平成 28 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成 28 年 2 月 25 日

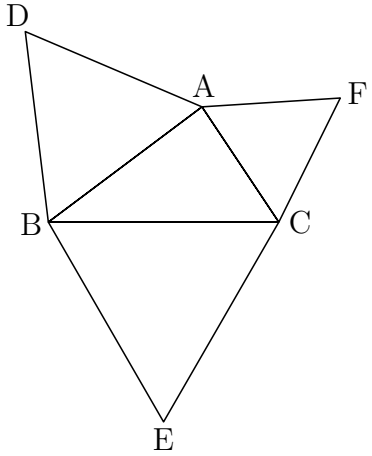
問題 1 2 3 4

1 下図のように，△ABC の外部に 3 点 D，E，F を △ABD，△BCE，△CAF がそれぞれ正三角形になるようにとる。△ABC の面積を S，3 辺の長さを $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とおくとき，$\sin\theta$ を b，c，S を用いて，$\cos\theta$ を，a，b，c を用いて表せ。

(2) DC^2 を a，b，c，S を用いて表し，$\mathrm{DC}^2=\mathrm{EA}^2=\mathrm{FB}^2$ が成り立つことを示せ。

(3) 3 つの正三角形の面積の平均を T とおくとき，DC^2 を S と T を用いて表せ。



2 1 つのさいころを 3 回投げる。1 回目に出る目の数，2 回目に出る目の数，3 回目に出る目の数をそれぞれ X_1，X_2，X_3 とし，5 つの数

$$2,\ 5,\ 2-X_1,\ 5+X_2,\ X_3$$

からなるデータを考える。以下の問いに答えよ。

(1) データの範囲が 7 以下である確率を求めよ。

(2) X_3 がデータの中央値に等しい確率を求めよ。

(3) X_3 がデータの平均値に等しい確率を求めよ。

(4) データの中央値と平均値が一致するとき，X_3 が中央値に等しい条件付き確率を求めよ。

3 自然数 a に対して

$$S(a)=\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 和 $S(a)$ を求めよ。

(2) $S(a)$ が整数となる自然数 a を小さい順に並べた数列を

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots,\ a_n,\cdots$$

とする。一般項 a_n を求めよ。

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ について，a_n $(n=1,2,3,\cdots)$ を 4 で割った余りは 0 か 3 であることを示せ。

(4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と自然数 N に対して和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}$ を求めよ。

4 2 次関数 $f(x)$ に対して

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

とおく。a を正の数とし，$F(x)$ が $x=a$ と $x=-a$ で極値をとるとき，以下の問いに答えよ。

(1) すべての x について $F(-x)=-F(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) $F(x)+F(a)=0$ を満たす x をすべて求めよ。

(3) 関数 $\dfrac{F(x)}{F'(0)}$ の極大値を求めよ。

解答例

1 (1) 面積の公式から　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin\theta$　ゆえに　$\boldsymbol{\sin\theta=\dfrac{2S}{bc}}$

余弦定理により　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$

(2) △ACD に余弦定理を適用すると，(1) の結果により

$$\begin{aligned}\mathrm{DC}^2&=\mathrm{CA}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AD}\cos(\theta+60^\circ)\\&=b^2+c^2-2bc(\cos\theta\cos60^\circ-\sin\theta\sin60^\circ)\\&=b^2+c^2-2bc\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{1}{2}-\frac{2S}{bc}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}S\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

$(*)$ は，a，b，c に関する対称式であるから　$\mathrm{DC}^2=\mathrm{EA}^2=\mathrm{FB}^2$

(3) $T=\dfrac{1}{3}(\triangle\mathrm{BCE}+\triangle\mathrm{CAF}+\triangle\mathrm{ABD})$ であるから

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\sin60^\circ+\frac{1}{2}b^2\sin60^\circ+\frac{1}{2}c^2\sin60^\circ\right)\\&=\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

ゆえに　$a^2+b^2+c^2=4\sqrt{3}T$

これを $(*)$ に代入すると

$$\mathrm{DC}^2=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{3}T+2\sqrt{3}S=\boldsymbol{2\sqrt{3}(S+T)}$$

■

2 (1) 5 つのデータの最大値と最小値はそれぞれ $5+X_2$，$2-X_1$ であるから，データの範囲は

$$(5+X_2)-(2-X_1)=X_1+X_2+3$$

これが 7 以下であるから

$$X_1+X_2+3\leqq7\quad\text{ゆえに}\quad X_1+X_2\leqq4$$

これを満たす $(X_1,\ X_2)$ の組は，次の 6 通り．

$$(X_1,\ X_2)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$$

このとき，X_3 は，1〜6 の 6 通りであるから，求める確率は

$$\frac{6\times6}{6^3}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) $2-X_1<2<5<5+X_2$ であるから，X_3 がデータの中央値であるとき

$$2 \leqq X_3 \leqq 5 \quad \text{これを満たす } X_3 \text{は } 4 \text{ 通り}$$

このとき，X_1，X_2 は，ともに 1〜6 の 6 通りであるから，求める確率は

$$\frac{4\times 6\times 6}{6^3}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

