令和７年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻，情報融合 [文系])
令和７年２月２５日

問題 1 2 3 4

1 n を正の整数とする。放物線 $y = x^2 + 2x + 1$ を C とし，直線 $y = (2n+3)x$ を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

(1) C と ℓ の共有点の個数は 2 個であることを示せ。

(2) C と ℓ の共有点の x 座標を α，β とする。ただし $\alpha < \beta$ とする。C，$x = \alpha$，$x = \beta$，x 軸で囲まれた図形の面積を S とする。$\dfrac{S}{\beta - \alpha}$ を n を用いて表せ。

(3) (2) で求めた数を a_n とする。$m \geqq 1$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n$ を求めよ。

2 座標平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える。

1. 最初に点 P は原点 O にある。
2. ある時刻で点 P が格子点 $(x,\ y)$ にあるとき，その 1 秒後には $(x+1,\ y)$ または $(x,\ y+1)$ へ動く。

格子点上に $\mathrm{A}(m,\ 0)$，$\mathrm{B}(m,\ n)$ を取る。ただし，m，n は正の整数である。最初から k 秒後に端点 A，B を含む線分 AB 上に点 P が初めて達するまでの P の動き方の総数を a_k とする。以下の問いに答えよ。

(1) $m = 3$，$n = 4$ のとき，a_7 を求めよ。

(2) $m \leqq k \leqq m + n$ に対して a_k を求めよ。

(3) 等式 $\displaystyle\sum_{k=m}^{m+n} a_k = {}_{m+n}\mathrm{C}_m$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{3}$ xyz 空間内の平面 α は 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 3,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 5,\ 0)$ を通り x 軸と交わるものとする。α と x 軸との交点を C とする。原点 O から平面 α に下した垂線 OH の長さは 3 とする。ただし，点 H の x 座標，y 座標，z 座標はいずれも整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 H の座標を求めよ。

(2) 点 C の座標を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

(4) 四面体 OABC の体積を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数 $y = |x^2 - (a+1)x + a|$ のグラフを C とし，直線 $y = x - a$ を ℓ とする。ただし，$a \leqq 1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) C と ℓ の共有点の x 座標を求めよ。

(2) C と ℓ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) (2) で求めた $S(a)$ の最小値を求めよ。

解答例

1 (1) $C : y = x^2 + 2x + 1$ と $\ell : y = (2n+3)x$ の方程式から y を消去すると

$x^2 + 2x + 1 = (2n+3)x$　整理すると　$x^2 - (2n+1)x + 1 = 0$　$\cdots (*)$

$(*)$ の係数について，n が正の整数であるから

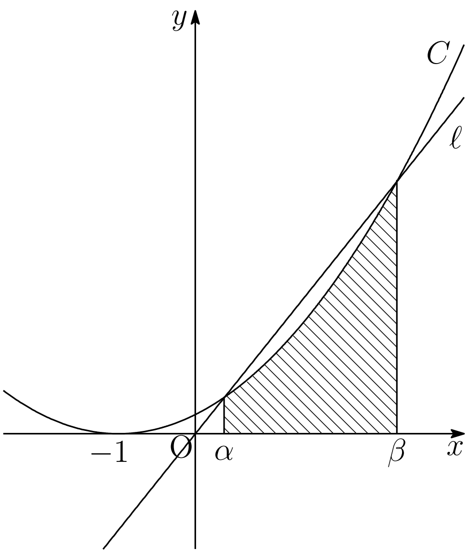
$$D = (2n+1)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}1 = (2n+3)(2n-1) > 0$$

よって，C と ℓ の共有点の個数は 2 個である．

(2) α，β は，2 次方程式 $(*)$ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2n + 1, \quad \alpha\beta = 1$$

S は右の図の斜線部分の面積であるから



$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 + 2x + 1)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 1 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} + (\beta^2 - \alpha^2) + \beta - \alpha \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{S}{\beta - \alpha} &= \frac{1}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + \alpha + \beta + 1 \\ &= \frac{1}{3}\{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta\} + \alpha + \beta + 1 \\ &= \frac{1}{3}\{(2n+1)^2 - 1\} + (2n+1) + 1 \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}(2n^2 + 5n + 3)} \end{aligned}$$

