平成21年度　熊本大学２次試験前期日程(数学問題)120分
医学部医学科　平成21年2月25日

1 実数 t に対して，座標平面上の点 $(0,\ 1)$ と $(1,\ t)$ を通る直線を ℓ とし，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で表される移動により，直線 ℓ 上の各点は，ある直線 m 上の点に移るとする。ℓ と m の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) x，y を t の式で表せ。

(2) t がすべての実数を動くとき，P はある円周上を動くことを示せ。

2 $p > 0$ とする。各項が正である2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，次の条件をみたすものとする。

$$\begin{cases} a_1 = 3,\ b_1 = 1 \\ a_n - a_{n-1} = b_n - b_{n-1} + 1 \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots) \\ (a_{n-1} + b_n)(b_n - b_{n-1}) = 2pn + 3 - b_n \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots) \end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_n - b_n$ を求めよ。

(2) $a_n b_n$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^3 + {b_n}^3}{{a_n}^3 - {b_n}^3}$ の値を $f(p)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{p\to 0} \frac{1}{p} \log f(p)$ を求めよ。

3 大小2個のサイコロを投げ，大きいサイコロの目の数を p，小さいサイコロの目の数を q とする。$y = px^2$ のグラフと $y = qx + 1$ のグラフの交点のうち，x 座標が負のものを A，正のものを B とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB の中点の y 座標が2より小さくなる確率を求めよ。

(2) A の x 座標が有理数となる確率を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{OAB}$ が 90° より大きくなる確率を求めよ。ただし，O は座標平面の原点である。

4 次の問いに答えよ。

(1) $-\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sqrt{3}\cos x - \sin x > 0$ をみたす x の範囲を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2点 $(0,1)$，$(1,\ t)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$y=(t-1)x+1 \quad \cdots ①$$

2点 $(0,1)$，$(1,\ t)$ の $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ による像は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2t \\ -2+t \end{pmatrix}$$

2点 $(2,\ 1)$，$(1+2t,-2+t)$ を通る直線 m の方程式は

$$(t-3)x-(2t-1)y+5=0 \quad \cdots ②$$

P は ℓ と m の交点であるから，① を ② に代入して，整理すると

$$(t^2-2t+2)x=-t+3$$

$t^2-2t+2=(t-1)^2+1\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{x=\frac{-t+3}{t^2-2t+2}}$$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{y=\dfrac{2t-1}{t^2-2t+2}}$

(2) $t=1+\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおいて (1) の結果に代入すると

$$x=\frac{2-\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=2\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta=\cos 2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta+1$$

$$y=\frac{1+2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}$$

$x-1=\cos 2\theta-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$，$y-\dfrac{1}{2}=\sin 2\theta+\dfrac{1}{2}\cos 2\theta\ (-\pi<2\theta<\pi)$
であるから，P は円

$$\boldsymbol{(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4},\ (x,\ y)\neq(0,\ 0)}$$

の周上を動く．

(2) の別解を与える前に，次の準備を行う．

準備 問題に t の値により，P が円周上を動くとあるので，適当な t の値をとって円の方程式を予想することができる．たとえば

$$\begin{aligned} t=0 \text{ のとき} \quad & \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ t=1 \text{ のとき} \quad & (2,\ 1) \\ t=2 \text{ のとき} \quad & \left(\frac{1}{2}, \ \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

よって，この 3 点を通る円の方程式は　$x^2+y^2-2x-y=0$

別解 (1) の結果を x^2+y^2-2x-y に代入すると

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x-y &= \left(\frac{-t+3}{t^2-2t+2}\right)^2 + \left(\frac{2t-1}{t^2-2t+2}\right)^2 \\ &\qquad -2\times\frac{-t+3}{t^2-2t+2} - \frac{2t-1}{t^2-2t+2} \\ &= \frac{(-t+3)^2+(2t-1)^2}{(t^2-2t+2)^2} - \frac{2(-t+3)+(2t-1)}{t^2-2t+2} \\ &= \frac{5(t^2-2t+2)}{(t^2-2t+2)^2} - \frac{5}{t^2-2t+2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって，P は円

$$\boldsymbol{(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}}$$

の周上を動く．

補足 問題に「点 P はある円周上を動くことを示せ」とあるので，この解答でよい．問題に「点 P の軌跡を求めよ」とあれば，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ も必要である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_n-a_{n-1}=b_n-b_{n-1}+1$ より

$$a_n-b_n=a_{n-1}-b_{n-1}+1, \qquad a_1-b_1=3-1=2$$

よって，$\{a_n-b_n\}$ は初項 2，公差 1 の等差数列であるから

$$a_n-b_n=2+(n-1)\cdot1=\boldsymbol{n+1} \quad \cdots①$$

(2) (1) の結果から　$a_n = b_n + n + 1$　$\cdots$ ①$'$
これを $(a_{n-1} + b_n)(b_n - b_{n-1}) = 2pn + 3 - b_n$ に代入すると

$$(b_{n-1} + n + b_n)(b_n - b_{n-1}) = 2pn + 3 - b_n$$
$$\{b_n + (n+1)\}b_n - (b_{n-1} + n)b_{n-1} = 2pn + 3$$

