

平成 29 年度 熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部, 医学部保健学科看護学専攻) 平成 29 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 原点を O とする座標空間内に 3 点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある。ただし, $c > 0$ とする。 $\angle BAC = \theta$ とし, $\triangle ABC$ の面積を S とするとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $\cos \theta$, $\sin \theta$ を c を用いて表せ。
- (2) 点 O を中心とする半径 1 の球面上の点を H とする。ベクトル \overrightarrow{HA} , \overrightarrow{HB} , \overrightarrow{HC} がいずれもベクトル \overrightarrow{OH} に垂直であるとき, c の値を求めよ。
- (3) (2) の条件のもとで, 面積 S を求めよ。

2 n は 5 以上の自然数とする。赤玉 3 個と白玉 7 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し, 色を確認してからもとに戻すという試行を n 回行う。以下の問いに答えよ。

- (1) n 回目に 3 度目の赤玉が出る確率を求めよ。
- (2) 2 度以上連続することなく 3 度赤玉が出る確率を求めよ。
- (3) n 回目に 3 度目の赤玉が出たとき, 2 度以上連続することなく 3 度赤玉が出ている条件付き確率を求めよ。

3 $f(x) = x^2 + x$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$a_1 = 8$ とする。 a_n ($n \geq 1$) に対して, 座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a_n^2, f(a_n^2))$ における接線と直線 $y = x$ との交点の x 座標を a_{n+1} とする。ただし, a_n^2 は a_n の 2 乗を表す。

以下の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対し, $a_n > 0$ が成り立つことを示せ。
- (2) $b_n = \log_2 a_n$ とおくとき, b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

4 t は 0 でない実数とする。座標平面上の曲線 $C_1 : y = (x - t)^2 + 2t^3 - t^2$ と曲線 $C_2 : y = 2x^3 - x^2$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点が 2 個になるような t を求めよ。
- (2) t を (1) で求めた値とし、曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点を A, B とする。ただし、点 A の x 座標は、点 B の x 座標より小さいとする。このとき、点 A, B における曲線 C_2 の接線 l_A, l_B と曲線 C_1 で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答例

- 1 (1) $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, c)$ より

$$\vec{AB} = (-2, 4, 0), \quad \vec{AC} = (-2, 0, c)$$

2つのベクトル \vec{AB} , \vec{AC} のなす角が θ であるから

$$\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{4}{2\sqrt{5}\sqrt{c^2+4}} = \frac{2}{\sqrt{5(c^2+4)}}$$

また, $\sin \theta > 0$ であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{4}{5(c^2+4)}} = \sqrt{\frac{5c^2+16}{5(c^2+4)}}$$

- (2) $H(x, y, z)$ とおくと, H は原点 O を中心とする半径 1 の球面上の点であるから

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$\vec{HA} = (2-x, -y, -z)$, $\vec{HB} = (-x, 4-y, -z)$, $\vec{HC} = (-x, -y, c-z)$ がいずれも $\vec{OH} = (x, y, z)$ に垂直であるから

$$(2-x)x - y^2 - z^2 = 0$$

$$-x^2 + (4-y)y - z^2 = 0$$

$$-x^2 - y^2 + (c-z)z = 0$$

① に注意してこれらを整理すると

$$2x = 1, \quad 4y = 1, \quad cz = 1$$

上の 3 式から, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$, $z = \frac{1}{c}$ を ① に代入して

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{c^2} = 1$$

$c > 0$ に注意してこれを解くと $c = \frac{4}{\sqrt{11}}$

- (3) (1) の結果から

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{c^2+4} \times \sqrt{\frac{5c^2+16}{5(c^2+4)}} = \sqrt{5c^2+16}$$

これに (2) の結果を代入すると

$$S = \sqrt{5 \times \frac{16}{11} + 16} = \frac{16}{\sqrt{11}}$$



- 2 (1) $n - 1$ 回目までに赤玉が2度出て、 n 回目に赤玉が出る確率であるから

$$\begin{aligned} {}_{n-1}C_2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^{n-3} \times \frac{3}{10} &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{3^2}{10^2} \cdot \frac{7^{n-3}}{10^{n-3}} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{27(n-1)(n-2) \cdot 7^{n-3}}{2 \cdot 10^n} \end{aligned}$$

- (2) n 回の試行で2度以上連続することなく赤玉が3度出る順の総数は、 $n - 3$ 個の白玉を一行に並べ、赤玉をその間と両側を含めた $n - 2$ 箇所から赤玉を配置する3箇所を選ぶ組合せの総数であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} {}_{n-2}C_3 \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{7}{10}\right)^{n-3} &= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} \cdot \frac{27}{10^3} \cdot \frac{7^{n-3}}{10^{n-3}} \\ &= \frac{9(n-2)(n-3)(n-4) \cdot 7^{n-3}}{2 \cdot 10^n} \end{aligned}$$

- (3) n 回目に3度目の赤玉が出る事象を A 、2度以上連続することなく3度赤玉が出る事象を B とすると、求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

事象 $A \cap B$ は、 $n - 1$ 回目まで赤玉が連続することなく2度出て、 n 回目に赤玉が出ることである。その総数は、(2)と同様に $n - 3$ 個の白玉とその最後に赤玉1個を一行に並べ、白玉の間とその前を含めた $n - 3$ 箇所から赤玉を配置する2箇所を選ぶ組合せの総数であるから、その確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= {}_{n-3}C_2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^{n-3} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{(n-3)(n-4)}{2} \cdot \frac{9}{10^2} \cdot \frac{7^{n-3}}{10^{n-3}} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{27(n-3)(n-4) \cdot 7^{n-3}}{2 \cdot 10^n} \end{aligned}$$

