令和５年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 令和５年２月25日

問題 1 2 3 4

1 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{2}{3}, \qquad 2(a_n - a_{n+1}) = (n+2)a_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3 を求めよ。

(2) $a_n \neq 0$ を示せ。

(3) $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$ を n の式で表せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

2 n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて，出た目の数の積をとる。積が 12 となる確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) p_2，p_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 4$ のとき，p_n を求めよ。

(3) $n \geqq 4$ とする。出た目の数の積が n 回目にはじめて 12 となる確率を求めよ。

3 原点をOとする座標平面上に3点A，B，Cがある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{w}$ とおく。$\vec{e_1}=(1,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1)$ とするとき，3つのベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ は

$$\begin{cases} \vec{u}=-\vec{e_1}, & & \\ \vec{v}\cdot\vec{e_1}=4, & |\vec{v}|=2\sqrt{5}, & \vec{v}\cdot\vec{e_2}<0, \\ \vec{w}\cdot\vec{e_1}=8, & |\vec{w}|=8\sqrt{2}, & \vec{w}\cdot\vec{e_2}>0 \end{cases}$$

を満たすとする。ただし，$|\vec{x}|$ はベクトル $\vec{x}$ の大きさを表し，$\vec{x}\cdot\vec{y}$ は2つのベクトル $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1) 3点A，B，Cの座標をそれぞれ求めよ。

(2) 3点A，B，Cを通る円の方程式を求めよ。

(3) 3点A，B，Cを通る円の中心をPとするとき，△ABPの面積を求めよ。

4 k は正の実数とし，2つの関数

$$f(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2-4x+\frac{7}{3}, \qquad g(x)=x^2+4x+4+k$$

を考える．xy 平面上の曲線 $y=f(x)$ を C_1 とし，放物線 $y=g(x)$ を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)-g(x)$ の極値を k を用いて表せ。

(2) C_1 と C_2 がちょうど2個の共有点をもつような k の値を求めよ。

(3) k を (2) で求めた値とする。C_1 と C_2 の2個の共有点を通る直線を ℓ とするとき，C_2 と ℓ で囲まれた図形と $x \geqq 0$ の表す領域の共通部分の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $(*)$　$2(a_n - a_{n+1}) = (n+2)a_n a_{n+1}$

$(*)$ に $n=1,\ 2$ を代入すると

$$2(a_1 - a_2) = 3a_1a_2, \quad 2(a_2 - a_3) = 4a_2a_3$$

$a_1 = \dfrac{2}{3}$ を上の第 1 式に代入して　$\boldsymbol{a_2 = \dfrac{1}{3}}$

これを第 2 式に代入すると

$$2\left(\frac{1}{3} - a_3\right) = 4\cdot\frac{1}{3}a_3 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a_3 = \frac{1}{5}}$$

(2) (1) の結果に注意して，$k \geqq 3$ に対して，$a_n \neq 0\ (n = 1, 2, \cdots, k)$，$a_{k+1} = 0$ と仮定し，$(*)$ に $n = k$ を代入すると，$a_k = 0$ となり，矛盾．よって　$a_n \neq 0$

(3) $(*)$ の両辺を $2a_na_{n+1}$ で割ると

$$\boldsymbol{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{n}{2} + 1}$$

(4) (3) の結果から，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{2} + 1\right)$$
$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{4}n(n-1) + n - 1$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから，$a_1 = \dfrac{2}{3}$ を代入して整理すると

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{4}(n+1)(n+2)$$

よって　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{4}{(n+1)(n+2)}}$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 2 回投げて出た目の数の積が 12 となるのは，出た目が $\{2,\ 6\}$, $\{3,\ 4\}$ であるから

$$p_2 = \frac{2!}{1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times 2 = \mathbf{\frac{1}{9}}$$

3 回投げて出た目の数の積が 12 となるのは，出た目が $\{1,\ 2,\ 6\}$，$\{1,\ 3,\ 4\}$，$\{2,\ 2,\ 3\}$ であるから

$$p_3 = \frac{3!}{1!1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 2 + \frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \mathbf{\frac{5}{72}}$$

(2) n 回の目の出方で，1 以外の目の出方は $\{2,\ 6\}$, $\{3,\ 4\}$, $\{2,\ 2,\ 3\}$ であるから

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{n!}{1!1!(n-2)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n \times 2 + \frac{n!}{2!1!(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \frac{2n(n-1)}{6^n} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2{\cdot}6^n} = \boldsymbol{\frac{n(n-1)(n+2)}{2{\cdot}6^n}} \end{aligned}$$