①$'$ から　$a_n b_n - a_{n-1} b_{n-1} = 2pn + 3$
ゆえに　$a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n = 2p(n+1) + 3$
$= 2pn + (2p+3)$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n b_n &= a_1 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \{2pk + (2p+3)\} \\ &= 3 \cdot 1 + 2p \times \frac{1}{2} n(n-1) + (2p+3)(n-1) \\ &= pn^2 + (p+3)n - 2p \end{aligned}$$

$3 \cdot 1 = p \cdot 1^2 + (p+3) \cdot 1 - 2p$ なので，上式は $n = 1$ のときにも成り立つ.
したがって　$\boldsymbol{a_n b_n = pn^2 + (p+3)n - 2p}$　$\cdots$ ②

(3) ①$'$ を ② に代入して，整理すると

$$b_n{}^2 + (n+1)b_n - pn^2 - (p+3)n + 2p = 0$$

$p > 0$，$b_n > 0$ に注意して，b_n について解くと

$$b_n = \frac{-(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 + 4p(n-1)(n+2) + 12n}}{2}$$

これを ①$'$ に代入して

$$a_n = \frac{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 + 4p(n-1)(n+2) + 12n}}{2}$$

上の 2 式から

$$a_n + b_n = \sqrt{(n+1)^2 + 4p(n-1)(n+2) + 12n} \quad \cdots ③$$

したがって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^3+{b_n}^3}{{a_n}^3-{b_n}^3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+b_n)\{(a_n-b_n)^2+a_nb_n\}}{(a_n-b_n)\{(a_n-b_n)^2+3a_nb_n\}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a_n+b_n}{n}\left\{\left(\dfrac{a_n-b_n}{n}\right)^2+\dfrac{a_nb_n}{n^2}\right\}}{\dfrac{a_n-b_n}{n}\left\{\left(\dfrac{a_n-b_n}{n}\right)^2+3\dfrac{a_nb_n}{n^2}\right\}}\end{aligned}$$

ここで，①，②，③ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^2}=p,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{n}=\sqrt{1+4p}$$

であるから

$$f(p)=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^3+{b_n}^3}{{a_n}^3-{b_n}^3}=\frac{(1+p)\sqrt{1+4p}}{1+3p}$$

よって

$$\begin{aligned}\lim_{p\to0}\frac{1}{p}\log f(p)&=\lim_{p\to0}\frac{1}{p}\log\frac{(1+p)\sqrt{1+4p}}{1+3p}\\&=\lim_{p\to0}\log\frac{(1+p)^{\frac{1}{p}}(1+4p)^{\frac{1}{2p}}}{(1+3p)^{\frac{1}{p}}}\\&=\lim_{p\to0}\log\frac{(1+p)^{\frac{1}{p}}\left\{(1+4p)^{\frac{1}{4p}}\right\}^2}{\left\{(1+3p)^{\frac{1}{3p}}\right\}^3}\\&=\log\frac{e\cdot e^2}{e^3}=\log 1=\mathbf{0}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y = px^2$，$y = qx + 1$ から y を消去すると

$$px^2 - qx - 1 = 0 \quad \cdots ①$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-q)^2 - 4 \cdot p \cdot (-1) = q^2 + 4p$$

$p > 0$ より $D > 0$ となり，2 次方程式 ① は異なる 2 つの実数解をもつ．
その解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{q}{p}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{p}$$

$p > 0$ より $\alpha\beta < 0$ であるから，A，B の x 座標はそれぞれ α，β となる．
線分 AB の中点の y 座標は，上の第 1 式から

$$q \times \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 = q \times \frac{q}{2p} + 1 = \frac{q^2}{2p} + 1$$

これが 2 より小さいので

$$\frac{q^2}{2p} + 1 < 2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{q^2}{2} < p \leqq 6$$

上式より，$q \leqq 3$ であるから

$q = 1$ のとき　$1 \leqq p \leqq 6$　の 6 通り
$q = 2$ のとき　$3 \leqq p \leqq 6$　の 4 通り
$q = 3$ のとき　$5 \leqq p \leqq 6$　の 2 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{6 + 4 + 2}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(2) A の x 座標 α は 2 次方程式 ① の負の解であるから

$$\alpha = \frac{q - \sqrt{q^2 + 4p}}{2p} \quad \cdots ③$$

これが有理数となるは，$q^2 + 4p$ が平方数のときである．
$q^2 + 4p$ の値は次のようなる．

$q \backslash p$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	5	9	13	17	21	25
2	8	12	16	20	24	28
3	13	17	21	25	29	33
4	20	24	28	32	36	40
5	29	33	37	41	45	49
6	40	44	48	52	56	60