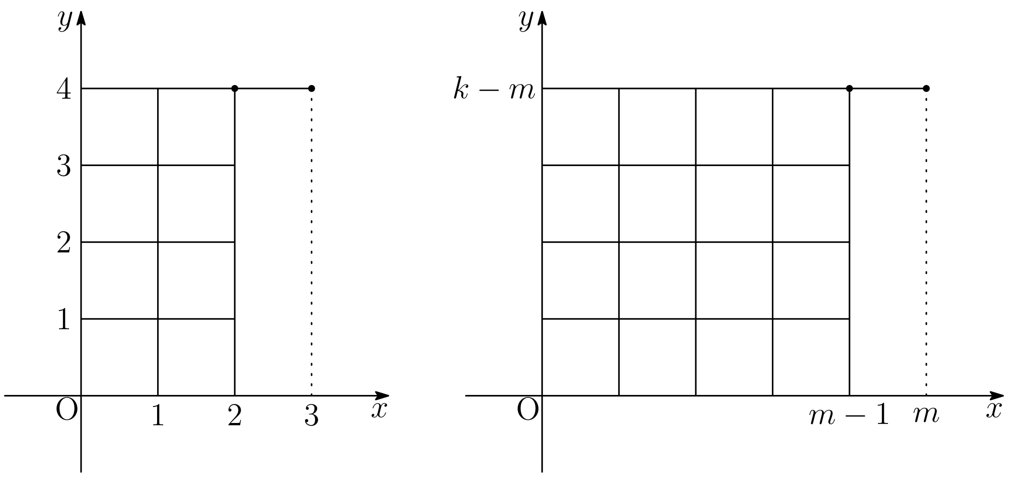
(3) $a_n = \dfrac{2}{3}(2n^2 + 5n + 3)$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} a_n &= \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{m}(2n^2 + 5n + 3) \\ &= \frac{2}{3}\left\{2{\cdot}\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) + 5{\cdot}\frac{1}{2}m(m+1) + 3m\right\} \\ &= \frac{2}{3}{\cdot}\frac{m}{6}\{2(m+1)(2m+1) + 15(m+1) + 18\} \\ &= \boldsymbol{\frac{m}{9}(4m^2 + 21m + 35)} \end{aligned}$$

■

2 (1) a_7 は点 $(2,\ 4)$ を経由して点 $(3,\ 4)$ に至る場合の数であるから

$$a_7 = \frac{(2+4)!}{2!4!}\cdot 1 = \mathbf{15}$$



(2) a_k は点 $(m-1,\ k-m)$ を経由して点 $(m,\ k-m)$ に至る場合の数であるから

$$a_k = \frac{\{(m-1)+(k-m)\}!}{(m-1)!(k-m)!}\cdot 1 = \frac{(k-1)!}{(m-1)!(k-m)!} = \boldsymbol{{}_{k-1}\mathrm{C}_{m-1}}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{m+n} a_k &= \sum_{k=m}^{m+n} {}_{k-1}\mathrm{C}_{m-1} \\ &= {}_{m-1}\mathrm{C}_{m-1} + \sum_{k=m+1}^{m+n} {}_{k-1}\mathrm{C}_{m-1} \\ &= 1 + \sum_{k=m+1}^{m+n} ({}_{k}\mathrm{C}_{m} - {}_{k-1}\mathrm{C}_{m}) \\ &= 1 + ({}_{m+n}\mathrm{C}_{m} - {}_{m}\mathrm{C}_{m}) \\ &= {}_{m+n}\mathrm{C}_{m}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=9$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ であるから

$$(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0,\quad (\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=9$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=9$

$\mathrm{H}(p,\ q,\ r)$ とすると　$-p+3q+r=9,\quad p+5q=9$

上の 2 式から　$p=9-5q,\quad r=18-8q$　$(*)$

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=9$ より，$p^2+q^2+r^2=9$ であるから

$$(9-5q)^2+q^2+(18-8q)^2=9$$

整理すると　$5q^2-21q+22=0$　ゆえに　$(q-2)(5q-11)=0$

H の座標は整数であるから　$q=2$

これを $(*)$ に代入して　$p=-1,\ r=2$　よって　$\mathbf{H(-1,\ 2,\ 2)}$

(2) $\mathrm{A}(-1,\ 3,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{H}(-1,\ 2,\ 2)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 2,-1),\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}=(0,-1,\ 1)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1,-2,-2)$

