平成 31 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成 31 年 2 月 25 日

$\boxed{1}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して $a_n \neq 2$ を示せ。

(2) $b_n = \dfrac{3}{a_n - 2} + 1$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $a_n > \dfrac{5}{2}$ を満たす自然数 n を求めよ。

$\boxed{2}$ 1 個のさいころを投げて，出た目の数を a とする。a が偶数のときは $b = \dfrac{1}{2}a$，a が奇数のときは $b = \dfrac{1}{2}(a + 3)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a > b$ となる確率を求めよ。

(2) $\sin\dfrac{\pi}{5} > 0.5$ および $\cos\dfrac{\pi}{5} < 0.9$ を示せ。

(3) $S = \cos\dfrac{\pi}{a} + \sin\dfrac{\pi}{b}$ とおく。$a > b$ であるとき，$S < 1.7$ となる条件付き確率を求めよ。

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a，b に対して，$f(x) = x^2 + ax + b$ とおく。$y = f(x)$ は x 軸および直線 $y = 2x + 3$ に接しているとする。実数 a，b を求めよ。このとき，$y = f(x)$，x 軸および直線 $y = 2x + 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) 座標平面上の曲線 $C_1 : y = x^2 + 2px - 2p$ および $C_2 : y = x^3$ の共有点がちょうど 2 個になるような実数 p の値をすべて求めよ。

$\boxed{4}$ 座標平面上の直線 ℓ を $y = ax - a - 2$，直線 m を $y = bx + 3b$ とおく。直線 ℓ と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a，b は ℓ と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 A$(1, -2)$，点 B$(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) $\triangle$APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a_1 \neq 2$ であるから，第 $m+1$ 項で初めて $a_{m+1}=2$ になると仮定すると，漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n}+1\cdots(*)$ に $n=m$ を代入すると

$$2=\frac{2}{a_m}+1 \quad \text{すなわち} \quad a_m=2$$

第 m 項ですでに $a_m=2$ となり，矛盾を生じる．
よって，すべての自然数 n に対して　$a_n \neq 2$

(2) $b_n=\dfrac{3}{a_n-2}+1\cdots(**)$ より　$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-2}$　これと $(*)$ により

$$a_{n+1}+1=\frac{2}{a_n}+2=\frac{2(a_n+1)}{a_n}$$
$$a_{n+1}-2=\frac{2}{a_n}-1=\frac{-(a_n-2)}{a_n}$$

上の 2 式から　$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-2}=-2\cdot\dfrac{a_n+1}{a_n-2}$　すなわち　$b_{n+1}=-2b_n$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{a_1+1}{a_1-2}=\dfrac{1+1}{1-2}=-2$，公比 -2 の等比数列であるから

$$b_n=b_1\cdot(-2)^{n-1}=\boldsymbol{(-2)^n}$$

補足 $\{a_n\}$ の特性方程式 $x=\dfrac{2}{x}+1$ の解が $2,-1$ であるから，数列 $\left\{\dfrac{a_n+1}{a_n-2}\right\}$ は等比数列である．

(3) $(**)$ より　$b_n-1=\dfrac{3}{a_n-2}$　ゆえに　$a_n-2=\dfrac{3}{b_n-1}$

上式および (2) の結果から　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{3}{(-2)^n-1}+2}$

(4) (3) の結果を $a_n>\dfrac{5}{2}$ に代入すると

$$\frac{3}{(-2)^n-1}+2>\frac{5}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{(-2)^n-1}>\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$$

したがって　$0<(-2)^n-1<6$　ゆえに　$1<(-2)^n<7$

これを満たす自然数 n は　$\boldsymbol{n=2}$

分数漸化式

p，q，$r \neq 0$，s を定数とする漸化式

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \cdots (*)$$

の一般項について，以下に述べる．
$ps - qr = 0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps - qr \neq 0$ とする．
$(*)$ の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s - p)x - q = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α，β とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \cdots (***)$$
$$a_{n+1} - \beta = \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき，上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$$

したがって $$\frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \frac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha}\left(\frac{r\alpha + s}{r\beta + s}\right)^{n-1}$$

上式から，a_n が求まる．

ii) $\alpha = \beta$ のとき，$(*)$ の係数の係数について

$$(s - p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p + s)^2 = 4(ps - qr) \quad \cdots ①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha = \frac{p - s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \cdots ②$$