(3) 条件から $\quad X_3=\dfrac{2+5+(2-X_1)+(5+X_2)+X_3}{5}$

整理すると $\quad 4(X_3-3)=X_2-X_1+2 \quad \cdots ①$

このとき，$1 \leqq X_1 \leqq 6$，$1 \leqq X_2 \leqq 6$ であるから

$$-3 \leqq X_2-X_1+2 \leqq 7 \quad \cdots ②$$

①，② より，$X_2-X_1+2=0,\ 4$ であるから

$$X_2=X_1-2\ (X_1=3,4,5,6) \text{ のとき} \quad X_3=3$$
$$X_2=X_1+2\ (X_1=1,2,3,4) \text{ のとき} \quad X_3=4$$

よって，求める確率は $\quad \dfrac{4+4}{6^3}=\mathbf{\dfrac{1}{27}}$

(4) $2-X_1<2<5<5+X_2$ より，中央値は 2，5，X_3 のいずれかである．

i) 中央値が 2 のとき

$$\frac{2+5+(2-X_1)+(5+X_2)+X_3}{5}=2 \quad \text{ゆえに} \quad X_1=X_2+X_3+4$$

このとき $\quad (X_1,\ X_2,\ X_3)=(6,\ 1,\ 1)$ の 1 通り

ii) 中央値が 5 のとき

$$\frac{2+5+(2-X_1)+(5+X_2)+X_3}{5}=5 \quad \text{ゆえに} \quad X_1+11=X_2+X_3$$

このとき $\quad (X_1,\ X_2,\ X_3)=(1,\ 6,\ 6)$ の 1 通り

iii) 中央値が X_3 のとき，(3) の結果より 8 通り

i)〜iii) から，求める条件付き確率は $\quad \dfrac{\frac{8}{6^3}}{\frac{1+1+8}{6^3}}=\mathbf{\dfrac{4}{5}}$ ■

3 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{a}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\boldsymbol{\sqrt{a+1}-1}$

(2) $S(a)$ が整数 $n \geqq 1$ に等しいとき，(1) の結果から

$$\sqrt{a+1}-1=n \quad \text{ゆえに} \quad a=n(n+2)$$

よって，求める数列の一般項は　$\boldsymbol{a_n=n(n+2)}$

(3) $n=2m-1$ のとき (m は整数)

$$\begin{aligned} a_n &= (2m-1)\{(2m-1)+2\}=(2m-1)(2m+1) \\ &= 4m^2-1=4(m^2-1)+3 \end{aligned}$$

$n=2m$ のとき (m は整数)

$$a_n=2m(2m+2)=4m(m+1)$$

よって，a_n を 4 で割った余りは 0 か 3 である．

(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{N(3N+5)}{4(N+1)(N+2)}} \end{aligned}$$

■

4 (1) $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ を x で微分すると　$F'(x)=f(x)$

条件より，$F(x)$ は $x=\pm a$ で極値をとるから

$$F'(\pm a)=0 \quad \text{すなわち} \quad f(\pm a)=0$$

2 次関数 $f(x)$ は，$x+a$，$x-a$ を因数にもつから，定数 $k\neq 0$ を用いて

$$f(x)=k(x+a)(x-a)=k(x^2-a^2)$$

とおける．したがって

$$\begin{aligned} F(x)&=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x k(t^2-a^2)\,dt \\ &=k\left[\frac{t^3}{3}-a^2t\right]_0^x=k\left(\frac{x^3}{3}-a^2x\right) \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

このとき　$F(-x)=k\left\{\dfrac{(-x)^3}{3}-a^2(-x)\right\}=-k\left(\dfrac{x^3}{3}-a^2x\right)=-F(x)$

(2) $(*)$ より　$F(a)=-\dfrac{2}{3}ka^3 \quad \cdots$①

$F(x)+F(a)=0$ のとき　　$k\left(\dfrac{x^3}{3}-a^2x\right)-\dfrac{2}{3}ka^3=0$

$k\neq 0$ であるから，これを整理すると

$$x^3-3a^2x-2a^3=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+a)^2(x-2a)=0$$

よって，求める x は　　$\boldsymbol{x=-a,\ 2a}$

(3) $F'(0)=f(0)$ より　$F'(0)=-ka^2$

$g(x)=\dfrac{F(x)}{F'(0)}$ とおくと　$g(x)=-\dfrac{F(x)}{ka^2}$．これを微分すると

$$g'(x)=-\frac{F'(x)}{ka^2}=-\frac{f(x)}{ka^2}=-\frac{k(x+a)(x-a)}{ka^2}=-\frac{1}{a^2}(x+a)(x-a)$$

このとき，$g(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって，求める極大値は，① により

$$g(a)=-\frac{F(a)}{ka^2}=-\frac{-\frac{2}{3}ka^3}{ka^2}=\boldsymbol{\frac{2}{3}a}$$

■