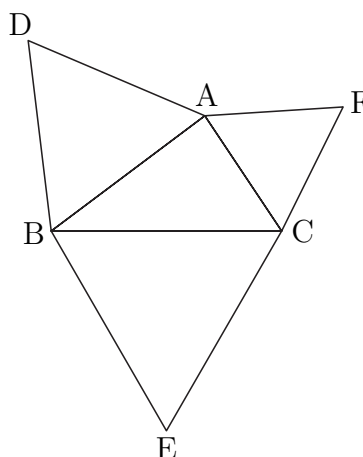


平成 28 年度 熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
 文系 (教育学部, 医学部保健学科看護学専攻) 平成 28 年 2 月 25 日

- 1 下図のように, $\triangle ABC$ の外部に 3 点 D, E, F を $\triangle ABD, \triangle BCE, \triangle CAF$ がそれぞれ正三角形になるようにとる。 $\triangle ABC$ の面積を S , 3 辺の長さを $BC = a, CA = b, AB = c$ とおくととき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $\angle BAC = \theta$ とおくととき, $\sin \theta$ を b, c, S を用いて, $\cos \theta$ を a, b, c を用いて表せ。
- (2) DC^2 を a, b, c, S を用いて表し, $DC^2 = EA^2 = FB^2$ が成り立つことを示せ。
- (3) 3 つの正三角形の面積の平均を T とおくととき, DC^2 を S と T を用いて表せ。



- 2 1 つのさいころを 3 回投げる。1 回目に出る目の数, 2 回目に出る目の数, 3 回目に出る目の数をそれぞれ X_1, X_2, X_3 とし, 5 つの数

$$2, 5, 2 - X_1, 5 + X_2, X_3$$

からなるデータを考える。以下の問いに答えよ。

- (1) データの範囲が 7 以下である確率を求めよ。
- (2) X_3 がデータの中央値に等しい確率を求めよ。
- (3) X_3 がデータの平均値に等しい確率を求めよ。
- (4) データの中央値と平均値が一致するとき, X_3 が中央値に等しい条件付き確率を求めよ。

3 自然数 a に対して

$$S(a) = \sum_{k=1}^a \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 和 $S(a)$ を求めよ。
- (2) $S(a)$ が整数となる自然数 a を小さい順に並べた数列を

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

とする。一般項 a_n を求めよ。

- (3) (2) の数列 $\{a_n\}$ について, a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を 4 で割った余りは 0 か 3 であることを示せ。
- (4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と自然数 N に対して和 $\sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n}$ を求めよ。

4 2次関数 $f(x)$ に対して

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

とおく。 a を正の数とし, $F(x)$ が $x = a$ と $x = -a$ で極値をとるとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) すべての x について $F(-x) = -F(x)$ が成り立つことを示せ。
- (2) $F(x) + F(a) = 0$ を満たす x をすべて求めよ。
- (3) 関数 $\frac{F(x)}{F'(0)}$ の極大値を求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \text{ 面積の公式から } S = \frac{1}{2}bc \sin \theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin \theta = \frac{2S}{bc}$$

$$\text{余弦定理により} \quad \cos \theta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(2) $\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると, (1) の結果により

$$\begin{aligned} DC^2 &= CA^2 + AD^2 - 2CA \cdot AD \cos(\theta + 60^\circ) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc(\cos \theta \cos 60^\circ - \sin \theta \sin 60^\circ) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2S}{bc} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}S \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

(*) は, a, b, c に関する対称式であるから $DC^2 = EA^2 = FB^2$

(3) $T = \frac{1}{3}(\triangle BCE + \triangle CAF + \triangle ABD)$ であるから

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2}b^2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2}c^2 \sin 60^\circ \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}T$$

これを (*) に代入すると

$$DC^2 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3}T + 2\sqrt{3}S = 2\sqrt{3}(S + T)$$

$\boxed{2}$ (1) 5つのデータの最大値と最小値はそれぞれ $5 + X_2, 2 - X_1$ であるから, データの範囲は

$$(5 + X_2) - (2 - X_1) = X_1 + X_2 + 3$$

これが7以下であるから

$$X_1 + X_2 + 3 \leq 7 \quad \text{ゆえに} \quad X_1 + X_2 \leq 4$$

これを満たす (X_1, X_2) の組は, 次の6通り.

$$(X_1, X_2) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$$

このとき, X_3 は, 1~6の6通りであるから, 求める確率は

$$\frac{6 \times 6}{6^3} = \frac{1}{6}$$

(2) $2 - X_1 < 2 < 5 < 5 + X_2$ であるから, X_3 がデータの中央値であるとき

$$2 \leq X_3 \leq 5 \quad \text{これを満たす } X_3 \text{ は 4 通り}$$

このとき, X_1, X_2 は, ともに $1 \sim 6$ の 6 通りであるから, 求める確率は

$$\frac{4 \times 6 \times 6}{6^3} = \frac{2}{3}$$

(3) 条件から
$$X_3 = \frac{2 + 5 + (2 - X_1) + (5 + X_2) + X_3}{5}$$

整理すると
$$4(X_3 - 3) = X_2 - X_1 + 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