①，② により，$(***)$ は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p + s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p + s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p + s)\}} \end{aligned}$$

逆数をとると $\quad \dfrac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\dfrac{1}{a_n-\alpha}+\dfrac{2r}{p+s}$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項が $\dfrac{1}{a_1-\alpha}$，公差が $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる．

例えば，大分大学 2001 年の漸化式 [1]

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=\frac{2a_n}{3a_n+5}$$

の特性方程式 $x=\dfrac{2x}{3x+5}$ の解が $0, -1$ であるから

$$a_{n+1}+1=\frac{5(a_n+1)}{3a_n+5}$$

したがって $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1}+1}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{a_n}{a_n+1}$ $\quad$ ゆえに $\quad \dfrac{a_n}{a_n+1}=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$

よって $\quad a_n=\dfrac{3\cdot 2^{n-1}}{4\cdot 5^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}}$

次に，宮崎大学 2003 年の漸化式 [2]

$$a_1=\frac{q}{p}\ (p>q>0),\quad a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}\ (n=1,2,\cdots)$$

の特性方程式 $x=\dfrac{1}{2-x}$，すなわち $x^2-2x+1=0$ は重解 1 をもつから

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$$

ゆえに $\quad \dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{1}{\frac{q}{p}-1}-(n-1)$ $\quad$ よって $\quad a_n=\dfrac{(n-1)p-(n-2)q}{np-(n-1)q}$

---

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2001.pdf $\boxed{1}$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/miyazaki/miyazaki_2003.pdf $\boxed{12}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) a に対する b の値は，次のようになる．

a	1	2	3	4	5	6
b	2	1	3	2	4	3

このとき，$a>b$ となるのは，次の 4 通り

a	2	4	5	6
b	1	2	4	3

よって，求める確率は　$\dfrac{4}{6}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

(2) $\sin\dfrac{\pi}{5}>\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ より　$\sin\dfrac{\pi}{5}>0.5$

$\cos\dfrac{\pi}{5}<\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}<\sqrt{0.81}=0.9$　ゆえに　$\cos\dfrac{\pi}{5}<0.9$

(3) $\cos\dfrac{\pi}{4}=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{0.5}$,　$\sqrt{0.49}<\sqrt{0.5}<\sqrt{0.64}$ より

$$0.7<\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}<0.8$$

(2) および上の結果に注意すると，$a<b$ となる $(a,\ b)$ について

$(a,\ b)=(2,\ 1)$ のとき　$S=\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\pi=0<1.7$

$(a,\ b)=(4,\ 2)$ のとき　$S=\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{2}>0.7+1=1.7$

$(a,\ b)=(5,\ 4)$ のとき　$S=\cos\dfrac{\pi}{5}+\sin\dfrac{\pi}{4}<0.9+0.8=1.7$

$(a,\ b)=(6,\ 3)$ のとき　$S=\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}>\sqrt{1.7^2}=1.7$

よって，求める条件付き確率は　$\dfrac{2}{4}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

補足 $a<b$ である事象を X，$S<1.7$ である事象を Y とすると

$$P_X(Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}}=\frac{1}{2}$$

$(a,\ b)=(1,\ 2)$ のとき　$S=\cos\pi+\sin\dfrac{\pi}{2}=0<1.7$

$(a,\ b)=(3,\ 3)$ のとき　$S=\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1.7$

$P(Y)=\dfrac{4}{6}$ より，$P_X(Y)\neq P(Y)$ であるから，X と Y は独立ではない．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y = x^2 + ax + b$ が x 軸に接するから，係数について

$$a^2 - 4b = 0 \quad \cdots ①$$

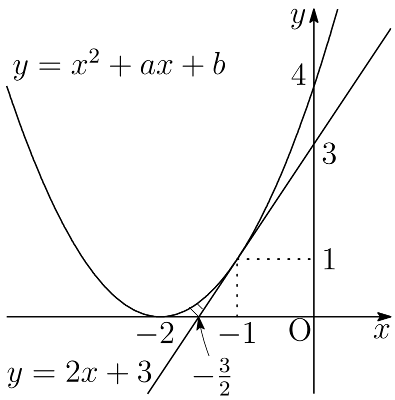
$y = x^2 + ax + b$ と $y = 2x + 3$ から y を消去して整理すると

$$x^2 + (a-2)x + b - 3 = 0$$

この方程式は重解をもつから

$$(a-2)^2 - 4(b-3) = 0 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　　$\boldsymbol{a = 4,\ b = 4}$



