p}}{1 + 3p}$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \log f(p) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \log \frac{(1 + p)\sqrt{1 + 4p}}{1 + 3p} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \log \frac{(1 + p)^{\frac{1}{p}} (1 + 4p)^{\frac{1}{2p}}}{(1 + 3p)^{\frac{1}{p}}} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \log \frac{(1 + p)^{\frac{1}{p}} \left\{ (1 + 4p)^{\frac{1}{4p}} \right\}^2}{\left\{ (1 + 3p)^{\frac{1}{3p}} \right\}^3} \\ &= \log \frac{e \cdot e^2}{e^3} = \log 1 = 0 \end{aligned}$$

■

3 (1) $y = px^2$, $y = qx + 1$ から y を消去すると

$$px^2 - qx - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-q)^2 - 4 \cdot p \cdot (-1) = q^2 + 4p$$

$p > 0$ より $D > 0$ となり, 2次方程式 $\textcircled{1}$ は異なる2つの実数解をもつ.

その解を α , β とすると ($\alpha < \beta$), 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{q}{p}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{p}$$

$p > 0$ より $\alpha\beta < 0$ であるから, A, B の x 座標はそれぞれ α , β となる.

線分 AB の中点の y 座標は, 上の第1式から

$$q \times \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 = q \times \frac{q}{2p} + 1 = \frac{q^2}{2p} + 1$$

これが2より小さいので

$$\frac{q^2}{2p} + 1 < 2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{q^2}{2} < p \leq 6$$

上式より, $q \leq 3$ であるから

$$q = 1 \text{ のとき} \quad 1 \leq p \leq 6 \quad \text{の} 6 \text{ 通り}$$

$$q = 2 \text{ のとき} \quad 3 \leq p \leq 6 \quad \text{の} 4 \text{ 通り}$$

$$q = 3 \text{ のとき} \quad 5 \leq p \leq 6 \quad \text{の} 2 \text{ 通り}$$

よって, 求める確率は $\frac{6 + 4 + 2}{6^2} = \frac{1}{3}$

(2) A の x 座標 α は 2 次方程式 ① の負の解であるから

$$\alpha = \frac{q - \sqrt{q^2 + 4p}}{2p} \quad \dots \textcircled{3}$$

これが有理数となるは、 $q^2 + 4p$ が平方数のときである。
 $q^2 + 4p$ の値は次のようになる。

| $q \backslash p$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 |
| 2 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 |
| 3 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 |
| 4 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| 5 | 29 | 33 | 37 | 41 | 45 | 49 |
| 6 | 40 | 44 | 48 | 52 | 56 | 60 |

したがって条件をみたす (p, q) の組は、次の 6 組である。

$$(p, q) = (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 5)$$

よって、求める確率は $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$

(3) $A(\alpha, q\alpha + 1)$ および ② から, 直線 AO の傾きは

$$\frac{q\alpha + 1}{\alpha} = q + \frac{1}{\alpha} = q + \frac{2p}{q - \sqrt{q^2 + 4p}} = \frac{q - \sqrt{q^2 + 4p}}{2}$$

A, B を通る直線の方程式から, 直線 AB の傾きは q

直線 AO および直線 AB の方向ベクトルをそれぞれ

$$\vec{u} = \left(1, \frac{q - \sqrt{q^2 + 4p}}{2} \right), \quad \vec{v} = (1, q)$$

とおくと, $\angle OAB$ は \vec{u} と \vec{v} のなす角である. $\angle OAB$ が 90° より大きくなるとき, $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ であるから

$$1 \cdot 1 + \frac{q - \sqrt{q^2 + 4p}}{2} \cdot q < 0$$

ゆえに
$$2 + q^2 < q\sqrt{q^2 + 4p}$$

上式の両辺がともに正であることを注意して, 両辺を平方して整理すると

$$p > 1 + \frac{1}{q^2}$$

したがって $q = 1$ のとき $3 \leq p \leq 6$ の 4 通り

$2 \leq q \leq 6$ のとき $2 \leq p \leq 6$ の 5 通り

よって, 求める確率は $\frac{4 + 5 \times 5}{6^2} = \frac{29}{36}$ ■

4 (1) 与式から $\sin x - \sqrt{3} \cos x < 0$

左辺の三角関数を合成すると

$$2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) < 0$$

よって $\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) < 0 \quad \dots \textcircled{1}$