このとき, $1 \leq X_1 \leq 6, 1 \leq X_2 \leq 6$ であるから

$$-3 \leq X_2 - X_1 + 2 \leq 7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より, $X_2 - X_1 + 2 = 0, 4$ であるから

$$X_2 = X_1 - 2 \quad (X_1 = 3, 4, 5, 6) \text{ のとき } X_3 = 3$$

$$X_2 = X_1 + 2 \quad (X_1 = 1, 2, 3, 4) \text{ のとき } X_3 = 4$$

よって, 求める確率は
$$\frac{4 + 4}{6^3} = \frac{1}{27}$$

(4) $2 - X_1 < 2 < 5 < 5 + X_2$ より, 中央値は $2, 5, X_3$ のいずれかである.

i) 中央値が 2 のとき

$$\frac{2 + 5 + (2 - X_1) + (5 + X_2) + X_3}{5} = 2 \quad \text{ゆえに } X_1 = X_2 + X_3 + 4$$

このとき $(X_1, X_2, X_3) = (6, 1, 1)$ の 1 通り

ii) 中央値が 5 のとき

$$\frac{2 + 5 + (2 - X_1) + (5 + X_2) + X_3}{5} = 5 \quad \text{ゆえに } X_1 + 11 = X_2 + X_3$$

このとき $(X_1, X_2, X_3) = (1, 6, 6)$ の 1 通り

iii) 中央値が X_3 のとき, (3) の結果より 8 通り

i) ~ iii) から, 求める条件付き確率は
$$\frac{\frac{8}{6^3}}{\frac{1 + 1 + 8}{6^3}} = \frac{4}{5}$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \sum_{k=1}^a \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^a (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{a+1} - 1$$

(2) $S(a)$ が整数 $n \geq 1$ に等しいとき, (1) の結果から

$$\sqrt{a+1} - 1 = n \quad \text{ゆえに} \quad a = n(n+2)$$

よって, 求める数列の一般項は $a_n = n(n+2)$

(3) $n = 2m - 1$ のとき (m は整数)

$$\begin{aligned} a_n &= (2m-1)\{(2m-1)+2\} = (2m-1)(2m+1) \\ &= 4m^2 - 1 = 4(m^2 - 1) + 3 \end{aligned}$$

$n = 2m$ のとき (m は整数)

$$a_n = 2m(2m+2) = 4m(m+1)$$

よって, a_n を 4 で割った余りは 0 か 3 である.

(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) \\ &= \frac{N(3N+5)}{4(N+1)(N+2)} \end{aligned}$$

4 (1) $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ を x で微分すると $F'(x) = f(x)$

条件より, $F(x)$ は $x = \pm a$ で極値をとるから

$$F'(\pm a) = 0 \quad \text{すなわち} \quad f(\pm a) = 0$$

2次関数 $f(x)$ は, $x + a$, $x - a$ を因数にもつから, 定数 $k \neq 0$ を用いて

$$f(x) = k(x + a)(x - a) = k(x^2 - a^2)$$

とおける. したがって

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^x k(t^2 - a^2) dt \\ &= k \left[\frac{t^3}{3} - a^2 t \right]_0^x = k \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x \right) \quad \dots (*) \end{aligned}$$

このとき $F(-x) = k \left\{ \frac{(-x)^3}{3} - a^2(-x) \right\} = -k \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x \right) = -F(x)$

(2) (*) より $F(a) = -\frac{2}{3}ka^3 \quad \dots \textcircled{1}$

$F(x) + F(a) = 0$ のとき $k \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x \right) - \frac{2}{3}ka^3 = 0$

$k \neq 0$ であるから, これを整理すると

$$x^3 - 3a^2 x - 2a^3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x + a)^2(x - 2a) = 0$$

よって, 求める x は $x = -a, 2a$

(3) $F'(0) = f(0)$ より $F'(0) = -ka^2$

$g(x) = \frac{F(x)}{F'(0)}$ とおくと $g(x) = -\frac{F(x)}{ka^2}$. これを微分すると

$$g'(x) = -\frac{F'(x)}{ka^2} = -\frac{f(x)}{ka^2} = -\frac{k(x + a)(x - a)}{ka^2} = -\frac{1}{a^2}(x + a)(x - a)$$

このとき, $g(x)$ の増減表は

x	\dots	$-a$	\dots	a	\dots
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	\searrow	極小	\nearrow	極大	\searrow

よって, 求める極大値は, ①により

$$g(a) = -\frac{F(a)}{ka^2} = -\frac{-\frac{2}{3}ka^3}{ka^2} = \frac{2}{3}a$$