

令和3年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(教育学部, 医学部保健学科看護学専攻) 令和3年2月25日

- 1 2つの関数 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - 4$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$ について, 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の2つの交点の x 座標を a, b ($a > b$) とする。

- (1) a, b を求めよ。
 (2) 2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。
 (3) 実数 t は $t > |a|$ かつ $t > |b|$ を満たすとする。4つの不等式

$$x \geq a, y \leq f(x), y \geq g(x), x \leq t$$

を満たす領域の面積を S_1 , また, 4つの不等式

$$x \leq b, y \leq f(x), y \geq g(x), x \geq -t$$

を満たす領域の面積を S_2 とする。 S_1 と S_2 の和が (2) の S と等しいときの t の値を求めよ。

- 2 空間の点 O を通らない平面 α をとる。 α 上の3点 A, B, C は三角形をなすとし, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。直線 l は媒介変数 t を用いて

$$\frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$$

と表されたとする。

- (1) l は平面 α 上にあることを示せ。
 (2) l と辺 AC の交点を X とする。 \overrightarrow{OX} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ,
 (3) A, B の中点を D とし, $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OD}$ となる点 E を考える。点 O と l 上の点 Y を通る直線は2点 E, C を通る直線と交点をもつとし, その交点を F とする。このとき, \overrightarrow{OF} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

- 3 曲線 $C: y = x^3 - 2x^2 + x$ 上に点 $P_1(2, 2)$ がある。自然数 n ($n = 1, 2, 3, \dots$) に対して点 P_n から点 P_{n+1} を次のように定める。

点 P_n を接点とする C の接線を l_n とし、 C と l_n の共有点のうち、 P_n と異なるものを P_{n+1} とする。

点 P_n の x 座標を a_n とする。

- (1) P_2 の座標を求めよ。
 - (2) 接線 l_n の傾きおよび y 切片をそれぞれ a_n を用いて表せ。
 - (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- 4 a を $a > 1$ である実数とする。 x についての連立不等式

$$\begin{cases} x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 < 0 \\ 3x^2 - x < 4a - 12ax \end{cases}$$

の解について考える。連立不等式の解のうち整数であるものの個数を $m(a)$ とする。

- (1) 連立不等式を解け。
- (2) $a > 2$ のとき、 $m(a)$ の最小値を求めよ。
- (3) $m(a) = 4$ となる a の値の範囲を求めよ。

解答例

- 1 (1) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - 4$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$ について, 2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の x 座標は

$$\frac{3}{2}x^2 - 2x - 4 = \frac{1}{2}x^2 - x - 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-2) = 0$$

よって, 2つの共有点の x 座標は ($a > b$) $a = 2$, $b = -1$

- (2) $-1 \leq x \leq 2$ において

$$g(x) - f(x) = -(x^2 - x - 2) = -(x+1)(x-2) \geq 0$$

$$\text{よって} \quad S = \int_{-1}^2 \{g(x) - f(x)\} dx = \frac{1}{6} \{2 - (-1)\}^3 = \frac{9}{2}$$

- (3) (1) の結果から $t > |2|$ かつ $t > |-1|$ すなわち $t > 2$

$$S_1 = \int_2^t \{f(x) - g(x)\} dx, \quad S_2 = \int_{-t}^{-1} \{f(x) - g(x)\} dx$$

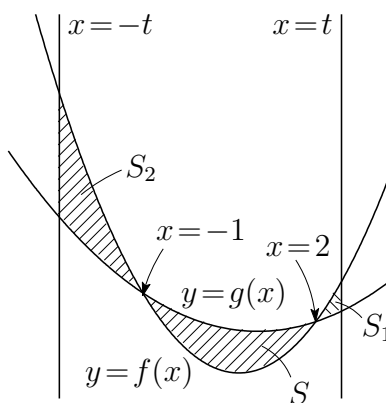
$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - x - 2$ とおくと

$$-S = \int_{-1}^2 h(x) dx, \quad S_1 = \int_2^t h(x) dx, \quad S_2 = \int_{-t}^{-1} h(x) dx$$

$S_1 + S_2 = S$ より, $S_2 - S + S_1 = 0$ であるから

$$\begin{aligned} S_2 - S + S_1 &= \int_{-t}^{-1} h(x) dx + \int_{-1}^2 h(x) dx + \int_2^t h(x) dx \\ &= \int_{-t}^t h(x) dx = 2 \int_0^t (x^2 - 2) dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} - 2x \right]_0^t \\ &= 2 \left(\frac{t^3}{3} - 2t \right) = \frac{2}{3} t(t^2 - 6) = 0 \end{aligned}$$

$t > 2$ に注意してこれを解くと $t = \sqrt{6}$



2 (1) ℓ 上の点について

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) \\ &= \frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{c} \quad \dots(*) \end{aligned}$$

このとき, \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} の係数の和は

$$\frac{2t}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right) = 1$$

よって, ℓ は平面 α 上の点である.

