令和３年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 令和 3 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 2 つの関数 $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-2x-4$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ について，曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の 2 つの交点の x 座標を a，b $(a>b)$ とする。

(1) a，b を求めよ。

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(3) 実数 t は $t>|a|$ かつ $t>|b|$ を満たすとする。4 つの不等式

$$x \geqq a,\quad y \leqq f(x),\quad y \geqq g(x),\quad x \leqq t$$

を満たす領域の面積を S_1，また，4 つの不等式

$$x \leqq b,\quad y \leqq f(x),\quad y \geqq g(x),\quad x \geqq -t$$

を満たす領域の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の和が (2) の S と等しいときの t の値を求めよ。

2 空間の点 O を通らない平面 α をとる。α 上の 3 点 A，B，C は三角形をなすとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。直線 ℓ は媒介変数 t を用いて

$$\frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$

と表されるとする。

(1) ℓ は平面 α 上にあることを示せ。

(2) ℓ と辺 AC の交点を X とする。$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ，

(3) A，B の中点を D とし，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となる点 E を考える。点 O と ℓ 上の点 Y を通る直線は 2 点 E，C を通る直線と交点をもつとし，その交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

3 曲線 $C : y = x^3 - 2x^2 + x$ 上に点 $\mathrm{P}_1(2,\ 2)$ がある。自然数 n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して点 P_n から点 P_{n+1} を次のように定める。

> 点 P_n を接点とする C の接線を ℓ_n とし，C と ℓ_n の共有点のうち，P_n と異なるものを P_{n+1} とする。

点 P_n の x 座標を a_n とする。

(1) P_2 の座標を求めよ。

(2) 接線 ℓ_n の傾きおよび y 切片をそれぞれ a_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

4 a を $a > 1$ である実数とする。x についての連立不等式

$$\begin{cases} x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 < 0 \\ 3x^2 - x < 4a - 12ax \end{cases}$$

の解について考える。連立不等式の解のうち整数であるものの個数を $m(a)$ とする。

(1) 連立不等式を解け。

(2) $a > 2$ のとき，$m(a)$ の最小値を求めよ。

(3) $m(a) = 4$ となる a の値の範囲を求めよ。

解答例

1 (1) $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-2x-4$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ について，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標は

$$\frac{3}{2}x^2-2x-4=\frac{1}{2}x^2-x-2 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-2)=0$$

よって，2 つの共有点の x 座標は $(a>b)$ $\quad \boldsymbol{a=2,\ b=-1}$

(2) $-1 \leqq x \leqq 2$ において

$$g(x)-f(x)=-(x^2-x-2)=-(x+1)(x-2) \geqq 0$$

よって $\quad S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\{g(x)-f(x)\}=\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$

(3) (1) の結果から $\quad t>|2| \quad$ かつ $\quad t>|-1| \quad$ すなわち $\quad t>2$

$$S_1=\int_{2}^{t}\{f(x)-g(x)\}\,dx, \quad S_2=\int_{-t}^{-1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

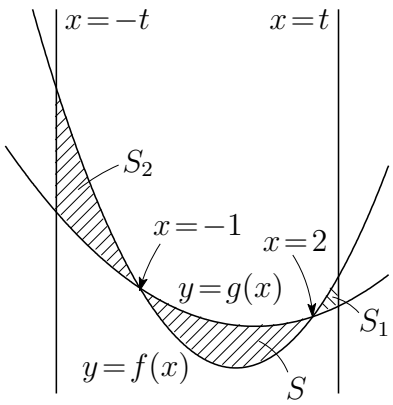
$h(x)=f(x)-g(x)=x^2-x-2$ とおくと

$$-S=\int_{-1}^{2}h(x)\,dx, \quad S_1=\int_{2}^{t}h(x)\,dx, \quad S_2=\int_{-t}^{-1}h(x)\,dx$$

$S_1+S_2=S$ より，$S_2-S+S_1=0$ であるから

$$\begin{aligned}S_2-S+S_1&=\int_{-t}^{-1}h(x)\,dx+\int_{-1}^{2}h(x)\,dx+\int_{2}^{t}h(x)\,dx\\&=\int_{-t}^{t}h(x)\,dx=2\int_{0}^{t}(x^2-2)\,dx=2\left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_0^t\\&=2\left(\frac{t^3}{3}-2t\right)=\frac{2}{3}t(t^2-6)=0\end{aligned}$$

