

平成27年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
 文系(教育学部, 医学部保健学科看護学専攻)平成27年2月25日

問題 1 2 3 4

1 a を実数とする。曲線 $C_1: y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線を l とする。曲線 C_2 を $y = x^2 - 1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) l と C_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とする。曲線 $C_3: y = -x^2 + 1$ と C_2 とで囲まれた部分は l によって2つの部分に分けられる。これらのうち、点 $(0, \frac{1}{2})$ を含む部分の面積を求めよ。

2 座標空間内の3点 $A(1, 1, 1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(1, 2, 0)$ を含む平面を H とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 $P(-3, 2, 2)$ は H 上の点であることを示せ。

(2) 点 $Q(1, -3, -4)$ を通る直線が H と直交するとき、その交点の座標を求めよ。

3 $\triangle ABC$ において、 $\angle B$ と $\angle C$ は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き、辺 BC との交点を X_1 とし、線分 AX_1 の長さを1とする。また、 $BX_1 = 1$, $CX_1 = 8$ とする。各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して以下の操作を行う。

辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き、辺 AB との交点を Y_n とする。また、点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き、辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き、辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $Z_n X_{n+1}$ の長さを l_n とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) l_1 を求めよ。

(2) l_{n+1} を l_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ。

4 $f(x)$ は x の3次多項式とし、 x^3 の係数は1, 定数項は0とする。2つの異なる実数 α, β に対して $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ が満たされているとする。以下の問いに答えよ。

(1) $f(\alpha), f(\beta)$ を α, β を用いて表せ。

(2) 不等式 $\alpha < \beta < 3\alpha$ が成り立つとき、3次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数を求めよ。

解答例

1 (1) $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$

C_1 上の点 (a, a^2) における接線 l の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2$$

l と $C_2 : y = x^2 - 1$ の共有点の x 座標は

$$2ax - a^2 = x^2 - 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = a \pm 1$$

求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{a-1}^{a+1} \{(2ax - a^2) - (x^2 - 1)\} dx &= - \int_{a-1}^{a+1} (x - a + 1)(x - a - 1) dx \\ &= - \left(-\frac{1}{6}\right) \{(a+1) - (a-1)\}^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

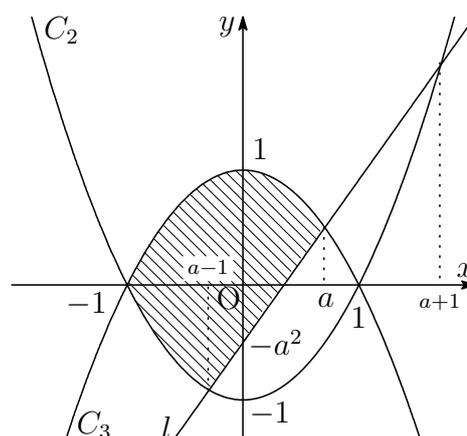
(2) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, l の方程式は

$$l : y = \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$$

l と C_3 の共有点の x 座標は

$$\sqrt{2}x - \frac{1}{2} = -x^2 + 1$$

ゆえに $x = \frac{1}{\sqrt{2}} (= a), -\frac{3}{\sqrt{2}}$



$f(x) = -x^2 + 1$ とし, $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x$ とする.

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{-1}^{a-1} f(x) dx + \int_{a-1}^a \{f(x) - (2ax - a^2)\} dx \\ &= 2 \left[F(x) \right]_{-1}^{a-1} + \left[F(x) \right]_{a-1}^a + \left[-ax^2 + a^2x \right]_{a-1}^a \\ &= F(a) + F(a-1) - 2F(-1) - a^2 + a \\ &= -\frac{1}{3}a^3 + a - \frac{1}{3}(a-1)^3 + a - 1 - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - a^2 + a \\ &= -\frac{2}{3}a^3 + 2a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

このとき, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから $S = \frac{5\sqrt{2} + 4}{6}$ ■

- 2** (1) $A(1, 1, 1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(1, 2, 0)$, $P(-3, 2, 2)$ から

$$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, -1), \quad \overrightarrow{AP} = (-4, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC} \text{ とおくと } (\alpha, \beta \text{ は実数})$$

$$(-4, 1, 1) = \alpha(2, -1, 0) + \beta(0, 1, -1)$$

$$\text{したがって} \quad 2\alpha = -4, \quad -\alpha + \beta = 1, \quad -\beta = 1$$

$$\text{これを解いて} \quad \alpha = -2, \quad \beta = -1$$

ゆえに $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ よって、点 P は平面 H 上の点である。

- (2) 平面 H を媒介変数 s, t を用いて表すと

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ &= (1, 1, 1) + s(2, -1, 0) + t(0, 1, -1) \\ &= (1 + 2s, 1 - s + t, 1 - t) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, -1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (1, 2, 2)$$