平面 α は点 $\mathrm{A}(-1,\ 3,\ 1)$ を通り，法線ベクトルが $\vec{n}=(1,-2,-2)$ の平面であるから

$$1\cdot(x+1)-2(y-3)-2(z-1)=0\quad \text{ゆえに}\quad x-2y-2z+9=0$$

x 軸上では $y=0$，$z=0$ であるから　$x=-9$　よって　$\mathbf{C(-9,\ 0,\ 0)}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 2,-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-8,-3,-1)$ より

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot74-(-21)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{225}=\mathbf{\frac{15}{2}}\end{aligned}$$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-5,\ 10,\ 10)=5(-1,\ 2,\ 2)$ であるから

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\frac{1}{2}\cdot5\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=\mathbf{\frac{15}{2}}$$

(4) 求める体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{2}\cdot3=\mathbf{\frac{15}{2}}$$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-5,\ 1,-8)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(-9,\ 0,\ 0)$ より

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{1}{6}|45|=\mathbf{\frac{15}{2}}$$

■

外積 (ベクトル積)

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**外積 (ベクトル積)** と言い，$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ で表し (内積をスカラー積とも言う)，その成分は

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

であるから，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

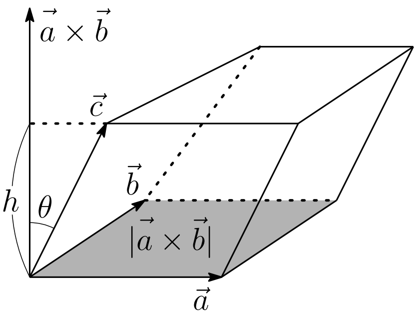
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は　$\boldsymbol{V=\dfrac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．

$\boxed{4}$ (1) $a \leqq 1$ であるから

$$y = |x^2 - (a+1)x + a| = |(x-a)(x-1)|$$
$$= \begin{cases} (x-a)(x-1) & (x \leqq a,\ 1 \leqq x) \\ -(x-a)(x-1) & (1 \leqq x \leqq a) \end{cases}$$

C と ℓ の共有点の x 座標は，方程式

$$|(x-a)(x-1)| = x - a$$

の解であり，その解は $x \geqq a$ の範囲にあるから

$$(*)\quad (x-a)(|x-1|-1) = 0$$

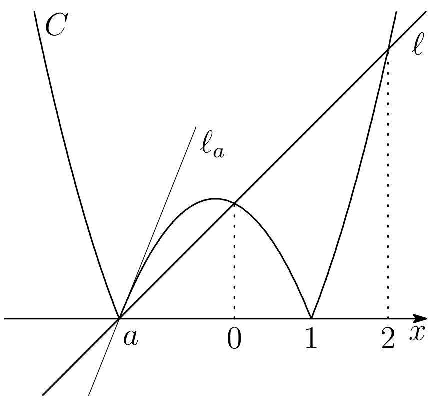
(i) $a \leqq 0$ のとき，$(*)$ を解いて　　$x = a,\ 0,\ 2$

(ii) $0 < a \leqq 1$ のとき，$(*)$ を解いて　　$x = a,\ 2$

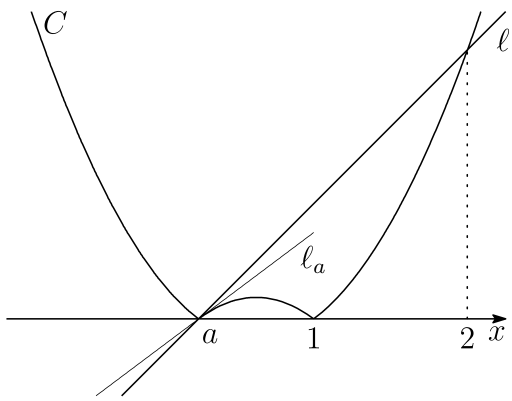
よって　　$\boldsymbol{a \leqq 0}$ **のとき**　　$\boldsymbol{x = a,\ 0,\ 2}$
　　　　　$\boldsymbol{0 < a \leqq 1}$ **のとき**　$\boldsymbol{x = a,\ 2}$

