令和２年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 令和２年２月25日

1 a を定数とし，$y=(\sin\theta+a)(\cos\theta+a)$ とする。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とするとき，y を a と t を用いて表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) y の最大値と最小値を a を用いて表せ。

2 $a<b<c$ を満たす実数 a，c と整数 b に対し，$g(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ とする。また，$f(x)=g(x)-g'(x)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $f(a)<0$，$f(b)>0$，$f(c)<0$ となることを示せ。

(2) $f(x)=(x+1)(x^2-4x+2)$ のとき，a，b，c の値を求めよ。

(3) (2) で求めた a，b，c から定まる曲線 $y=g(x)$ と $y=f(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

3 xy 平面において，x，y がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶ。n を自然数とするとき，3 直線 $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{n}{3}$，$y=x-n$，$x=n$ で囲まれた図形を D_n とする。また，D_n の周上および内部の格子点の個数を L_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) L_3 を求めよ。

(2) k を 0 以上の整数とする。直線 $\ell : x=n+3k$ が D_n と交わるとき，D_n の周上および内部の格子点で ℓ 上にあるものの個数を n と k を用いて表せ。

(3) L_n を n を用いて表せ。

4 k，s，t を実数とする。座標空間に原点 O，A$(1,-1,\ 1)$，B$(0,\ 1,\ 1)$，C$(-1,\ 0,\ k)$ の 4 点をとる。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ で定まる点を D，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で定まる点を E とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ により定まる点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標を k，s，t を用いて表せ。

(2) 点 P が $0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ を満たしながら動くとき，点 P が動いてできる平行四辺形を $P(k)$ とし，その面積を $S(k)$ とする。k が実数全体を動くとき，$S(k)$ の最小値と，そのときの k の値を求めよ。

(3) (2) で求めた k に対し，平行四辺形 $P(k)$ を底面とし，点 O を頂点とする四角錐の体積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=(\sin\theta+a)(\cos\theta+a)$ より

$$y=\sin\theta\cos\theta+a(\sin\theta+\cos\theta)+a^2$$

$t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を平方すると

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta \qquad \text{ゆえに} \quad \sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

よって $\quad y=\dfrac{t^2-1}{2}+at+a^2=\boldsymbol{\dfrac{t^2}{2}+at+a^2-\dfrac{1}{2}}$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$ より $\quad t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから $\qquad \boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}}$

(3) $y=f(t)$ とおくと，(1) の結果から

$$f(t)=\frac{1}{2}(t+a)^2+\frac{a^2-1}{2} \quad (-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$$

したがって，$y=f(t)$ は，下に凸の放物線である．
軸は $t=-a$，定義域 $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の中央は $\quad t=0$

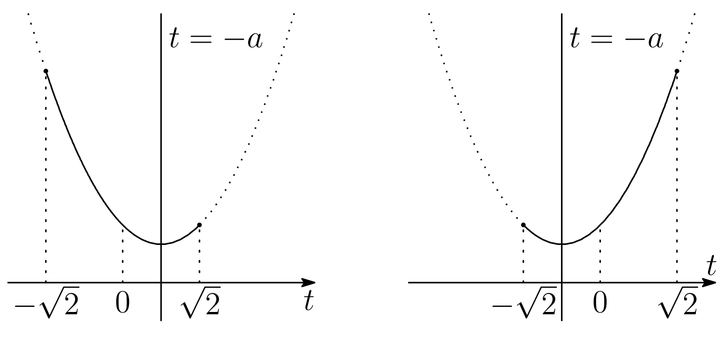
(i) $0<-a$ 　すなわち　$a<0$ のとき

最大値 $f(-\sqrt{2})=\boldsymbol{a^2-\sqrt{2}a+\dfrac{1}{2}}$

(ii) $-a\leqq 0$ 　すなわち　$a\geqq 0$ のとき

最大値 $f(\sqrt{2})=\boldsymbol{a^2+\sqrt{2}a+\dfrac{1}{2}}$

(i) $0<-a$ のとき $(a<0)$ 　　　(ii) $-a\leqq 0$ のとき $(a\geqq 0)$



2 次関数 (下に凸の放物線) の閉区間における最大値

定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり，
定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる．

