令和６年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻，情報融合 [文系])
令和６年２月25日

問題 1 2 3 4

1 数列 $\{a_n\}$ は $0 < a_n < \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\tan a_n = n$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\cos^2 a_n$ を n の式で表せ。

(2) $\tan(a_{n+1} - a_n)$ を n の式で表せ。

(3) $\dfrac{\tan(a_{n+1} - a_n)}{\cos^2 a_n} > \dfrac{9}{10}$ を満たす n の最小値を求めよ。

2 1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a + b$ が 3 の倍数になる確率を求めよ。

(2) $a^2 + b^2$ が 4 の倍数になる確率を求めよ.

(3) $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ が 12 の倍数になる確率を求めよ。

3 a を実数とし，座標平面上の円 $x^2+y^2=8$ を C_1，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2+a$ を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 の共有点の個数が 4 個のとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) C_1 と C_2 の共有点の個数が 2 個であるような a の最小値を求め，そのときの共有点 P，Q の座標を求めよ。ただし，P の x 座標は Q の x 座標より小さいとする。

(3) a が (2) で求めた値であるとき，直線 PQ の下側で，C_1 と C_2 によって囲まれた部分の面積を求めよ。

4 平面上に点 O を中心とする半径 2 の円 D がある。円 D の周上に異なる 3 点 A，B，C をとる。ただし，直線 AB，BC，CA は点 O を通らないとする。2 点 A，B における円 D のそれぞれの接線の交点を P とする。同様に，2 点 B，C における円 D のそれぞれの接線の交点を Q，2 点 C，A における円 D のそれぞれの接線の交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{4+\vec{a}\cdot\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b})$ が成り立つことを示せ。

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\sqrt{3}$ のとき，線分 OP の長さを求めよ。

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=-2\sqrt{3}$ かつ $\vec{b}\cdot\vec{c}=2$ のとき，$\triangle$PQR の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\tan a_n = n$ より $\quad \cos^2 a_n = \dfrac{1}{1+\tan^2 a_n} = \boldsymbol{\dfrac{1}{1+n^2}}$

(2) $\tan a_n = n$ より

$$\begin{aligned}\tan(a_{n+1} - a_n) &= \frac{\tan a_{n+1} - \tan a_n}{1 + \tan a_{n+1} \tan a_n} \\ &= \frac{(n+1) - n}{1 + (n+1)n} = \boldsymbol{\frac{1}{1+n+n^2}}\end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果から $\quad \dfrac{\tan(a_{n+1} - a_n)}{\cos^2 a_n} = \dfrac{1+n^2}{1+n+n^2}$

$\dfrac{\tan(a_{n+1} - a_n)}{\cos^2 a_n} > \dfrac{9}{10}$ のとき $\quad \dfrac{1+n^2}{1+n+n^2} > \dfrac{9}{10}$

したがって $\quad n(9-n) < 1$

n は自然数より，$n(9-n)$ は整数であるから

$$n(9-n) \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 9 - n \leqq 0$$

これを解いて $\quad n \geqq 9 \quad$ よって，求める最小の n は $\quad \boldsymbol{n = 9}$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 法 3 について

$$1 \equiv 1,\quad 2 \equiv 2,\quad 3 \equiv 0,\quad 4 \equiv 1,\quad 5 \equiv 2,\quad 6 \equiv 0 \pmod 3$$

したがって，$a+b \equiv 0 \pmod 3$ となる確率は

$$\frac{2\cdot2+2\cdot2+2\cdot2}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

(2) 法 4 について

$$1^2 \equiv 1,\quad 2^2 \equiv 0,\quad 3^2 \equiv 1,\quad 4^2 \equiv 0,\quad 5^2 \equiv 1,\quad 6^2 \equiv 0 \pmod 4$$

したがって，$a^2+b^2 \equiv 0 \pmod 4$ となる確率は

$$\frac{3^2}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

(3) $N = a^3+a^2b+ab^2+b^3 = (a+b)(a^2+b^2)$ とおく．
$a^2-a = a(a-1)$ より，$a^2 \equiv a \pmod 2$ であるから

$$a^2+b^2 \equiv a+b \pmod 2$$

上式から，$a+b \equiv 0 \pmod 2 \Longrightarrow N \equiv 0 \pmod 4$
法 3 について，$0^2 \equiv 0,\quad 1^2 \equiv 1,\ 2^2 \equiv 1 \pmod 3$ であるから

$$a^2+b^2 \equiv 0 \Longrightarrow a \equiv 0,\ b \equiv 0 \Longrightarrow a+b \equiv 0 \pmod 3$$

