令和４年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 令和４年２月25日

問題 1 2 3 4

1 座標空間の６点

$$\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 3,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$$
$$\mathrm{D}\left(3, -1,\ \frac{5}{6}\right),\ \mathrm{E}\left(8,\ 4, -\frac{1}{3}\right),\ \mathrm{F}\left(5,\ 3,\ \frac{1}{2}\right)$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) ３点 A，B，C は一直線にないこと，および３点 D，E，F は一直線上にないことを示せ。

(2) ３点 A，B，C を通る平面と，３点 D，E，F を通る平面の交わりとして得られる直線を ℓ とする。ℓ 上の点を１つと，ℓ と平行なベクトルを１つ求めよ。

2 袋の中に赤玉２個と白玉２個の合計４個の玉が入っている。A と B の２人で次のルールに従ってゲームをする。

- A，B の順で繰り返しプレイヤーになる。
- プレイヤーは袋から玉を同時に２個取り出す。取り出した玉の色が同じならば，プレイヤーの勝利とする。取り出した玉の色が異なるならば，それらを袋に戻してよくかき混ぜ，プレイヤーを交換する。
- A が勝利するか，A が勝利せずに A の後に B がプレイヤーになり，B が勝利するか，B が勝利せずにプレイヤーを交換することによって１巡が終了する。
- 勝者が決まるとゲームは終了する。

以下の問いに答えよ。

(1) B が１巡目で勝者になる確率を求めよ。

(2) N を自然数とし，N 巡目以内に B が勝者になる確率を p_N とする。$p_N > 0.396$ となる N の最小値を求めよ。ただし，$\log_2 3 = 1.585$，$\log_2 5 = 2.322$ とする。

(3) N を自然数とする。N 巡目以内に勝者になる確率は，A と B のどちらが大きいか。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしているとする。$a_1 < a_2$ のとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n = 3, 4, 5, \cdots$ に対して

$$a_1 < a_n < a_2$$

が成り立つことを示せ。

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$b_n = a_{2n-1}, \quad c_n = a_{2n}$$

として数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を定めると，

$$b_n < b_{n+1} < c_{n+1} < c_n$$

が $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して成り立つことを示せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標平面上の曲線 $y = x^3 - 4x^2 - 4$ を C とする。曲線 C 上の点 $\mathrm{A}(4, -4)$ を通り，傾きが k の直線を ℓ とする。曲線 C と直線 ℓ が点 A の他に相異なる 2 つの共有点 P，Q をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1) k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 P，Q における曲線 C の接線をそれぞれ ℓ_{P}，ℓ_{Q} とする。k が (1) の範囲にあるとき，接線 ℓ_{P} と ℓ_{Q} の交点が描く曲線の方程式を求めよ。

(3) (2) の曲線と x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) A(2, 0, 0)，B(0, 3, 0)，C(0, 0, 1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2,\ 3,\ 0), \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-2,\ 0,\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の x 成分が等しく，y 成分および z 成分が異なる．

したがって，3 点 A，B，C は一直線上にない．

$\mathrm{D}\left(3, -1,\ \dfrac{5}{6}\right)$，$\mathrm{E}\left(8,\ 4, -\dfrac{1}{3}\right)$，$\mathrm{F}\left(5,\ 3,\ \dfrac{1}{2}\right)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \left(5,\ 5, -\frac{7}{6}\right), \quad \overrightarrow{\mathrm{DF}} = \left(2,\ 4, -\frac{1}{3}\right)$$

これから　$\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \left(1,\ 1, -\dfrac{7}{30}\right)$，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \left(1,\ 2, -\dfrac{1}{6}\right)$

$\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ の x 成分が等しく，y 成分および z 成分が異なる．

したがって，3 点 D，E，F は一直線上にない．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{u} = (3,\ 2,\ 6)$ とし，
$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{v} = (9, -2,\ 30)$ とする．
平面 ABC 上の点 P$(x,\ y,\ z)$ について，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ であるから

$$3(x-2) + 2y + 6z = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 3x + 2y + 6z = 6 \quad \cdots ①$$

平面 DEF 上の点 Q$(x,\ y,\ z)$ について，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}} = 0$ であるから

$$9(x-3) - 2(y+1) + 30\left(z - \frac{5}{6}\right) = 0$$

整理すると　$9x - 2y + 30z = 54 \quad \cdots ②$

①，② から y を消去すると　$x = -3z + 5 \quad \cdots ③$

③ を ① に代入すると　$z = \dfrac{2}{3}y + 3 \quad \cdots ④$

$y = 3t$ とおくと，③，④ より　$x = -6t - 4$，$z = 2t + 3$

したがって　$\ell : (x,\ y,\ z) = (-4,\ 0,\ 3) + t(-6,\ 3,\ 2)$

よって，ℓ は点 **(−4, 0, 3)** を通り，ベクトル **(−6, 3, 2)** に平行．　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 違う色の玉を取り出す確率は $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2} = \dfrac{2 \times 2}{6} = \dfrac{2}{3}$

同じ色の玉を取り確率は，上の余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

よって，B が 1 巡目で勝者になる確率は　$\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \mathbf{\dfrac{2}{9}}$

(2) N 巡目で B が勝者になる確率は　$\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}^{N-1} \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{N-1}$

よって，N 巡目以内に B が勝者になる確率 p_N は

$$p_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{2}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^N}{1 - \frac{4}{9}} = \boldsymbol{\frac{2}{5}\left\{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^N\right\}}$$

$p_N > 0.396$ となるとき　$\dfrac{2}{5}\left\{1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^N\right\} > 0.396$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^N < \frac{1}{100} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^N > 10$$

