平成 30 年度　熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成 30 年 2 月 25 日

1 p，q を整数とする。関数 $f(x) = x^3 - px^2 + (p^2 - 2p)x + q$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が極値をもつときの整数 p の値をすべて求めよ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が負の解 1 つと相異なる正の解 2 つをもつとき，整数 p，q の値を求めよ。

2 正三角形 ABC が半径 1 の円に内接しているとする。P は点 A，B と異なる点で，A，B を両端とし点 C を含まない弧の上を動くものとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\angle \mathrm{PBA} = \theta$ とおくとき，PA，PB，PC をそれぞれ θ を用いて表せ。また，$\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC}$ の最大値を求めよ。

(2) $\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$ を求めよ。

3 m，n を整数とする。xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

(1) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある確率を求めよ。

(2) 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころの 1 の目が上にある確率を求めよ。

4 初項が 1 である数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。$\{S_n\}$ が

$$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n \quad (n \geqq 1)$$

をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，a_{n+1} を a_n と n を用いて表せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき，a_n を n の式で表せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=x^3-px^2+(p^2-2p)x+q$ より　$f'(x)=3x^2-2px+p^2-2p$

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると，$D/4>0$ であるから

$$(-p)^2-3(p^2-2p)>0 \quad \text{ゆえに} \quad p(p-3)<0$$

p は整数であるから　　$\boldsymbol{p=1,\ 2}$

(2) (1) の結果は，方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつための必要条件である．

(i) $p=1$ のとき，$f(x)=x^3-x^2-x+q$ より

$$f'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$$

与えられた条件を満たすとき，$f(0)>0$，$f(1)<0$ であるから

$$q>0,\quad q-1<0 \quad \text{すなわち} \quad 0<q<1$$

q は整数であるから，これを満たす q は存在しない．

(ii) $p=2$ のとき，$f(x)=x^3-2x^2+q$ より

$$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$$

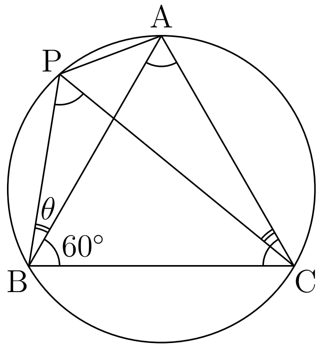
与えられた条件を満たすとき，$f(0)>0$，$f\left(\dfrac{4}{3}\right)<0$ であるから

$$q>0,\quad q-\frac{32}{27}<0 \quad \text{すなわち} \quad 0<q<\frac{32}{27}$$

q は整数であるから　$q=1$

(i),(ii) より　　$\boldsymbol{p=2,\ q=1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\angle\mathrm{PBA} = \theta$ より，右の図から



$$\angle\mathrm{PBC} = 60^\circ + \theta, \quad \angle\mathrm{PCB} = 60^\circ - \theta$$

$\triangle\mathrm{PBA}$，$\triangle\mathrm{PBC}$ は半径 1 の円に内接しているから，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin\theta} = 2\cdot 1,$$

$$\frac{\mathrm{PB}}{\sin(60^\circ - \theta)} = \frac{\mathrm{PC}}{\sin(60^\circ + \theta)} = 2\cdot 1$$

ゆえに　$\mathbf{PA = 2\sin\boldsymbol{\theta}}$

$\mathbf{PB = 2\sin(60^\circ - \boldsymbol{\theta})}$，$\mathbf{PC = 2\sin(60^\circ + \boldsymbol{\theta})}$

加法定理により　$\sin(60^\circ - \theta) + \sin(60^\circ + \theta) = 2\sin 60^\circ \cos\theta = \sqrt{3}\cos\theta$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC} &= 2\{\sin\theta + \sin(60^\circ - \theta) + \sin(60^\circ + \theta)\} \\ &= 2(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta) \\ &= 4\sin(\theta + 60^\circ)\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC}$ は，$\theta = 30^\circ$ のとき，最大値 $\mathbf{4}$ をとる．

(2) $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2 &= 2\{2\sin^2\theta + 2\sin^2(60^\circ - \theta) + 2\sin^2(60^\circ + \theta)\} \\ &= 2\{3 - \cos 2\theta - \cos(120^\circ - 2\theta) - \cos(120^\circ + 2\theta)\} \\ &= 6 - 2\{\cos 2\theta + \cos(120^\circ - 2\theta) + \cos(120^\circ + 2\theta)\}\end{aligned}$$