$t>2$ に注意してこれを解くと $\quad \boldsymbol{t=\sqrt{6}}$ ■



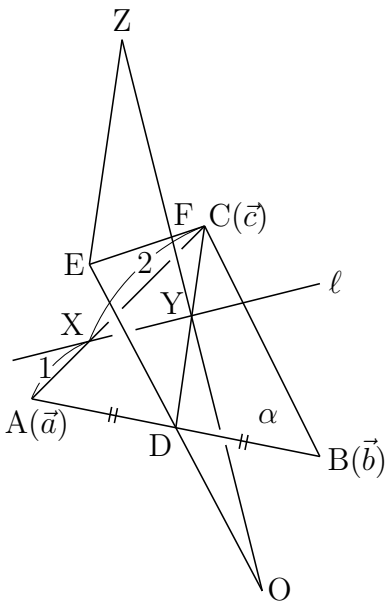
2 (1) ℓ 上の点について

$$\frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$
$$=\frac{2t}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}\quad\cdots(*)$$

このとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数の和は

$$\frac{2t}{3}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)=1$$

よって，ℓ は平面 α 上の点である．



(2) X は $(*)$ の $\vec{b}$ の係数が 0 となる点であるから

$$\frac{1}{3}-\frac{t}{3}=0\quad すなわち\quad t=1$$

に対応する点であるから　$\boldsymbol{\overrightarrow{OX}=\frac{2\vec{a}+\vec{c}}{3}}$

(3) ℓ 上の点 Y について，$\overrightarrow{OY}=\frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ より

$$\overrightarrow{CY}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})-\vec{c}$$
$$=\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{c})+\frac{t}{3}\{2(\vec{a}-\vec{c})-(\vec{b}-\vec{c})\}$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{t}{3}(2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})=\frac{2t}{3}\overrightarrow{CA}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\overrightarrow{CB}$$

$\overrightarrow{CY}$ は $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$ と平行であるから

$$\frac{2t}{3}=\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\quad これを解いて\quad t=\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{CY}=\frac{2}{9}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{4}{9}\overrightarrow{CD}\quad すなわち\quad CY:YD=4:5\quad\cdots①$$

$\overrightarrow{OZ}=2\overrightarrow{OY}$ となる点 Z をとると，条件から

$$\triangle OYD\backsim\triangle OZE,\quad YD:ZE=1:2\quad\cdots②$$

①，② および $\triangle CYF\backsim\triangle EZF$ より　$CF:FE=CY:ZE=2:5$

このとき，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{OF}=\frac{5\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OE}}{2+5}=\frac{5\vec{c}+2(\vec{a}+\vec{b})}{7}=\boldsymbol{\frac{1}{7}(2\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c})}$$

■

3 (1) $f(x)=x^3-2x^2+x$ とおくと　$f'(x)=3x^2-4x+1$

曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とすると

$$y-(t^3-2t^2+t)=(3t^2-4t+1)(x-t)$$

整理すると　$\ell: y=(3t^2-4t+1)x-2t^3+2t^2$

C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x^3-2x^2+x=(3t^2-4t+1)x-2t^3+2t^2$$

整理すると　$(x-t)^2(x+2t-2)=0$　ゆえに　$x=t,-2t+2$

したがって，C と ℓ の共有点で点 $(t,\ f(f))$ と異なる点は

$$(-2t+2,\ f(-2t+2)) \qquad (*)$$

点 $\mathrm{P}_1(2,\ f(2))$ のとき

$$\mathrm{P}_2(-2,\ f(-2))\quad \text{すなわち}\quad \mathbf{P_2(-2,-18)}$$

(2) ℓ_n は ℓ の方程式において，$t=a_n$ とすればよいから

$$\ell_n: y=(3{a_n}^2-4a_n+1)x-2{a_n}^3+2{a_n}^2$$

よって，ℓ_n の傾き $\boldsymbol{3{a_n}^2-4a_n+1}$，$y$ 切片 $\boldsymbol{-2{a_n}^3+2{a_n}^2}$

(3) $\mathrm{P}_1(2,\ 2)$ および $(*)$ から，$a_1=2$

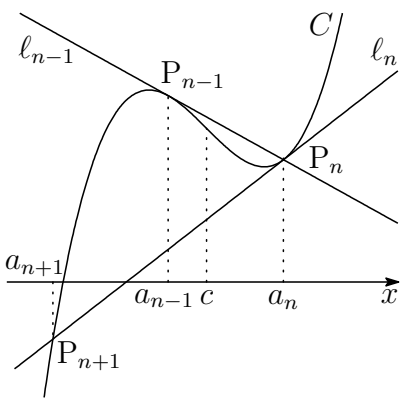
$$a_{n+1}=-2a_n+2\quad \text{ゆえに}\quad a_{n+1}-\frac{2}{3}=-2\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$$