上の第 2 式について 2 を底とする対数をとると

$$N(\log_2 3 - 1) > 1 + \log_2 5 \quad \text{ゆえに} \quad 0.585N > 3.322$$

したがって　$N > \dfrac{3322}{585} = 5.6\cdots$　　よって　N の最小値は　$\mathbf{6}$

(3) N 巡目で A が勝者になる確率は　$\dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}^{N-1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{N-1}$

N 巡目以内に A が勝者になる確率を q_N とすると

$$q_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^N}{1 - \frac{4}{9}} = \boldsymbol{\frac{3}{5}\left\{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^N\right\}}$$

したがって　　$q_N - p_N = \dfrac{1}{5}\left\{1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^N\right\} > 0$

よって，求める確率は，**A の方が大きい．** ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{2}$ より

$$a_{n+2} + \frac{1}{2}a_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n, \qquad a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$$

したがって

$$a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n = a_2 + \frac{1}{2}a_1, \qquad a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

上の 2 式から，a_{n+1} を消去すると

$$a_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}a_2 + \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}a_1 \qquad (*)$$

$a_2 > a_1$ であるから，$n = 3, 4, 5\cdots$ に対して

$$a_n - a_1 = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}(a_2 - a_1) > 0,$$
$$a_n - a_2 = \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}(a_1 - a_2) < 0$$

よって　$a_1 < a_n < a_2 \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$

(2) $b_n = a_{2n-1}$，$c_n = a_{2n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は $(*)$ により

$$b_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}a_2 + \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}a_1,$$
$$c_n = \frac{2}{3}\left\{1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}a_2 + \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}a_1$$

したがって

$$b_{n+1} - b_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n (a_2 - a_1) > 0,$$
$$c_n - c_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n (a_2 - a_1) > 0,$$
$$c_{n+1} - b_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n (a_2 - a_1) > 0$$

よって　$b_n < b_{n+1} < c_{n+1} < c_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $C: y=x^3-4x^2-4$ 上の点 A$(4,-4)$ を通り，傾き k の直線 ℓ の方程式は

$$y+4=k(x-4) \quad \text{すなわち} \quad y=kx-4k-4$$

C と ℓ の方程式から，y を消去して整理すると

$$x^3-4x^2-kx+4k=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-4)(x^2-k)=0$$

この方程式が異なる 3 つの実数解をもつから，$k>0$ に注意して

$$k>0, \quad 4^2-k\neq 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{0<k<16,\ 16<k}$$

(2) (1) の結果から，2 点 P，Q の x 座標をそれぞれ $-\sqrt{k}$, $\sqrt{k}$ とすると

$$\mathrm{P}(-\sqrt{k}, -k\sqrt{k}-4k-4), \quad \mathrm{Q}(\sqrt{k},\ k\sqrt{k}-4k-4)$$

$f(x)=x^3-4x^2-4$ とおくと，$f'(x)=3x^2-8x$ より

$$f'(-\sqrt{k})=3k+8\sqrt{k}, \quad f'(\sqrt{k})=3k-8\sqrt{k}$$

したがって，2 直線 ℓ_{P}，ℓ_{Q} の方程式は

$$\ell_{\mathrm{P}}: y+k\sqrt{k}+4k+4=(3k+8\sqrt{k})x+(3k+8\sqrt{k})\sqrt{k}$$
$$\ell_{\mathrm{Q}}: y-k\sqrt{k}+4k+4=(3k-8\sqrt{k})x-(3k-8\sqrt{k})\sqrt{k}$$

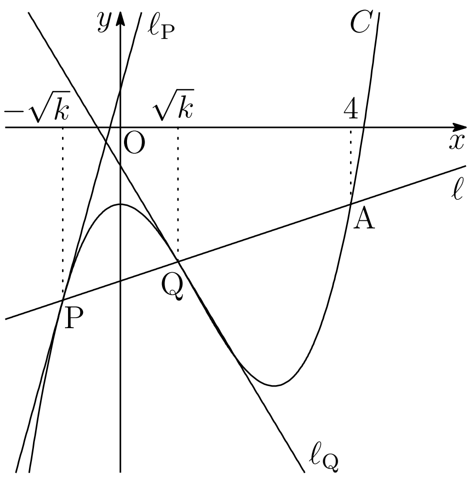
上の第 1 式から第 2 式を引くと

$$2k\sqrt{k}=16\sqrt{k}x+6k\sqrt{k} \quad \text{ゆえに} \quad x=-\frac{k}{4} \quad \cdots ①$$

また，第 1 式と第 2 式の辺々を加えると

$$2y+8k+8=6kx+16k \quad \text{ゆえに} \quad y=3kx+4k-4$$

① をこれに代入して　$y=-\dfrac{3}{4}k^2+4k-4 \quad \cdots ②$



① および (1) の結果から　$x < -4, -4 < x < 0$

① から $k = -4x$．これを ② に代入すると

$$y = -\frac{3}{4}(-4x)^2 + 4(-4x) - 4 = -12x^2 - 16x - 4$$

よって，求める曲線の方程式は

$$\boldsymbol{y = -12x^2 - 16x - 4 \quad (x < -4, -4 < x < 0)}$$

(3) (2) の曲線と x 軸との共有点の x 座標は

$$-12x^2 - 16x - 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (3x+1)(x+1) = 0$$

これを解いて　$x = -1, -\dfrac{1}{3}$

(2) の曲線と x 軸で囲まれた区間 $-1 \leqq x \leqq -\dfrac{1}{3}$ は (2) の結果を満たす．

したがって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{-\frac{1}{3}} (-12x^2 - 16x - 4)\,dx \\ &= -12\int_{-1}^{-\frac{1}{3}} (x+1)\left(x + \frac{1}{3}\right)dx \\ &= -12\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{-\frac{1}{3} - (-1)\right\}^3 = \boldsymbol{\frac{16}{27}} \end{aligned}$$

■