したがって，N が 12 の倍数になる $a,\ b$ の条件は，$a+b$ が 2 の倍数かつ 3 の倍数，すなわち，6 の倍数であり，求める $a,\ b$ の組は次の 6 組である．

$$(a,\ b) = (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1),\ (6,\ 6)$$

よって，求める確率は $\dfrac{6}{6^2} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$ ■

3 (1) C_1 と C_2 が接する次の場合を考える．

(i) C_1 の半径が $2\sqrt{2}$ であるから，$a=-2\sqrt{2}$ とすると

$$C_1 : x^2+y^2=8,\quad C_2 : y=\frac{1}{4}x^2-2\sqrt{2}$$

上の 2 式から x^2 を消去すると

$$y^2-8+4(y+2\sqrt{2})=0 \quad \text{ゆえに} \quad (y+2\sqrt{2})(y-2\sqrt{2}+4)=0$$

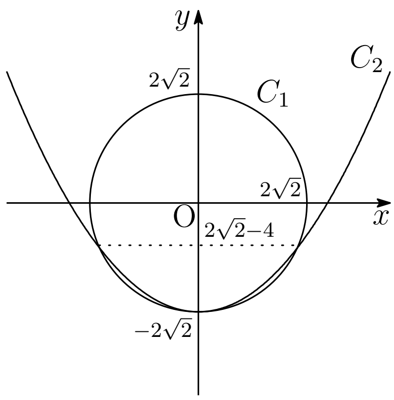
これらの共有点の y 座標 $-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}-4$ は $-2\sqrt{2} \leqq y \leqq 2\sqrt{2}$ を満たす．このとき，左下の図のように C_1，C_2 は 3 点を共有する．

(ii) $C_1 : x^2+y^2=8$ と $C_2 : y=\dfrac{1}{4}x^2+a$ の 2 式から，x^2 を消去すると

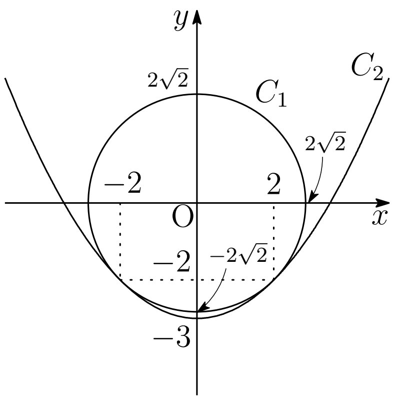
$$y^2+4y-4a-8=0 \quad \text{ゆえに} \quad (y+2)^2=4a+12$$

よって，$4a+12=0$，すなわち，$a=-3$ のとき，重解 $y=-2$ をもつ．このとき，右下の図のように C_1，C_2 は 2 点 $(\pm 2,-2)$ で接する．

(i) $\underline{a=-2\sqrt{2}}$



(ii) $\underline{a=-3}$



したがって，C_1 と C_2 の共有点が 4 個となる a の値の範囲は

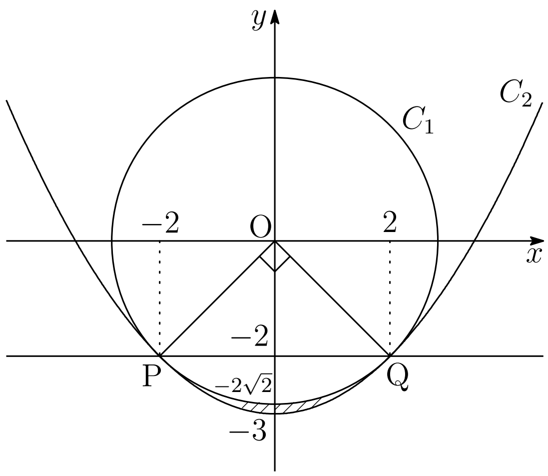
$$\boldsymbol{-3<a<-2\sqrt{2}}$$

(2) (1) の図 (ii) から分かるように，求める a の最小値は　$\boldsymbol{a=-3}$

よって　　**P(−2, −2)，Q(2, −2)**

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \int_{-2}^{2}\left\{-2-\left(\frac{1}{4}x^2-3\right)\right\}dx-\left\{\frac{1}{4}\cdot\pi(2\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\right\}\\&= -\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(x+2)(x-2)\,dx-(2\pi-4)\\&= \frac{1}{24}(2+2)^3-2\pi+4=\boldsymbol{\frac{20}{3}-2\pi}\end{aligned}$$



補足 (i) のように C_1 と C_2 が放物線の頂点で接する場合と，(ii) のように頂点以外の点で接する場合がある．本題の (ii) では，円の中心から放物線までの距離 2 乗関数を考えてもよい．