とおく。 Q を通り \vec{n} に平行な直線を媒介変数 k を用いて表すと

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (1, -3, -4) + k(1, 2, 2) \\ &= (1 + k, -3 + 2k, -4 + 2k) \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

求める交点 (x, y, z) は、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2s = 1 + k \\ y &= 1 - s + t = -3 + 2k \\ z &= 1 - t = -4 + 2k \end{aligned}$$

$$\text{これを解いて} \quad s = 1, \quad t = 1, \quad k = 2, \quad x = 3, \quad y = 1, \quad z = 0$$

よって、求める交点は **(3, 1, 0)** ■

- 3 (1) 座標平面上に点 $A(0, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(8, 0)$, $X_n(x_n, 0)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) をとる. 直線 AB の方程式は

$$y = x + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

直線 AC の方程式は

$$y = -\frac{1}{8}x + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

直線 X_nY_n は点 $(x_n, 0)$ を通り, 傾き $-\frac{1}{8}$ の直線であるから

$$y = -\frac{1}{8}(x - x_n) \quad \dots \textcircled{3}$$

点 Y_n の y 座標 l_n は, ①, ③ を解いて $l_n = \frac{1 + x_n}{9} \quad \dots \textcircled{4}$

このとき, $x_1 = 0$ であるから $l_1 = \frac{1}{9}$

- (2) 点 Z_n の y 座標が l_n であるから, その x 座標は, ② より

$$l_n = -\frac{x}{8} + 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = 8(1 - l_n)$$

これが点 X_{n+1} の x 座標であるから $x_{n+1} = 8(1 - l_n)$

したがって, 上式および④から

$$l_{n+1} = \frac{1 + x_{n+1}}{9} = \frac{1 + 8(1 - l_n)}{9} = -\frac{8}{9}l_n + 1$$

- (3) (1), (2) の結果から $l_{n+1} = -\frac{8}{9}l_n + 1 \dots \textcircled{1}$, $l_1 = \frac{1}{9}$

ここで, 定数 c を

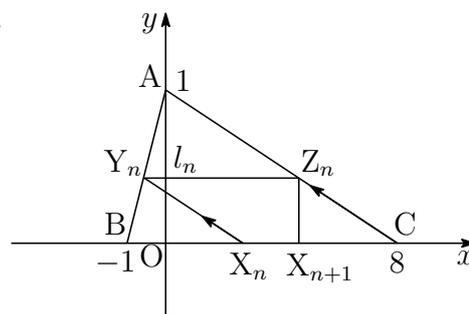
$$c = -\frac{8}{9}c + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

とおくと, ①, ②から

$$l_{n+1} - c = -\frac{8}{9}(l_n - c) \quad \text{ゆえに} \quad l_n - c = (l_1 - c) \left(-\frac{8}{9}\right)^{n-1}$$

②を解いて $c = \frac{9}{17}$ また $l_1 - c = \frac{1}{9} - \frac{9}{17} = -\frac{64}{153}$

よって $l_n = \frac{9}{17} - \frac{64}{153} \left(-\frac{8}{9}\right)^{n-1} = \frac{9}{17} + \frac{8}{17} \left(-\frac{8}{9}\right)^n$



- 4 (1) x の3次式 $f(x)$ の x^3 の係数が1, $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ であるから

$$f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta) = 3x^2 - 3(\alpha + \beta)x + 3\alpha\beta$$

また, $f(x)$ の定数項は0であるから

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)x^2 + 3\alpha\beta x$$

したがって

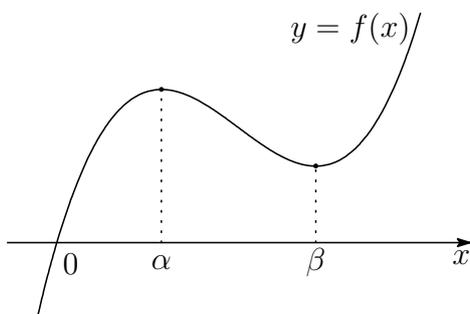
$$f(\alpha) = \alpha^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)\alpha^2 + 3\alpha^2\beta = \frac{\alpha^2(3\beta - \alpha)}{2}$$

$$f(\beta) = \beta^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)\beta^2 + 3\alpha\beta^2 = \frac{\beta^2(3\alpha - \beta)}{2}$$

- (2) $f(x)$ の増減表は

x	...	α	...	β	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(\beta)$	↗

$\alpha < \beta < 3\alpha$ より, $0 < \alpha < \beta$, $3\alpha - \beta > 0$ であるから, $f(\beta) > 0$ したがって, $y = f(x)$ のグラフの概形は, 次のようになる.



よって, $y = f(x)$ および $y = -1$ のグラフから, 3次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数は1個. ■