平成 29 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成 29 年 2 月 25 日

1 原点を O とする座標空間内に 3 点 A(2, 0, 0)，B(0, 4, 0)，C(0, 0, c) がある。ただし，$c > 0$ とする。$\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とし，$\triangle \mathrm{ABC}$ の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\cos\theta$，$\sin\theta$ を c を用いて表せ。

(2) 点 O を中心とする半径 1 の球面上の点を H とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に垂直であるとき，c の値を求めよ。

(3) (2) の条件のもとで，面積 S を求めよ。

2 n は 5 以上の自然数とする。赤玉 3 個と白玉 7 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し，色を確認してからもとに戻すという試行を n 回行う。以下の問いに答えよ。

(1) n 回目に 3 度目の赤玉が出る確率を求めよ。

(2) 2 度以上連続することなく 3 度赤玉が出る確率を求めよ。

(3) n 回目に 3 度目の赤玉が出たとき，2 度以上連続することなく 3 度赤玉が出ている条件付き確率を求めよ。

3 $f(x) = x^2 + x$ とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

> $a_1 = 8$ とする。a_n $(n \geqq 1)$ に対して，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $({a_n}^2,\ f({a_n}^2))$ における接線と直線 $y = x$ との交点の x 座標を a_{n+1} とする。ただし，${a_n}^2$ は a_n の 2 乗を表す。

以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対し，$a_n > 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $b_n = \log_2 a_n$ とおくとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

4 t は 0 でない実数とする。座標平面上の曲線 $C_1 : y = (x-t)^2 + 2t^3 - t^2$ と曲線 $C_2 : y = 2x^3 - x^2$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点が 2 個になるような t を求めよ。

(2) t を (1) で求めた値とし，曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点を A，B とする。ただし，点 A の x 座標は，点 B の x 座標より小さいとする。このとき，点 A，B における曲線 C_2 の接線 ℓ_{A}，ℓ_{B} と曲線 C_1 で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) A(2, 0, 0)，B(0, 4, 0)，C(0, 0, c) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2,\ 4,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-2,\ 0,\ c)$$

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角が θ であるから

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \frac{4}{2\sqrt{5}\sqrt{c^2+4}} = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5(c^2+4)}}}$$

また，$\sin\theta > 0$ であるから

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{4}{5(c^2+4)}} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{5c^2+16}{5(c^2+4)}}}$$

(2) H(x, y, z) とおくと，H は原点 O を中心とする半径 1 の球面上の点であるから

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{HA}} = (2-x, -y, -z)$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}} = (-x,\ 4-y, -z)$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}} = (-x, -y,\ c-z)$ がいずれも $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (x,\ y,\ z)$ に垂直であるから

$$\begin{aligned} (2-x)x-y^2-z^2 &= 0 \\ -x^2+(4-y)y-z^2 &= 0 \\ -x^2-y^2+(c-z)z &= 0 \end{aligned}$$

① に注意してこれらを整理すると

$$2x = 1,\quad 4y = 1,\quad cz = 1$$

上の 3 式から，$x = \dfrac{1}{2}$，$y = \dfrac{1}{4}$，$z = \dfrac{1}{c}$ を ① に代入して

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{c^2} = 1$$

$c > 0$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{c = \dfrac{4}{\sqrt{11}}}$

(3) (1) の結果から

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{c^2+4}\times\sqrt{\frac{5c^2+16}{5(c^2+4)}} = \sqrt{5c^2+16}$$

これに (2) の結果を代入すると

$$S = \sqrt{5\times\frac{16}{11}+16} = \boldsymbol{\frac{16}{\sqrt{11}}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $n-1$ 回目までに赤玉が 2 度出て，n 回目に赤玉が出る確率であるから

$$
\begin{aligned}
{}_{n-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^{n-3}\times\frac{3}{10} &= \frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\frac{3^2}{10^2}\cdot\frac{7^{n-3}}{10^{n-3}}\times\frac{3}{10}\\
&= \boldsymbol{\frac{27(n-1)(n-2)\cdot 7^{n-3}}{2\cdot 10^n}}
\end{aligned}
$$

(2) n 回の試行で 2 度以上連続することなく赤玉が 3 度出る順の総数は，$n-3$ 個の白玉を一列に並べ，赤玉をその間と両側を含めた $n-2$ 箇所から赤玉を配置する 3 箇所を選ぶ組合せの総数であるから，求める確率は

$$
\begin{aligned}
{}_{n-2}\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^{n-3} &= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}\cdot\frac{27}{10^3}\cdot\frac{7^{n-3}}{10^{n-3}}\\
&= \boldsymbol{\frac{9(n-2)(n-3)(n-4)\cdot 7^{n-3}}{2\cdot 10^n}}
\end{aligned}
$$

(3) n 回目に 3 度目の赤玉が出る事象を A，2 度以上連続することなく 3 度赤玉が出る事象を B とすると，求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

事象 $A\cap B$ は，$n-1$ 回目まで赤玉が連続することなく 2 度出て，n 回目に赤玉が出ることである．その総数は，(2) と同様に $n-3$ 個の白玉とその最後に赤玉 1 個を一列に並べ，白玉の間とその前を含めた $n-3$ 箇所から赤玉を配置する 2 箇所を選ぶ組合せの総数であるから，その確率は

$$
\begin{aligned}
P(A\cap B) &= {}_{n-3}\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^{n-3}\times\frac{3}{10}\\
&= \frac{(n-3)(n-4)}{2}\cdot\frac{9}{10^2}\cdot\frac{7^{n-3}}{10^{n-3}}\times\frac{3}{10}\\
&= \frac{27(n-3)(n-4)\cdot 7^{n-3}}{2\cdot 10^n}
\end{aligned}
$$