(2) X は (*) の \vec{b} の係数が 0 となる点であるから

$$\frac{1}{3} - \frac{t}{3} = 0 \quad \text{すなわち} \quad t = 1$$

に対応する点であるから $\vec{OX} = \frac{2\vec{a} + \vec{c}}{3}$

(3) ℓ 上の点 Y について, $\vec{OY} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$, $\vec{OC} = \vec{c}$ より

$$\begin{aligned} \vec{CY} &= \vec{OY} - \vec{OC} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) - \vec{c} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{c}) + \frac{t}{3}\{2(\vec{a} - \vec{c}) - (\vec{b} - \vec{c})\} \\ &= \frac{1}{3}\vec{CB} + \frac{t}{3}(2\vec{CA} - \vec{CB}) = \frac{2t}{3}\vec{CA} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{CB} \end{aligned}$$

\vec{CY} は $\vec{CD} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$ と平行であるから

$$\frac{2t}{3} = \frac{1}{3} - \frac{t}{3} \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{1}{3}$$

$$\vec{CY} = \frac{2}{9}(\vec{CA} + \vec{CB}) = \frac{4}{9}\vec{CD} \quad \text{すなわち} \quad \text{CY} : \text{YD} = 4 : 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

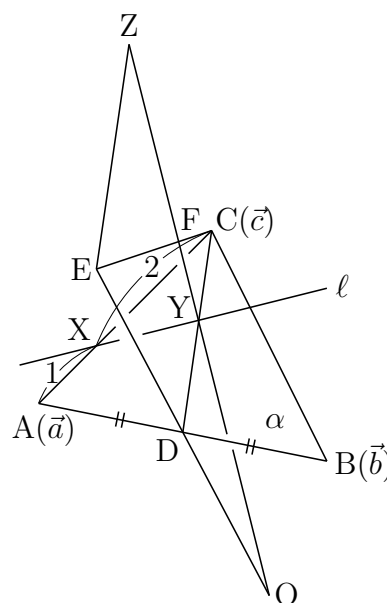
$\vec{OZ} = 2\vec{OY}$ となる点 Z をとると, 条件から

$$\triangle OYD \sim \triangle OZE, \quad \text{YD} : \text{ZE} = 1 : 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② および $\triangle CYF \sim \triangle EZF$ より $\text{CF} : \text{FE} = \text{CY} : \text{ZE} = 2 : 5$

このとき, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OE} = 2\vec{OD} = \vec{a} + \vec{b}$ であるから

$$\vec{OF} = \frac{5\vec{OC} + 2\vec{OE}}{2+5} = \frac{5\vec{c} + 2(\vec{a} + \vec{b})}{7} = \frac{1}{7}(2\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c})$$



3 (1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ とおくと $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線を l とすると

$$y - (t^3 - 2t^2 + t) = (3t^2 - 4t + 1)(x - t)$$

整理すると $l: y = (3t^2 - 4t + 1)x - 2t^3 + 2t^2$

C と l の共有点の x 座標は

$$x^3 - 2x^2 + x = (3t^2 - 4t + 1)x - 2t^3 + 2t^2$$

整理すると $(x - t)^2(x + 2t - 2) = 0$ ゆえに $x = t, -2t + 2$

したがって, C と l の共有点で点 $(t, f(t))$ と異なる点は

$$(-2t + 2, f(-2t + 2)) \quad (*)$$

点 $P_1(2, f(2))$ のとき

$$P_2(-2, f(-2)) \quad \text{すなわち} \quad P_2(-2, -18)$$

(2) l_n は l の方程式において, $t = a_n$ とすればよいから

$$l_n: y = (3a_n^2 - 4a_n + 1)x - 2a_n^3 + 2a_n^2$$

よって, l_n の傾き $3a_n^2 - 4a_n + 1$, y 切片 $-2a_n^3 + 2a_n^2$

(3) $P_1(2, 2)$ および $(*)$ から, $a_1 = 2$

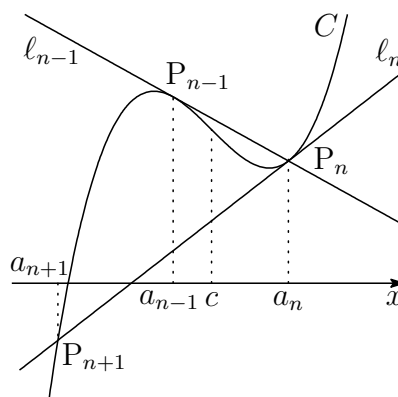
$$a_{n+1} = -2a_n + 2 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - \frac{2}{3} = -2 \left(a_n - \frac{2}{3} \right)$$

$$\text{したがって} \quad a_n - \frac{2}{3} = \left(a_1 - \frac{2}{3} \right) (-2)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{4}{3} (-2)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