$-\pi \leq x \leq \pi$ のとき

$$-\frac{4}{3}\pi \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2}{3}\pi$$

であるから, この範囲で ① を解くと

$$-\pi < x - \frac{\pi}{3} < 0 \quad \text{すなわち} \quad -\frac{2}{3}\pi < x < \frac{\pi}{3}$$

(2) (1) の結果から

$$-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ において } \sqrt{3} \cos x - \sin x > 0$$

ゆえに

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4 \sin x}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} \right| dx \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{4 \sin x}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4 \sin x}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} dx \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

ここで

$$4 \sin x = a(\sqrt{3} \cos x - \sin x) + b(\sqrt{3} \cos x - \sin x)'$$

をみたす定数 a, b を求める. 上式の右辺は

$$\begin{aligned} 4 \sin x &= a(\sqrt{3} \cos x - \sin x) + b(-\sqrt{3} \sin x - \cos x) \\ &= (-a - \sqrt{3}b) \sin x + (\sqrt{3}a - b) \cos x \end{aligned}$$

係数を比較して $4 = -a - \sqrt{3}b, 0 = \sqrt{3}a - b$

これを解いて $a = -1, b = -\sqrt{3}$

$$\text{ゆえに } \frac{4 \sin x}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} = -1 - \sqrt{3} \times \frac{(\sqrt{3} \cos x - \sin x)'}{\sqrt{3} \cos x - \sin x}$$

したがって

$$\begin{aligned} & - \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{4 \sin x}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} dx \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \left\{ -1 - \sqrt{3} \times \frac{(\sqrt{3} \cos x - \sin x)'}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} \right\} dx \\ &= - \left[-x - \sqrt{3} \log |\sqrt{3} \cos x - \sin x| \right]_{-\frac{\pi}{3}}^0 = \frac{\pi}{3} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4 \sin x}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left\{ -1 - \sqrt{3} \times \frac{(\sqrt{3} \cos x - \sin x)'}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} \right\} dx \\ &= \left[-x - \sqrt{3} \log |\sqrt{3} \cos x - \sin x| \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \log 3 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入して } \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4 \sin x}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} \right| dx = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \log 3$$

別解 (1) の結果から

$$-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ において } \sqrt{3} \cos x - \sin x > 0$$

ゆえに

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4 \sin x}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} \right| dx \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{4 \sin x}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4 \sin x}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{2 \sin x}{\sin(x - \frac{\pi}{3})} dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x}{\sin(x - \frac{\pi}{3})} dx \end{aligned}$$

ここで, $t = x - \frac{\pi}{3}$ とおくと $\frac{dt}{dx} = 1$

$$2 \sin x = 2 \sin \left(t + \frac{\pi}{3} \right) = \sin t + \sqrt{3} \cos t$$

| | | | |
|-----|-------------------|------------------------------|------------------------------|
| x | $-\frac{\pi}{3}$ | $\rightarrow 0$ | $\rightarrow \frac{\pi}{6}$ |
| t | $-\frac{2}{3}\pi$ | $\rightarrow -\frac{\pi}{3}$ | $\rightarrow -\frac{\pi}{6}$ |

したがって

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{-\frac{\pi}{3}} \left(1 + \sqrt{3} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} \right) dt - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \left(1 + \sqrt{3} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} \right) dt \\ &= \left[t + \sqrt{3} \log |\sin t| \right]_{-\frac{2}{3}\pi}^{-\frac{\pi}{3}} - \left[t + \sqrt{3} \log |\sin t| \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \log \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \log 3 \end{aligned}$$

■