3 点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$，$(-1,\ 0)$，$(-1,\ 1)$ を頂点する三角形の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1 = \dfrac{1}{4}$

よって，求める面積を S とすると [3]

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1} (x^2 + 4x + 4)\,dx - \frac{1}{4} \\ &= \int_{-2}^{-1} (x+2)^2\,dx - \frac{1}{4} = \left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^{-1} - \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{12}} \end{aligned}$$

(2) $y = x^2 + 2px - 2p$ と $y = x^3$ から y を消去すると

$$x^2 + 2px - 2p = x^3 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x^2 - 2p) = 0 \quad \cdots (*)$$

(i) $x^2 - 2p = 0$ が重解をもつとき　$p = 0$
これを $(*)$ に代入して　　$(x-1)x^2 = 0$

(ii) $x^2 - 2p = 0$ が 1 を解にもつとき　$1 - 2p = 0$　ゆえに　$p = \dfrac{1}{2}$
これを $(*)$ に代入して　　$(x+1)(x-1)^2 = 0$

(i),(ii) で得られた結果は条件を満たす．よって　$\boldsymbol{p = 0,\ \frac{1}{2}}$

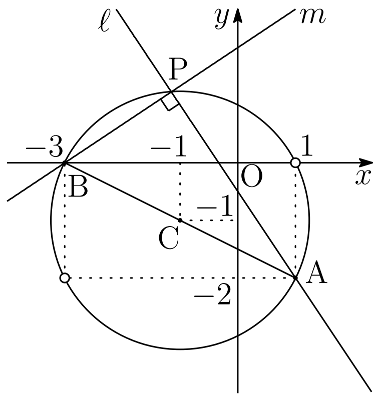
[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ の補足を参照．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\ell : y = ax - a - 2$ は $y + 2 = a(x-1)$ より，点 A$(1, -2)$ を通り，傾き a の直線．

$m : y = bx + 3b$ は $y = b(x+3)$ より，点 B$(-3,\ 0)$ を通り，傾き b の直線．

ℓ と m は直交するから，ℓ と m の交点 P は，線分 AB を直径とする円周上を動く．
線分 AB の中点を C とすると　C$(-1, -1)$

$$\mathrm{CA} = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$$



求める点 P の軌跡は，2 直線 ℓ，m が x 軸と垂直ではないことに注意して

$$\boldsymbol{(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5,\quad (x,\ y) \neq (1,\ 0),\ (-3, -2)}$$

(2) $\ell \perp m$ より，$ab = -1$ であるから

$$\ell : ax - y - a - 2 = 0,\quad m : x + ay + 3 = 0$$

線分 AP の長さは，点 A$(1, -2)$ と直線 m の距離であるから

$$\mathrm{AP} = \frac{|1 + a\cdot(-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + a^2}} = \boldsymbol{\frac{2|a-2|}{\sqrt{a^2+1}}}$$

線分 BP の長さは，点 B$(-3,\ 0)$ と直線 ℓ の距離であるから

$$\mathrm{BP} = \frac{|a\cdot(-3) + 0 - a - 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \boldsymbol{\frac{2|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}}$$

(3) △APB の面積が最大となるとき，P は線分 AB の垂直二等分線上にあるから，AP = BP より

$$\frac{2|a-2|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{2|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}\quad ゆえに\quad |a-2| = |2a+1|$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = \frac{1}{3}, -3}$

別解　直線 AB の傾きは，その偏角を θ とすると　$\tan\theta = -\frac{1}{2}$
△APB の面積が最大となるとき，ℓ の傾き a は

$$a = \tan(\theta \pm 45^\circ) = \frac{\tan\theta \pm \tan 45^\circ}{1 \mp \tan\theta\tan 45^\circ} = \frac{-\frac{1}{2} \pm 1}{1 \pm \frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm 2}{2 \pm 1} = \frac{1}{3}, -3$$