補足 3次関数 $C: y = f(x)$ のグラフ上の点 $P_n(a_n, f(a_n))$ における接線 l_n とする. C と l_n の共有点のうち, P_n と異なるものを $P_{n+1}(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$ とし, C の変曲点の x 座標を c とすると

$$a_{n+1} - c = -2(a_n - c)$$

が成立する.



$$\boxed{4} \quad (1) \quad \begin{cases} x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 < 0 \\ 3x^2 - x < 4a - 12ax \end{cases}$$

第1式から $(x+2a)(x+a)(x-a) < 0$

$a > 1$ に注意して $x < -2a, -a < x < a \quad \cdots \textcircled{1}$

第2式から $(x+4a)(3x-1) < 0$

$a > 1$ に注意して $-4a < x < \frac{1}{3} \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の共通範囲を求めて

$$-4a < x < -2a, \quad -a < x < \frac{1}{3}$$

(2) $m(a)$ を

$$-\frac{1}{3} < x < a, \quad 2a < x < 4a$$

に含まれる整数の個数として求めてもよい. 集合 P, Q を

$$P = \{x \mid 0 \leq x < a, x \text{ は整数}\}$$

$$Q = \{x \mid 2a < x < 4a, x \text{ は整数}\}$$

とし, 集合 P, Q の要素の個数をそれぞれ $n(P), n(Q)$ とおくと

$$m(a) = n(P) + n(Q)$$

$[a]$ を a 以下の最大の整数とすると

$$(*) \quad n(P) = \begin{cases} [a] & (a \text{ が整数}) \\ [a] + 1 & (a \text{ が整数でない}) \end{cases}$$

$s = a - [a]$ とおくと, $a = [a] + s$ より

$$Q = \{x \mid 2[a] + 2s < x < 4[a] + 4s, x \text{ は整数}\}$$

(i) $s = 0$ のとき

$$Q = \{x \mid 2[a] + 1 \leq x \leq 4[a] - 1, x \text{ は整数}\}$$

$$n(Q) = 4[a] - 1 - (2[a] + 1) + 1 = 2[a] - 1$$

(ii) $0 < s \leq \frac{1}{4}$ のとき

$$Q = \{x \mid 2[a] + 1 \leq x \leq 4[a], x \text{ は整数}\}$$

$$n(Q) = 4[a] - (2[a] + 1) + 1 = 2[a]$$

(iii) $\frac{1}{4} < s < \frac{1}{2}$ のとき

$$Q = \{x \mid 2[a] + 1 \leq x \leq 4[a] + 1, x \text{ は整数}\}$$

$$n(Q) = 4[a] + 1 - (2[a] + 1) + 1 = 2[a] + 1$$

(iv) $s = \frac{1}{2}$ のとき

$$Q = \{x \mid 2[a] + 2 \leq x \leq 4[a] + 1, x \text{ は整数}\}$$

$$n(Q) = 4[a] + 1 - (2[a] + 2) + 1 = 2[a]$$

(v) $\frac{1}{2} < s \leq \frac{3}{4}$ のとき

$$Q = \{x \mid 2[a] + 2 \leq x \leq 4[a] + 2, x \text{ は整数}\}$$

$$n(Q) = 4[a] + 2 - (2[a] + 2) + 1 = 2[a] + 1$$

(vi) $\frac{3}{4} < s < 1$ のとき

$$Q = \{x \mid 2[a] + 2 \leq x \leq 4[a] + 3, x \text{ は整数}\}$$

$$n(Q) = 4[a] + 3 - (2[a] + 2) + 1 = 2[a] + 2$$

(*) および (i)~(vi) から

$$(**) \quad m(a) = \begin{cases} 3[a] - 1 & (s = 0) \\ 3[a] + 1 & (0 < s \leq \frac{1}{4}, s = \frac{1}{2}) \\ 3[a] + 2 & (\frac{1}{4} < s < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < s \leq \frac{3}{4}) \\ 3[a] + 3 & (\frac{3}{4} < s < 1) \end{cases}$$

$a > 2$ より, $2 < a \leq \frac{9}{4}$, $a = \frac{5}{2}$ のとき, $m(a)$ は最小値 **7** をとる.

(3) $m(a) = 4$ となるのは, (**) より

$$3[a] + 1 = 4, \quad 0 < s \leq \frac{1}{4}, \quad s = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad 1 < a \leq \frac{5}{4}, \quad a = \frac{3}{2}$$