したがって条件をみたす $(p,\ q)$ の組は，次の 6 組である．

$$(p,\ q) = (2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 1),\ (6,\ 5)$$

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(3) A$(\alpha,\ q\alpha+1)$ および ② から，直線 AO の傾きは

$$\frac{q\alpha+1}{\alpha}=q+\frac{1}{\alpha}=q+\frac{2p}{q-\sqrt{q^2+4p}}=\frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2}$$

A，B を通る直線の方程式から，直線 AB の傾きは　q

直線 AO および直線 AB の方向ベクトルをそれぞれ

$$\vec{u}=\left(1,\ \frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2}\right),\ \ \vec{v}=(1,\ q)$$

とおくと，$\angle$OAB は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角である．$\angle$OAB が 90° より大きくなるとき，$\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ であるから

$$1\cdot 1+\frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2}\cdot q<0$$

ゆえに　$$2+q^2<q\sqrt{q^2+4p}$$

上式の両辺がともに正であることに注意して，両辺を平方して整理すると

$$p>1+\frac{1}{q^2}$$

したがって　$q=1$ のとき　$3\leqq p\leqq 6$　の 4 通り

$2\leqq q\leqq 6$ のとき　$2\leqq p\leqq 6$　の 5 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{4+5\times 5}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{29}{36}}$

4 (1) 与式から　$\sin x-\sqrt{3}\cos x<0$

左辺の三角関数を合成すると

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)<0$$

よって　$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)<0\quad\cdots①$$

$-\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$-\frac{4}{3}\pi\leqq x-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{2}{3}\pi$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$-\pi<x-\frac{\pi}{3}<0\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{-\frac{2}{3}\pi<x<\frac{\pi}{3}}$$

(2) (1) の結果から

$$-\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{\pi}{6} \text{ において } \quad \sqrt{3}\cos x - \sin x > 0$$

ゆえに

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx$$
$$= -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\, dx \quad \cdots ②$$

ここで

$$4\sin x = a(\sqrt{3}\cos x - \sin x) + b(\sqrt{3}\cos x - \sin x)'$$

をみたす定数 a，b を求める．上式の右辺は

$$\begin{aligned} 4\sin x &= a(\sqrt{3}\cos x - \sin x) + b(-\sqrt{3}\sin x - \cos x) \\ &= (-a - \sqrt{3}\,b)\sin x + (\sqrt{3}\,a - b)\cos x \end{aligned}$$

係数を比較して　$4 = -a - \sqrt{3}\,b,\ \ 0 = \sqrt{3}\,a - b$

これを解いて　　$a = -1,\ \ b = -\sqrt{3}$

ゆえに　$$\frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} = -1 - \sqrt{3} \times \frac{(\sqrt{3}\cos x - \sin x)'}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}$$

したがって

$$-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\, dx$$
$$= -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \left\{ -1 - \sqrt{3} \times \frac{(\sqrt{3}\cos x - \sin x)'}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right\} dx$$
$$= -\Big[-x - \sqrt{3}\ \log\left|\sqrt{3}\cos x - \sin x\right| \Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} = \frac{\pi}{3} \quad \cdots ③$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\, dx$$
$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left\{ -1 - \sqrt{3} \times \frac{(\sqrt{3}\cos x - \sin x)'}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right\} dx$$
$$= \Big[-x - \sqrt{3}\ \log\left|\sqrt{3}\cos x - \sin x\right| \Big]_{0}^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3 \quad \cdots ④$$

③，④ を ② に代入して　$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx = \boldsymbol{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3}$$

別解 (1) の結果から

$$-\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{\pi}{6} \text{ において} \quad \sqrt{3}\cos x - \sin x > 0$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\,dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{2\sin x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}\,dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}\,dx
\end{aligned}$$

ここで，$t = x - \dfrac{\pi}{3}$ とおくと $\quad \dfrac{dt}{dx} = 1$

$$2\sin x = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \sin t + \sqrt{3}\cos t$$

x	$-\frac{\pi}{3} \longrightarrow 0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$
t	$-\frac{2}{3}\pi \longrightarrow -\frac{\pi}{3} \longrightarrow -\frac{\pi}{6}$

したがって

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{-\frac{\pi}{3}} \left(1 + \sqrt{3}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \left(1 + \sqrt{3}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt \\
&= \Big[\, t + \sqrt{3}\log|\sin t| \,\Big]_{-\frac{2}{3}\pi}^{-\frac{\pi}{3}} - \Big[\, t + \sqrt{3}\log|\sin t| \,\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\log\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3}
\end{aligned}$$