したがって　$a_n-\dfrac{2}{3}=\left(a_1-\dfrac{2}{3}\right)(-2)^{n-1}$　よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{4}{3}(-2)^{n-1}+\dfrac{2}{3}}$

補足 3 次関数 $C: y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ f(a_n))$ における接線 ℓ_n とする．C と ℓ_n の共有点のうち，P_n と異なるものを $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ f(a_{n+1}))$ とし，C の変曲点の x 座標を c とすると

$$a_{n+1}-c=-2(a_n-c)$$

が成立する．



■

4 (1) $\begin{cases} x^3+2ax^2-a^2x-2a^3<0 \\ 3x^2-x<4a-12ax \end{cases}$

第 1 式から　$(x+2a)(x+a)(x-a)<0$

$a>1$ に注意して　$x<-2a,\ -a<x<a$　$\cdots$①

第 2 式から　$(x+4a)(3x-1)<0$

$a>1$ に注意して　$-4a<x<\dfrac{1}{3}$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて

$$\boldsymbol{-4a<x<-2a,\ -a<x<\frac{1}{3}}$$

(2) $m(a)$ を

$$-\frac{1}{3}<x<a,\ 2a<x<4a$$

に含まれる整数の個数として求めてもよい．集合 $P,\ Q$ を

$$P=\{x\,|\,0\leqq x<a,\ x \text{ は整数}\}$$
$$Q=\{x\,|\,2a<x<4a,\ x \text{ は整数}\}$$

とし，集合 $P,\ Q$ の要素の個数をそれぞれ $n(P),\ n(Q)$ とおくと

$$m(a)=n(P)+n(Q)$$

$[a]$ を a 以下の最大の整数とすると

$$(*)\quad n(P)=\begin{cases} [a] & (a \text{ が整数}) \\ [a]+1 & (a \text{ が整数でない}) \end{cases}$$

$s=a-[a]$ とおくと，$a=[a]+s$ より

$$Q=\{x\,|\,2[a]+2s<x<4[a]+4s,\ x \text{ は整数}\}$$

(i) $s=0$ のとき

$$Q=\{x\,|\,2[a]+1\leqq x\leqq 4[a]-1,\ x \text{ は整数}\}$$
$$n(Q)=4[a]-1-(2[a]+1)+1=2[a]-1$$

(ii) $0<s\leqq\dfrac{1}{4}$ のとき

$$Q=\{x\,|\,2[a]+1\leqq x\leqq 4[a],\ x \text{ は整数}\}$$
$$n(Q)=4[a]-(2[a]+1)+1=2[a]$$

(iii) $\dfrac{1}{4} < s < \dfrac{1}{2}$ のとき

$$Q = \{x \mid 2[a]+1 \leqq x \leqq 4[a]+1,\ x \text{ は整数}\}$$
$$n(Q) = 4[a]+1-(2[a]+1)+1 = 2[a]+1$$

(iv) $s = \dfrac{1}{2}$ のとき

$$Q = \{x \mid 2[a]+2 \leqq x \leqq 4[a]+1,\ x \text{ は整数}\}$$
$$n(Q) = 4[a]+1-(2[a]+2)+1 = 2[a]$$

(v) $\dfrac{1}{2} < s \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき

$$Q = \{x \mid 2[a]+2 \leqq x \leqq 4[a]+2,\ x \text{ は整数}\}$$
$$n(Q) = 4[a]+2-(2[a]+2)+1 = 2[a]+1$$

(vi) $\dfrac{3}{4} < s < 1$ のとき

$$Q = \{x \mid 2[a]+2 \leqq x \leqq 4[a]+3,\ x \text{ は整数}\}$$
$$n(Q) = 4[a]+3-(2[a]+2)+1 = 2[a]+2$$

$(*)$ および (i)〜(vi) から

$$(**) \quad m(a) = \begin{cases} 3[a]-1 & (s=0) \\ 3[a]+1 & (0 < s \leqq \frac{1}{4},\ s = \frac{1}{2}) \\ 3[a]+2 & (\frac{1}{4} < s < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < s \leqq \frac{3}{4}) \\ 3[a]+3 & (\frac{3}{4} < s < 1) \end{cases}$$

$a > 2$ より，$2 < a \leqq \dfrac{9}{4}$，$a = \dfrac{5}{2}$ のとき，$m(a)$ は最小値 **7** をとる．

(3) $m(a) = 4$ となるのは，$(**)$ より

$$3[a]+1 = 4,\quad 0 < s \leqq \frac{1}{4},\ s = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{1 < a \leqq \frac{5}{4},\ a = \frac{3}{2}}$$

■