平成 27 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成 27 年 2 月 25 日

1 a を実数とする。曲線 $C_1 : y = x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を l とする。曲線 C_2 を $y = x^2 - 1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) l と C_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする。曲線 $C_3 : y = -x^2 + 1$ と C_2 とで囲まれた部分は l によって 2 つの部分に分けられる。これらのうち，点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を含む部分の面積を求めよ。

2 座標空間内の 3 点 A(1, 1, 1)，B(3, 0, 1)，C(1, 2, 0) を含む平面を H とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P$(-3,\ 2,\ 2)$ は H 上の点であることを示せ。

(2) 点 Q$(1, -3, -4)$ を通る直線が H と直交するとき，その交点の座標を求めよ。

3 △ABC において，∠B と ∠C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$\mathrm{BX}_1 = 1$，$\mathrm{CX}_1 = 8$ とする．各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して以下の操作を行う。

> 辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 を求めよ。

(2) l_{n+1} を l_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ。

4 $f(x)$ は x の 3 次多項式とし，x^3 の係数は 1，定数項は 0 とする。2 つの異なる実数 α，β に対して $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ が満たされているとする。以下の問いに答えよ。

(1) $f(\alpha)$，$f(\beta)$ を α，β を用いて表せ。

(2) 不等式 $\alpha < \beta < 3\alpha$ が成り立つとき，3 次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y = x^2$ を微分すると　　$y' = 2x$

C_1 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線 l の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2$$

l と $C_2 : y = x^2 - 1$ の共有点の x 座標は

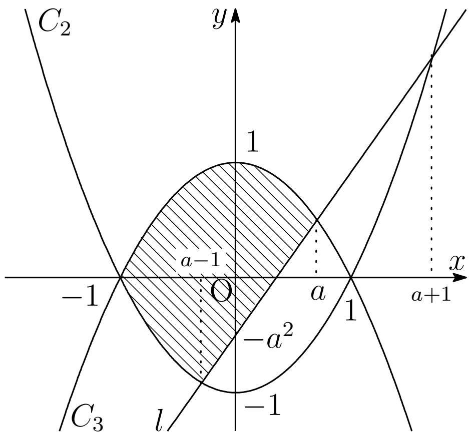
$$2ax - a^2 = x^2 - 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = a \pm 1$$

求める面積は

$$\int_{a-1}^{a+1} \{(2ax - a^2) - (x^2 - 1)\}\,dx = -\int_{a-1}^{a+1} (x - a + 1)(x - a - 1)\,dx$$
$$= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{(a+1) - (a-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

(2) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，l の方程式は

$$l : y = \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$$



l と C_3 の共有点の x 座標は

$$\sqrt{2}x - \frac{1}{2} = -x^2 + 1$$

ゆえに　$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(= a),\ -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$f(x) = -x^2 + 1$ とし，$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x$ とする．

求める面積を S とすると

$$S = 2\int_{-1}^{a-1} f(x)\,dx + \int_{a-1}^{a} \{f(x) - (2ax - a^2)\}\,dx$$
$$= 2\Big[\,F(x)\,\Big]_{-1}^{a-1} + \Big[\,F(x)\,\Big]_{a-1}^{a} + \Big[-ax^2 + a^2x\Big]_{a-1}^{a}$$
$$= F(a) + F(a-1) - 2F(-1) - a^2 + a$$
$$= -\frac{1}{3}a^3 + a - \frac{1}{3}(a-1)^3 + a - 1 - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - a^2 + a$$
$$= -\frac{2}{3}a^3 + 2a + \frac{2}{3}$$

このとき，$a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　　$\boldsymbol{S = \dfrac{5\sqrt{2} + 4}{6}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}(1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{P}(-3,\ 2,\ 2)$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,-1,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 1,-1),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(-4,\ 1,\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと (α，β は実数)

$$(-4,\ 1,\ 1)=\alpha(2,-1,\ 0)+\beta(0,\ 1,-1)$$

したがって　$2\alpha=-4$，$-\alpha+\beta=1$，$-\beta=1$

これを解いて　$\alpha=-2$，$\beta=-1$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　よって，点 P は平面 H 上の点である．

(2) 平面 H を媒介変数 s，t を用いて表すと

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z)&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=(1,\ 1,\ 1)+s(2,-1,\ 0)+t(0,\ 1,-1)\\&=(1+2s,\ 1-s+t,\ 1-t)\quad\cdots①\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,-1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 1,-1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=(1,\ 2,\ 2)$$

とおく．Q を通り $\vec{n}$ に平行な直線を媒介変数 k を用いて表すと

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z)&=(1,-3,-4)+k(1,\ 2,\ 2)\\&=(1+k,-3+2k,-4+2k)\quad\cdots②\end{aligned}$$