また、 $P(A)$ は、(1)で求めた確率であるから、求める条件付き確率は

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{27(n-3)(n-4) \cdot 7^{n-3}}{2 \cdot 10^n} \times \frac{2 \cdot 10^n}{27(n-1)(n-2) \cdot 7^{n-3}} \\ &= \frac{(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$



3 (1) $f(x) = x^2 + x$ を微分すると $f'(x) = 2x + 1$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 + t) = (2t + 1)(x - t)$$

すなわち
$$y = (2t + 1)x - t^2$$

これと直線 $y = x$ の方程式から y を消去すると

$$(2t + 1)x - t^2 = x \quad \text{ゆえに} \quad 2t \left(x - \frac{1}{2}t \right) = 0$$

$t = a_n^2$ とすると, $a_n > 0$ のとき, $t \neq 0$ であるから

$$x = \frac{1}{2}t \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^2 > 0$$

$a_1 = 8 > 0$ により, すべての自然数 n に対して $a_n > 0$

(2) $a_n > 0$ より ($n \geq 1$), $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^2$ の両辺を 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 \frac{1}{2}a_n^2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 a_{n+1} = 2\log_2 a_n - 1$$

$$b_n = \log_2 a_n \text{ であるから} \quad \mathbf{b_{n+1} = 2b_n - 1}$$

(3) (2) の結果から $b_{n+1} - 1 = 2(b_n - 1)$

また $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 8 = 3$

数列 $\{b_n - 1\}$ は, 初項が $b_1 - 1 = 2$, 公比 2 の等比数列であるから

$$b_n - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad b_n = 2^n + 1$$

$$b_n = \log_2 a_n \text{ より, } a_n = 2^{b_n} \text{ であるから} \quad \mathbf{a_n = 2^{2^n + 1}}$$



4 (1) C_1, C_2 の方程式から, y を消去すると

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 &= (x-t)^2 + 2t^3 - t^2 \\ 2(x^3 - t^3) - 2x^2 + 2tx &= 0 \\ (x-t)(x^2 + tx + t^2) - x(x-t) &= 0 \\ (x-t)\{x^2 + (t-1)x + t^2\} &= 0 \quad \dots (*) \end{aligned}$$

2 曲線 C_1, C_2 の共有点が 2 個となるのは, (*) から, 次の場合がある.

(i) $x = t$ が方程式 $x^2 + (t-1)x + t^2 = 0$ の解であるとき

$$t^2 + (t-1)t + t^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t(3t-1) = 0$$

ここで, $t \neq 0$ に注意して, $t = \frac{1}{3}$ を (*) に代入すると

$$\left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left(x - \frac{1}{3}\right)^3 = 0$$

このとき, 方程式 (*) が 3 重解をもち, 不適.

(ii) 方程式 $x^2 + (t-1)x + t^2 = 0$ が重解をもつとき, 係数について

$$(t-1)^2 - 4t^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (3t-1)(t+1) = 0$$

$t = \frac{1}{3}$ は (i) から, 不適であるから, $t = -1$ を方程式 (*) に代入すると

$$(x+1)(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(x-1)^2 = 0$$

このとき, 2 曲線 C_1, C_2 の共有点の x 座標は $x = -1, 1$

(i), (ii) より, 求める t の値は $t = -1$

(2) (1)の結果から $C_1: y = (x+1)^2 - 3$, $C_2: y = 2x^3 - x^2$

条件により $A(-1, -3)$, $B(1, 1)$

$y = 2x^3 - x^2$ を微分すると

$$y' = 6x^2 - 2x$$

$x = -1$ のとき, $y' = 8$

$x = 1$ のとき, $y' = 4$

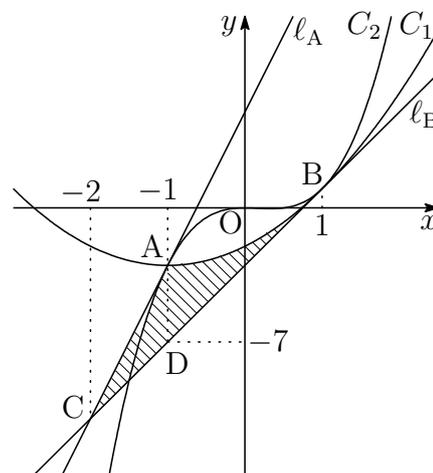
2直線 l_A , l_B の方程式は

$$l_A: y - (-3) = 8(x + 1)$$

$$y = 8x + 5$$

$$l_B: y - 1 = 4(x - 1)$$

$$y = 4x - 3$$



2直線 l_A , l_B の交点を C とすると, その x 座標は

$$8x + 5 = 4x - 3 \quad \text{これを解いて} \quad x = -2$$

l_B 上の $x = -1$ における点を D とすると $D(-1, -7)$

求める面積は上の図の斜線部分で, その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle ACD + \int_{-1}^1 \{(x^2 + 2x - 2) - (4x - 3)\} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \{-3 - (-7)\} + \int_{-1}^1 (x - 1)^2 dx \\ &= 2 + \left[\frac{1}{3}(x - 1)^3 \right]_{-1}^1 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