C_1 の中心 O から C_2 上の点 $\mathrm{R}\left(t,\ \frac{1}{4}t^2+a\right)$ までの距離 OR について

$$f(t)=\mathrm{OR}^2=t^2+\left(\frac{1}{4}t^2+a\right)^2$$

とおく．このとき，(i) の結果に注意して，$a<-2\sqrt{2}$ とする．

$$\begin{aligned}f(t)&=t^2+\left(\frac{1}{4}t^2+a\right)^2=\frac{1}{16}t^4+\left(\frac{a}{2}+1\right)t^2+a^2\\&=\frac{1}{16}\{t^2+4(a+2)\}^2-4a-4\end{aligned}$$

C_1 と C_2 が接するとき，$f(t)$ の最小値が 8 であるから

$$-4a-4=8 \quad ゆえに \quad a=-3$$

$f(t)=(t^2-4)^2+8$ より，接点の x 座標は　　±2 ■

$\boxed{4}$ (1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$0<\angle\mathrm{AOB}<\pi$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}$ より

$$-4<\vec{a}\cdot\vec{b}<4 \quad \cdots①$$

$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ であるから

$$\vec{a}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0,\quad \vec{b}\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{p}=4,\ \vec{b}\cdot\vec{p}=4$$

$\vec{a},\ \vec{b}$ は，1 次独立であるから，$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とすると ($x,\ y$ は実数)

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=4\\ \vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=4\end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases}4x+(\vec{a}\cdot\vec{b})y=4\\ (\vec{a}\cdot\vec{b})x+4y=4\end{cases}$$

① に注意してこれを解くと $\quad x=y=\dfrac{4}{4+\vec{a}\cdot\vec{b}}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{4+\vec{a}\cdot\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b})$ が成立する．

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=2(4+\vec{a}\cdot\vec{b})$ であるから，(1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{8}{|\vec{a}+\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}$$

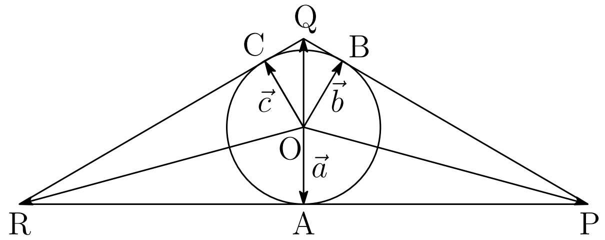
したがって $\quad \mathrm{OP}=\dfrac{8}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{8}{\sqrt{8+2\vec{a}\cdot\vec{b}}}=\dfrac{8}{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}$

$$=\frac{8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\mathbf{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

別解 $\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\cdot2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ゆえに $\angle\mathrm{AOB}=150^\circ$

$\angle\mathrm{AOP}=75^\circ$ であるから

$$\mathrm{OP}=\frac{\mathrm{OA}}{\cos75^\circ}=2\times\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\mathbf{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$



(3) 与えられた条件より，$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2\cdot 2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{AOC} = 150^\circ \quad \text{ゆえに} \quad \angle\mathrm{QPR} = \angle\mathrm{QRP} = 30^\circ$$

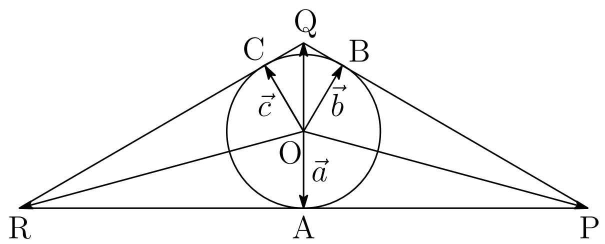
(2) と同様に　$\mathrm{OQ} = \dfrac{8}{\sqrt{8+2\vec{b}\cdot\vec{c}}} = \dfrac{8}{\sqrt{8+2\cdot 2}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$\triangle\mathrm{QRP}$ は，$\mathrm{PQ} = \mathrm{RQ}$ の二等辺三角形であるから

$$\mathrm{AQ} = \mathrm{OA} + \mathrm{OQ} = 2 + \frac{4}{\sqrt{3}},$$
$$\mathrm{PR} = 2\mathrm{AP} = 2\sqrt{3}\mathrm{AQ}$$

よって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{AQ} = \frac{1}{2}(2\sqrt{3}\mathrm{AQ})\cdot\mathrm{AQ} = \sqrt{3}\mathrm{AQ}^2$$
$$= \sqrt{3}\left(2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = \mathbf{16} + \frac{\mathbf{28}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$$



補足 $\cos\angle\mathrm{BOC} = \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \dfrac{2}{2\cdot 2} = \dfrac{1}{2}$ より，$\angle\mathrm{BOC} = 60^\circ$

$\angle\mathrm{BOQ} = 30^\circ$ であるから

$$\mathrm{OQ} = \frac{\mathrm{OB}}{\cos 30^\circ} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

■