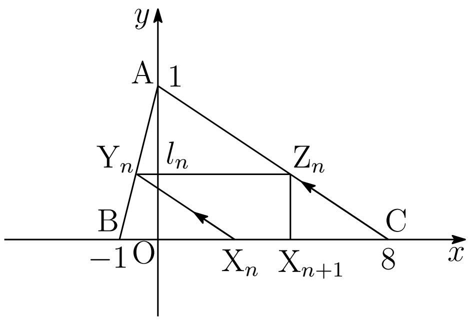
求める交点 $(x,\ y,\ z)$ は，①，② から

$$\begin{aligned}x&=1+2s=1+k\\y&=1-s+t=-3+2k\\z&=1-t=-4+2k\end{aligned}$$

これを解いて　$s=1$，$t=1$，$k=2$，$x=3$，$y=1$，$z=0$

よって，求める交点は　$\mathbf{(3,\ 1,\ 0)}$

3 (1) 座標平面上に点 A(0, 1)，B(−1, 0)，C(8, 0)，$\mathrm{X}_n(x_n,\ 0)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をとる．直線 AB の方程式は



$$y = x + 1 \quad \cdots ①$$

直線 AC の方程式は

$$y = -\frac{1}{8}x + 1 \quad \cdots ②$$

直線 $\mathrm{X}_n\mathrm{Y}_n$ は点 $(x_n,\ 0)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{8}$ の直線であるから

$$y = -\frac{1}{8}(x - x_n) \quad \cdots ③$$

点 Y_n の y 座標 l_n は，①，③ を解いて　$l_n = \dfrac{1+x_n}{9}$　$\cdots ④$

このとき，$x_1 = 0$ であるから　$\boldsymbol{l_1 = \dfrac{1}{9}}$

(2) 点 Z_n の y 座標が l_n であるから，その x 座標は，② より

$$l_n = -\frac{x}{8} + 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = 8(1 - l_n)$$

これが点 X_{n+1} の x 座標であるから　$x_{n+1} = 8(1 - l_n)$

したがって，上式および ④ から

$$l_{n+1} = \frac{1 + x_{n+1}}{9} = \frac{1 + 8(1 - l_n)}{9} = \boldsymbol{-\frac{8}{9}l_n + 1}$$

(3) (1)，(2) の結果から　$l_{n+1} = -\dfrac{8}{9}l_n + 1 \cdots ①$，$l_1 = \dfrac{1}{9}$

ここで，定数 c を

$$c = -\frac{8}{9}c + 1 \quad \cdots ②$$

とおくと，①，② から

$$l_{n+1} - c = -\frac{8}{9}(l_n - c) \quad \text{ゆえに} \quad l_n - c = (l_1 - c)\left(-\frac{8}{9}\right)^{n-1}$$

② を解いて　$c = \dfrac{9}{17}$　また　$l_1 - c = \dfrac{1}{9} - \dfrac{9}{17} = -\dfrac{64}{153}$

よって　$l_n = \dfrac{9}{17} - \dfrac{64}{153}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\dfrac{9}{17} + \dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^{n}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) x の 3 次式 $f(x)$ の x^3 の係数が 1，$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ であるから

$$f'(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta) = 3x^2 - 3(\alpha+\beta)x + 3\alpha\beta$$

また，$f(x)$ の定数項は 0 であるから

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)x^2 + 3\alpha\beta x$$

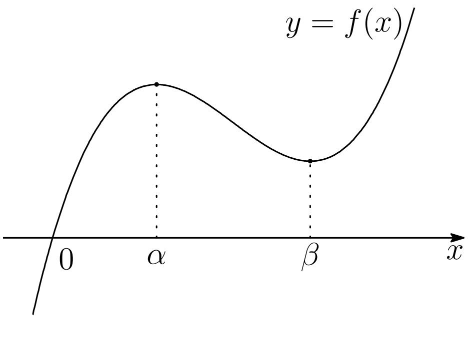
したがって

$$f(\alpha) = \alpha^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)\alpha^2 + 3\alpha^2\beta = \boldsymbol{\frac{\alpha^2(3\beta-\alpha)}{2}}$$
$$f(\beta) = \beta^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)\beta^2 + 3\alpha\beta^2 = \boldsymbol{\frac{\beta^2(3\alpha-\beta)}{2}}$$

(2) $f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$

$\alpha < \beta < 3\alpha$ より，$0 < \alpha < \beta$，$3\alpha - \beta > 0$ であるから，$f(\beta) > 0$
したがって，$y = f(x)$ のグラフの概形は，次のようになる．



よって，$y = f(x)$ および $y = -1$ のグラフから，3 次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数は **1 個.**