(3) $n-1$ 回目までの目の積が 12 で，n 回目で 1 の目が出る確率は

$$p_{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}p_{n-1}$$

これと (2) の結果から，求める確率は

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{6}p_{n-1} &= \frac{n(n-1)(n+2)}{2{\cdot}6^n} - \frac{1}{6}{\cdot}\frac{(n-1)(n-2)(n+1)}{2{\cdot}6^{n-1}} \\ &= \boldsymbol{\frac{(n-1)(3n+2)}{2{\cdot}6^n}} \end{aligned}$$

■

3 (1) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ は基本ベクトルであるから

$$\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{v}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2, \quad \vec{w} = (\vec{w}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{w}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2 \qquad (*)$$

したがって

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{v}\cdot\vec{e}_1)^2 + (\vec{v}\cdot\vec{e}_2)^2, \quad |\vec{w}|^2 = (\vec{w}\cdot\vec{e}_1)^2 + (\vec{w}\cdot\vec{e}_2)^2$$

$\vec{v}\cdot\vec{e}_1 = 4$, $|\vec{v}| = 2\sqrt{5}$, $\vec{w}\cdot\vec{e}_1 = 8$, $|\vec{w}| = 8\sqrt{2}$ を上の 2 式に代入すると

$$20 = 16 + (\vec{v}\cdot\vec{e}_2)^2, \quad 128 = 64 + (\vec{w}\cdot\vec{e}_2)^2$$

$\vec{v}\cdot\vec{e}_2 < 0$, $\vec{w}\cdot\vec{e}_2 > 0$ に注意して解くと　$\vec{v}\cdot\vec{e}_2 = -2$, $\vec{w}\cdot\vec{e}_2 = 8$
条件およびこれらの結果を $(*)$ に代入すると

$$\vec{v} = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 = (4, -2), \quad \vec{w} = 8\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 = (8,\ 8)$$

$\vec{u} = -\vec{e}_1 = (-1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{w}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,\ 0), \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4, -2), \quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (8,\ 8)$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 0) + (4, -2) = (3, -2), \\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (3, -2) + (8,\ 8) = (11,\ 6)\end{aligned}$$

以上の結果から　　**A(−1, 0)，B(3, −2)，C(11, 6)**

(2) 3 点 A$(-1,\ 0)$，B$(3, -2)$，C$(11,\ 6)$ を通る円の方程式を

$$x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$$

とおくと

$$\begin{cases} (-1)^2 + 0^2 + p\cdot(-1) + q\cdot 0 + r = 0 \\ 3^2 + (-2)^2 + p\cdot 3 + q\cdot(-2) + r = 0 \\ 11^2 + 6^2 + p\cdot 11 + q\cdot 6 + r = 0 \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} -p + r + 1 = 0 \\ 3p - 2q + r + 13 = 0 \\ 11p + 6q + r + 157 = 0 \end{cases}$$

これを解いて　$p = -8,\ q = -10,\ r = -9$

したがって，求める円の方程式は

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y - 9 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(x-4)^2 + (y-5)^2 = 50}$$

(3) (2) の結果から　P$(4,\ 5)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4, -2), \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (5,\ 5)$$

したがって　　$\triangle\mathrm{ABP} = \dfrac{1}{2}|4\cdot 5 - (-2)\cdot 5| = \mathbf{15}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと

$$h(x) = \frac{2}{3}x^3 - 8x - \frac{5}{3} - k$$
$$h'(x) = 2x^2 - 8 = 2(x+2)(x-2)$$

$h'(x) = 0$ とすると，$x = \pm 2$ であるから，$h(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって　$x = -2$ で極大値 $\boldsymbol{9 - k}$，$x = 2$ で極小値 $\boldsymbol{-\frac{37}{3} - k}$

(2) $h(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ，すなわち，$h(x)$ の極大値または極小値が 0 であるから

$$9 - k = 0 \quad \text{または} \quad -\frac{37}{3} - k = 0$$

$k > 0$ であるから　$\boldsymbol{k = 9}$

(3) $h(x) = 0$ を解くと　$\frac{2}{3}x^3 - 8x - \frac{32}{3} = 0$

$$x^3 - 12x - 16 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)^2(x-4) = 0$$

これを解いて　$x = -2,\ 4$

$g(x) = x^2 + 4x + 13$ より　$g(-2) = 9,\ g(4) = 45$

直線 ℓ は 2 点 $(-2,\ 9),\ (4,\ 45)$ を通る直線であるから

$$y - 9 = \frac{45 - 9}{4 - (-2)}(x + 2) \quad \text{すなわち} \quad y = 6x + 21$$

求める面積は右の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \{(6x+21) - (x^2+4x+13)\}\,dx \\ &= \int_0^4 (-x^2 + 2x + 8)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x\right]_0^4 = \boldsymbol{\frac{80}{3}} \end{aligned}$$