最小値は，次の 3 つの場合に分けて求める．

(i) $\sqrt{2} < -a$　すなわち　$a < -\sqrt{2}$ のとき

最小値 $f(\sqrt{2}) = \boldsymbol{a^2 + \sqrt{2}a + \dfrac{1}{2}}$

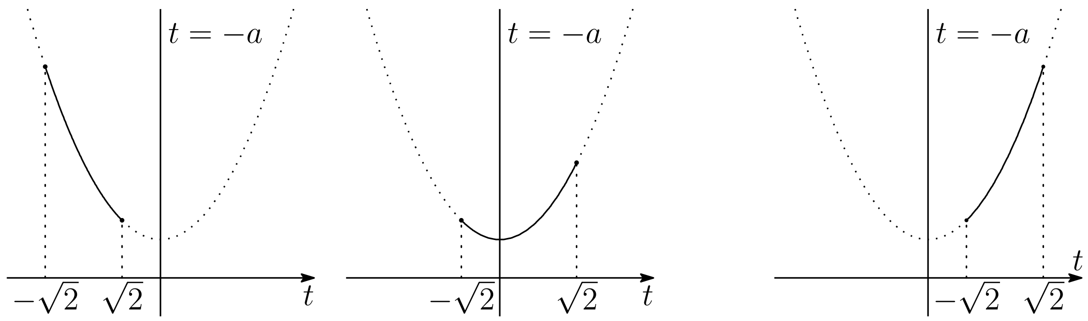
(ii) $-\sqrt{2} \leqq -a \leqq \sqrt{2}$　すなわち　$-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき

最小値 $f(-a) = \boldsymbol{\dfrac{a^2-1}{2}}$

(iii) $-a < -\sqrt{2}$　すなわち　$\sqrt{2} < a$ のとき

最小値 $f(-\sqrt{2}) = \boldsymbol{a^2 - \sqrt{2}a + \dfrac{1}{2}}$

(i) $\sqrt{2} < -a$ のとき $(a < -\sqrt{2})$　(ii) $-\sqrt{2} \leqq -a \leqq \sqrt{2}$ のとき $(-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2})$　(iii) $-a < -\sqrt{2}$ のとき $(\sqrt{2} < a)$



$\boxed{\textbf{2}}$ (1) $g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ より　$g(a) = g(b) = g(c) = 0$　$\cdots(*)$

$g(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ac+bc+ca)x - abc$ であるから

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca \\ &= (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) \end{aligned}$$

$a < b < c$ であるから

$$(**) \quad \begin{cases} g'(a) = (a-b)(a-c) > 0 \\ g'(b) = (b-c)(b-a) < 0 \\ g'(c) = (c-a)(c-b) > 0 \end{cases}$$

$f(x) = g(x) - g'(x)$ は，$(*)$，$(**)$ により

$$\begin{aligned} f(a) &= g(a) - g'(a) < 0, \\ f(b) &= g(b) - g'(b) > 0, \\ f(c) &= g(c) - g'(c) < 0 \end{aligned}$$

(2) $p=a+b+c$，$q=ab+bc+ca$，$r=abc$ とおくと，(1) の結果から

$$g(x)=x^3-px^2+qx-r, \quad g'(x)=3x^2-2px+q$$

ゆえに　$g(x)-g'(x)=x^3-(p+3)x^2+(2p+q)x-q-r$

また　　$f(x)=(x+1)(x-2-4x+2)=x^3-3x^2-2x+2$

$f(x)=g(x)-g'(x)$ であるから

$$x^3-3x^2-2x+2=x^3-(p+3)x^2+(2p+q)x-q-r$$

同じ次数の項の係数を比較すると

$$-3=-(p+3), \quad -2=2p+q, \quad 2=-q-r$$

これを解いて　　$p=0,\ q=-2,\ r=0$

$a,\ b,\ c$ を解とする 3 次方程式は，$t^3-pt^2+qt-r=0$，すなわち

$$t^3-2t=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=0,\ \pm\sqrt{2}$$

$a<b<c$ であるから　　$\boldsymbol{a=-\sqrt{2},\ b=0,\ c=\sqrt{2}}$

(3) $y=g(x)$，$y=f(x)$ の共有点の x 座標は，$f(x)-g(x)=-g'(x)$ より

$$f(x)-g(x)=0 \quad \text{すなわち} \quad -g'(x)=-(3x^2-2)=0$$

これを解いて　　$x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$-\sqrt{\dfrac{2}{3}} \leqq x \leqq \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ において