また，$P(A)$ は，(1) で求めた確率であるから，求める条件付き確率は

$$
\begin{aligned}
P_A(B) &= \frac{27(n-3)(n-4)\cdot 7^{n-3}}{2\cdot 10^n}\times\frac{2\cdot 10^n}{27(n-1)(n-2)\cdot 7^{n-3}}\\
&= \boldsymbol{\frac{(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=x^2+x$ を微分すると　$f'(x)=2x+1$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)$$

すなわち　$y=(2t+1)x-t^2$

これと直線 $y=x$ の方程式から y を消去すると

$$(2t+1)x-t^2=x \quad \text{ゆえに} \quad 2t\left(x-\frac{1}{2}t\right)=0$$

$t={a_n}^2$ とすると，$a_n>0$ のとき，$t\neq 0$ であるから

$$x=\frac{1}{2}t \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1}=\frac{1}{2}{a_n}^2>0$$

$a_1=8>0$ により，すべての自然数 n に対して　$a_n>0$

(2) $a_n>0$ より $(n\geqq 1)$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}{a_n}^2$ の両辺を 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2\frac{1}{2}{a_n}^2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 a_{n+1}=2\log_2 a_n-1$$

$b_n=\log_2 a_n$ であるから　$\boldsymbol{b_{n+1}=2b_n-1}$

(3) (2) の結果から　$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$

また　$b_1=\log_2 a_1=\log_2 8=3$

数列 $\{b_n-1\}$ は，初項が $b_1-1=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n-1=2\cdot 2^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad b_n=2^n+1$$

$b_n=\log_2 a_n$ より，$a_n=2^{b_n}$ であるから　$\boldsymbol{a_n=2^{2^n+1}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) C_1，C_2 の方程式から，y を消去すると

$$\begin{aligned}2x^3 - x^2 &= (x-t)^2 + 2t^3 - t^2\\ 2(x^3 - t^3) - 2x^2 + 2tx &= 0\\ (x-t)(x^2 + tx + t^2) - x(x-t) &= 0\\ (x-t)\{x^2 + (t-1)x + t^2\} &= 0 \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

2 曲線 C_1，C_2 の共有点が 2 個となるのは，$(*)$ から，次の場合がある．

(i) $x = t$ が方程式 $x^2 + (t-1)x + t^2 = 0$ の解であるとき

$$t^2 + (t-1)t + t^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t(3t-1) = 0$$

ここで，$t \neq 0$ に注意して，$t = \dfrac{1}{3}$ を $(*)$ に代入すると

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left(x - \frac{1}{3}\right)^3 = 0$$

このとき，方程式 $(*)$ が 3 重解をもち，不適．

(ii) 方程式 $x^2 + (t-1)x + t^2 = 0$ が重解をもつとき，係数について

$$(t-1)^2 - 4t^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (3t-1)(t+1) = 0$$

$t = \dfrac{1}{3}$ は (i) から，不適であるから，$t = -1$ を方程式 $(*)$ に代入すると

$$(x+1)(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(x-1)^2 = 0$$

このとき，2 曲線 C_1，C_2 の共有点の x 座標は　$x = -1,\ 1$

(i)，(ii) より，求める t の値は　　$\boldsymbol{t = -1}$

(2) (1) の結果から　　$C_1 : y = (x+1)^2 - 3$，$C_2 : y = 2x^3 - x^2$

条件により　　$\mathrm{A}(-1, -3)$，$\mathrm{B}(1,\ 1)$

$y = 2x^3 - x^2$ を微分すると

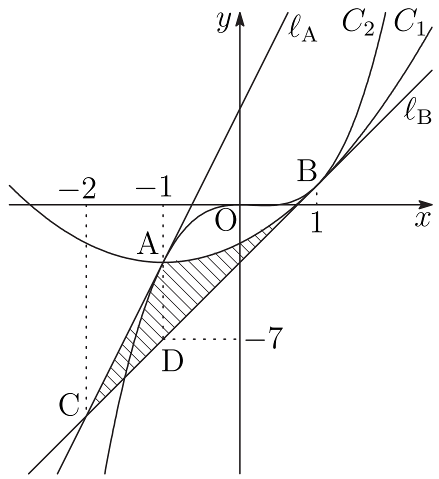
$$y' = 6x^2 - 2x$$

$x = -1$ のとき，$y' = 8$

$x = 1$ のとき，$y' = 4$

2 直線 ℓ_{A}，ℓ_{B} の方程式は

$$\begin{aligned} \ell_{\mathrm{A}} :\ \ y - (-3) &= 8(x+1) \\ y &= 8x + 5 \\ \ell_{\mathrm{B}} :\ \ y - 1 &= 4(x-1) \\ y &= 4x - 3 \end{aligned}$$



2 直線 ℓ_{A}，ℓ_{B} の交点を C とすると，その x 座標は

$$8x + 5 = 4x - 3 \quad \text{これを解いて} \quad x = -2$$

ℓ_{B} 上の $x = 1$ における点を D とすると　$\mathrm{D}(1, -7)$

求める面積は上の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{ACD} + \int_{-1}^{1} \{(x^2 + 2x - 2) - (4x - 3)\}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \{-3 - (-7)\} + \int_{-1}^{1} (x-1)^2\, dx \\ &= 2 + \left[\ \frac{1}{3}(x-1)^3\ \right]_{-1}^{1} = \mathbf{\frac{14}{3}} \end{aligned}$$