ここで，加法定理により

$$\cos(120^\circ - 2\theta) + \cos(120^\circ + 2\theta) = 2\cos 120^\circ \cos 2\theta = -\cos 2\theta$$

上式より，$\cos 2\theta + \cos(120^\circ - 2\theta) + \cos(120^\circ + 2\theta) = 0$ であるから

$$\mathbf{PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) さいころが $R_{(m,n)}$ から $R_{(m+i,n+j)}$ の位置に移る確率を $P_{(i,j)}$ とすると

$$P_{(i,j)} = {}_{i+j}\mathrm{C}_i \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \frac{{}_{i+j}\mathrm{C}_i}{2^{i+j}} \quad \cdots (*)$$

である ($i,\ j$ は 0 以上の整数).

$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,4)}$ に移る確率であるから，$(*)$ に $i=2$，$j=3$ を代入して

$$P_{(2,3)} = \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{2^5} = \frac{10}{32} = \mathbf{\frac{5}{16}}$$

(2) 事象 A，B を，次のように定める

A : 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にある.

B : 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある.

$P(A)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置に移る確率であるから，$(*)$ により

$$P(A) = P_{(2,0)} + P_{(0,2)} = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$P(A \cap B)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置を通って，$R_{(3,4)}$ の位置に移る確率であるから

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P_{(2,0)}P_{(0,3)} + P_{(0,2)}P_{(2,1)} \\ &= \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2} \cdot \frac{{}_3\mathrm{C}_0}{2^3} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2} \cdot \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{2^3} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

(3) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころの 1 の目が上にあるとき，途中反転する (1 の目が上から下，下から上)．5 回投げる中で反転は 2 度起き，さいころの 1 の目が下にくるのは硬貨を 2 回目または 3 回目に投げたあとである．

さいころが 2 回で反転する事象を X とすると，X が起きるのは．硬貨が「表表」または「裏裏」の順に出るときであるから，その確率は

$$P(X) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

さいころが 3 回で反転する事象を Y とすると，Y が起きるのは，硬貨が「表裏表」または「裏表裏」の順に出るときであるから，その確率は

$$P(Y) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

求める確率は，X, Y または Y, X の順に起こる確率であるから

$$P(X)P(Y) + P(Y)P(X) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $S_1 = a_1 = 1$，$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n \quad \cdots (*)$

$(*)$ に $n = 1,\ 2$ を代入すると

$$S_2 = 2S_1 + 1^2 + 2{\cdot}1 = 5$$
$$S_3 = 2S_2 + 2^2 + 2{\cdot}2 = 18$$

よって　$a_2 = S_2 - S_1 = 5 - 1 = \mathbf{4}$，　$a_3 = S_3 - S_2 = 18 - 5 = \mathbf{13}$

(2) $(*)$ より　$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n$

$$S_n = 2S_{n-1} + (n-1)^2 + 2(n-1)$$

上の 2 式の辺々を引くと　$\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1}$

(3) 1 次関数 $f(n) = pn + q$ が，すべての n について，次式を満たすとき

$$f(n+1) = 2f(n) + 2n + 1 \quad \cdots ①$$

したがって　$p(n+1) + q = 2(pn + q) + 2n + 1$

整理すると　$pn + p + q = (2p + 2)n + 2q + 1$

上式は，n に関する恒等式であるから

$$p = 2p + 2,\ \ p + q = 2q + 1 \quad \text{これを解いて} \quad p = -2,\ \ q = -3$$

ゆえに　$f(n) = -2n - 3 \quad \cdots ②$

(2) の結果と ① の辺々を引くと

$$a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$$

$f(2) = -2{\cdot}2 - 3 = -7$ であるから，$a_2 - f(2) = 4 - (-7) = 11$ より

$$a_n - f(n) = 11{\cdot}2^{n-2} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = 11{\cdot}2^{n-2} + f(n)$$

これに ② を代入して　$\boldsymbol{a_n = 11{\cdot}2^{n-2} - 2n - 3 \ \ (n \geqq 2)}$