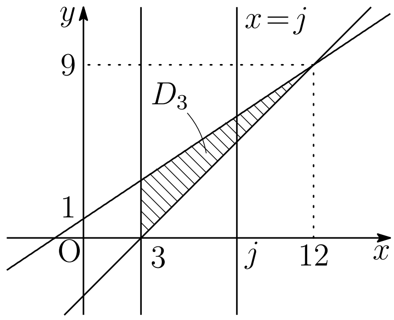
$$f(x)-g(x)=-g'(x)=-3x^2+2 \geqq 0$$

よって，求める面積を S とすると

$$S=\int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}}(-3x^2+2)\,dx$$

$$=\Big[-x^3+2x\Big]_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{6}}{9}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $n=3$ のとき，3 直線



$$y=\frac{2}{3}x+1,\quad y=x-3,\quad x=3$$

で囲まれた領域 D_3 で，直線 $x=j$ 上の格子点の個数は $(3 \leqq j \leqq 12)$

$$\left[\frac{2}{3}j+1\right]-(j-3)+1=\left[\frac{15-j}{3}\right]$$

よって，求める個数は ($[x]$ は x を超えない最大の整数を表す)

$$\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]+\left[\frac{6}{3}\right]+\left[\frac{7}{3}\right]+\left[\frac{8}{3}\right]+\left[\frac{9}{3}\right]+\left[\frac{10}{3}\right]+\left[\frac{11}{3}\right]+\left[\frac{12}{3}\right]$$

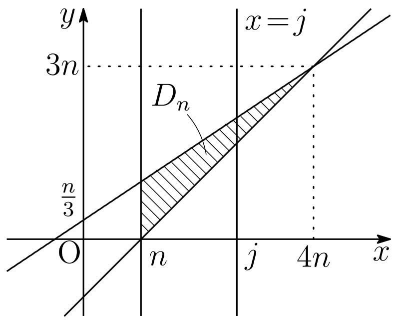
$$=\left(\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]\right)+\left(\left[\frac{6}{3}\right]+\left[\frac{7}{3}\right]+\left[\frac{8}{3}\right]\right)$$

$$+\left(\left[\frac{9}{3}\right]+\left[\frac{10}{3}\right]+\left[\frac{11}{3}\right]\right)+\left[\frac{12}{3}\right]$$

$$=3+6+9+4=\mathbf{22}$$

補足 次頁の定理を参照.

(2) 3 直線



$$y=\frac{2}{3}x+\frac{n}{3},\quad y=x-n,\quad x=n$$

で囲まれた領域 D_n で，直線 $x=j$ 上の格子点の個数を a_j とすると $(n \leqq j \leqq 4n)$

$$\begin{aligned}a_j&=\left[\frac{2}{3}j+\frac{n}{3}\right]-(j-n)+1\\&=\left[\frac{4n-j}{3}\right]+1\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

求める個数は $\quad a_{n+3k}=\left[\dfrac{4n-(n+3k)}{3}\right]+1=\boldsymbol{n-k+1}$

(3) $(*)$ より $$a_{n+3k+1} = \left[\ \frac{4n-(n+3k+1)}{3}\ \right] + 1 = n-k$$
$$a_{n+3k+2} = \left[\ \frac{4n-(n+3k+2)}{3}\ \right] + 1 = n-k$$