補足 ℓ の傾きが 1 である．$y = -(x-a)(x-1)$ の点 $(a,\ 0)$ における接線を ℓ_a とすると $y' = -2x + (a+1)$ より，ℓ_a の傾きは　$-2a + (a+1) = 1 - a$

(i) $a \leqq 0$



(ii) $0 < a \leqq 1$



(2) 下の図の斜線部分の面積を S_1, S_2, S_3, S_4 とする．

(i) $a \leqq 0$ のとき

$$S_1 = \frac{1}{6}(1-a)^3, \quad S_2 = \frac{1}{6}(0-a)^3, \quad S_1 + (S_1 - S_2) + S_3 = \frac{1}{6}(2-a)^3$$

上の 3 式から

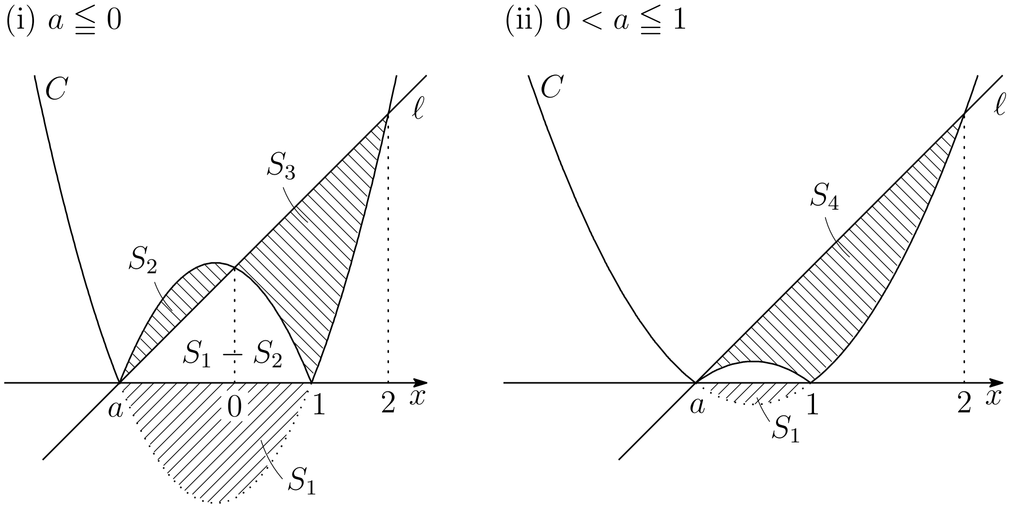
$$\begin{aligned} S_2 + S_3 &= \frac{1}{6}(2-a)^3 - 2S_1 + 2S_2 \\ &= \frac{1}{6}\{(2-a)^3 - 2(1-a)^3 + 2(0-a)^3\} \\ &= \frac{1}{6}(-a^3 - 6a + 6) \end{aligned}$$

(ii) $0 < a \leqq 1$ のとき

$$S_1 = \frac{1}{6}(1-a)^3, \quad 2S_1 + S_4 = \frac{1}{6}(2-a)^3$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{6}(2-a)^3 - 2S_1 \\ &= \frac{1}{6}\{(2-a)^3 - 2(1-a)^3\} \\ &= \frac{1}{6}(a^3 - 6a + 6) \end{aligned}$$



したがって　$$\boldsymbol{S(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}(-a^3 - 6a + 6) & (a \leqq 0) \\ \dfrac{1}{6}(a^3 - 6a + 6) & (0 < a \leqq 1) \end{cases}}$$

(3) (2) の結果から

$$S'(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(-a^2-2) & (a<0) \\ \dfrac{1}{2}(a^2-2) & (0<a<1) \end{cases}$$

$a<0$，$0<a<1$ のとき，$S'(a)<0$ であるから，$S(a)$ は単調減少.
よって，最小値 $S(1)=\dfrac{1}{6}$ ■