上の 2 式および (2) の結果により

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{j=n}^{4n} a_j = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{n+3k} + a_{n+3k+1} + a_{n+3k+2}) + a_{4n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\{(n-k+1)+(n-k)+(n-k)\} + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)+k+k\} + 1 = \sum_{k=1}^{n}(3k+1) + 1 \\ &= 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)} \end{aligned}$$

別解 $(*)$ により

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{j=n}^{4n} a_j = \sum_{j=n}^{4n}\left(\left[\ \frac{4n-j}{3}\ \right] + 1\right) = \sum_{j=n}^{4n}\left[\ \frac{4n-j}{3}\ \right] + \sum_{j=n}^{4n} \\ &= \left(\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{3}{3}\right]\right) + \left(\left[\frac{4}{3}\right] + \left[\frac{5}{3}\right] + \left[\frac{6}{3}\right]\right) \\ &\qquad + \cdots + \left(\left[\frac{3n-2}{3}\right] + \left[\frac{3n-1}{3}\right] + \left[\frac{3n}{3}\right]\right) + (3n+1) \\ &= 1 + 4 + \cdots + (3n-2) + (3n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)\{1+(3n+1)\} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)} \end{aligned}$$

定理 a，n を整数とすると，次式が成立する．

$$\text{(A)} \quad \boldsymbol{\left[\frac{a}{n}\right] + \left[\frac{a+1}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{a+n-1}{n}\right] = a}$$

証明 連続する n 個の整数 $a,\ a+1, \cdots, a+n-1$ 中で n の倍数を $a+q$ とする．

$q=0$ のとき (A) のすべての項が $\dfrac{a}{n}$ であるから，(A) の値は $\dfrac{a}{n}\cdot n = a$

$q \neq 0$ のとき $$\left[\frac{a}{n}\right] = \left[\frac{a+1}{n}\right] = \cdots = \left[\frac{a+q-1}{n}\right] = \frac{a+q}{n} - 1,$$
$$\left[\frac{a+q}{n}\right] = \left[\frac{a+q+1}{n}\right] = \cdots = \left[\frac{a+n-1}{n}\right] = \frac{a+q}{n}$$

(A) の値は $\left(\dfrac{a+q}{n} - 1\right)q + \dfrac{a+q}{n}(n-q) = a$ 証終

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$$

したがって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=\{t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\}-(1-s)\vec{a}\\&=-\vec{a}+\vec{c}+s\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{c})\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

$-\vec{a}+\vec{c}=(-2,\ 1,\ k-1)$，$\vec{b}-\vec{c}=(1,\ 1,\ 1-k)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(-2,\ 1,\ k-1)+s(1,-1,\ 1)+t(1,\ 1,\ 1-k)\\&=(-2+s+t,\ 1-s+t,\ k-1+s+t(1-k))\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{P}(\boldsymbol{-2+s+t,\ 1-s+t,\ k-1+s+t(1-k)})$

(2) $\vec{d}=\vec{b}-\vec{c}$ とおくと，$(*)$ において $0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の描く図形は，2 つのベクトル

$$\vec{a}=(1,-1,\ 1),\quad \vec{d}=(1,\ 1,\ 1-k)$$

によって張られる平行四辺形であるから，その面積 $S(k)$ は

$$S(k)=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{d}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{d})^2}$$

このとき
$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2&=1^2+(-1)^2+1^2=3\\|\vec{d}|^2&=1^2+1^2+(1-k)^2=k^2-2k+3\\\vec{a}\cdot\vec{d}&=1\cdot1+(-1)\cdot1+1(1-k)=1-k\end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned}S(k)&=\sqrt{3(k^2-2k+3)-(1-k)^2}\\&=\sqrt{2(k-1)^2+6}\end{aligned}$$

よって，$S(k)$ は，$\boldsymbol{k=1}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{6}}$ をとる．

別解 $\vec{a}$ と $\vec{d}$ のベクトル積 (外積) は　$\vec{a}\times\vec{d}=(k-2,\ k,\ 2)$

ゆえに　$S(k)=|\vec{a}\times\vec{d}|=\sqrt{(k-2)^2+k^2+4}=\sqrt{2(k-1)^2+6}$

注意 ベクトル積 (外積) は，高校数学の範囲外であるが，検算として利用できる．2018 年度の熊大入試において，四面体の体積についてベクトル積を用いた受験生の解答があったが，間違いではなかったため，減点されることはなかったそうである (熊大入試連絡会)．

(3) $k=1$ より，平行四辺形 $P(1)$ は，次の 2 つのベクトルに平行である．

$$\vec{a}=(1,-1,\ 1),\quad \vec{d}=(1,\ 1,\ 0)$$

これらに垂直な単位ベクトルの 1 つは (外積と平行なベクトル)

$$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,\ 1,\ 2)$$

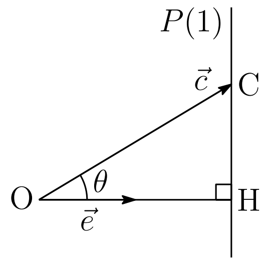
$(*)$ より，$P(1)$ 上の 1 点 $\mathrm{C}(\vec{c})$ をもとに $(s=1,\ t=0)$，点 O から $P(1)$ を含む平面に垂線 OH を引くと，$\vec{c}=(-1,\ 0,\ 1)$ より

$$\vec{c}\cdot\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{6}}\{-1\cdot(-1)+0\cdot1+1\cdot2\}=\frac{3}{\sqrt{6}},$$
$$\mathrm{OH}=|\vec{c}\cdot\vec{e}|=\frac{3}{\sqrt{6}}$$

求める四角錐の体積は $\quad \dfrac{1}{3}S(1)\cdot\mathrm{OH}=\dfrac{1}{3}\sqrt{6}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{6}}=\mathbf{1}$

補足 右の図において

$$\vec{c}\cdot\vec{e}=|\vec{c}||\vec{e}|\cos\theta=|\vec{c}|\cos\theta,$$
$$\mathrm{OH}=|\vec{c}||\cos\theta|$$



ゆえに $\qquad \mathrm{OH}=|\vec{c}\cdot\vec{e}|$

例えば，$P(1)$ 上の位置ベクトル $-\vec{a}+\vec{c}=(-2,\ 1,\ 0)$ でもよい．

$$(-\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{6}}\{-2\cdot(-1)+1\cdot1+0\cdot2\}=\frac{3}{\sqrt{6}}$$

別解 $\vec{f}=-\vec{a}+\vec{c}$ とおくと $(\vec{d}=\vec{b}-\vec{c})$，$(*)$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{f}+s\vec{a}+t\vec{d}\quad(0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1)$$

$P(1)$ の頂点を $\mathrm{P_0}(\vec{f})$，$\mathrm{P_1}(\vec{f}+\vec{a})$，$\mathrm{P_2}(\vec{f}+\vec{d})$，$\mathrm{P_3}(\vec{f}+\vec{a}+\vec{d})$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{P_0O}}=-\vec{f},\quad \overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}=\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}=\vec{d}$$

四面体 $\mathrm{OP_0P_1P_2}$ の体積 V は，$\vec{a}\times\vec{d}=(-1,\ 1,\ 2)$，$-\vec{f}=(2,-1,\ 0)$ より

$$V=\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{d})\cdot(-\vec{f})\right|=\frac{1}{6}|(-1)\cdot2+1\cdot(-1)+2\cdot0|=\frac{1}{2}$$

よって，求める体積は $\qquad 2V=2\times\dfrac{1}{2}=1$

ベクトル積

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積 (外積)** という．
2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のベクトル積は

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

であり，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

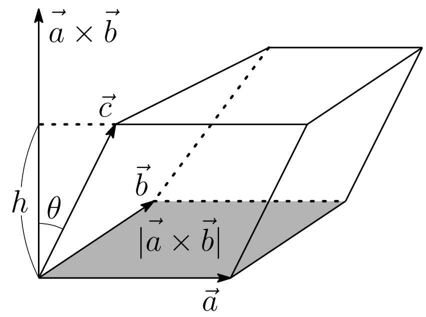
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

両辺の絶対値をとると

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は　$\boldsymbol{V=\dfrac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．