平成 26 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成 26 年 2 月 25 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ 空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。また，点 D を $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{b} - \vec{a}$ を満たす点，点 E を $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \vec{c} - \vec{a}$ を満たす点とし，点 P を OA の中点とする。以下の問いに答えよ。

(1) $0 < t < 1$ に対し，BD を $t : (1-t)$ に内分する点を R とし，CE を $(1-t) : t$ に内分する点を S とする．また，OB と PR の交点を M とし，OC と PS の交点を N とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\triangle$OMN の面積を t を用いて表せ。

(3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，$\triangle$OMN の面積の最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\triangle$ABC において，

$$\angle\mathrm{BAC} = \theta, \qquad \mathrm{AB} = \sin\theta, \qquad \mathrm{AC} = |\cos\theta|$$

とする。ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) BC^2 の最大値と最小値を求めよ。

(2) $\triangle$ABC の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 放物線 $C : y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ が点 $\mathrm{P}(1, -2)$ と $\mathrm{Q}(5,\ 10)$ を通るとし，P，Q における C の接線をそれぞれ l，m とする。以下の問いに答えよ。

(1) b，c をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) l と m の交点の y 座標が -4 であるとき，a，b，c を求めよ。

(3) (2) で求めた a，b，c について，放物線 C と l，m で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 1 次関数 $f_n(x) = a_n x + b_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ は以下の 2 つの条件を満たすとする。

(i) $f_1(x) = x$

(ii) $f_{n+1}(x)$ は整式 $P_n(x) = \displaystyle\int_1^x 6t f_n(t)\,dt$ を $x^2 + x$ で割った余りに等しい。

以下の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 1$ のとき，a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数であることを示せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は 3 の倍数ではないことを示せ。

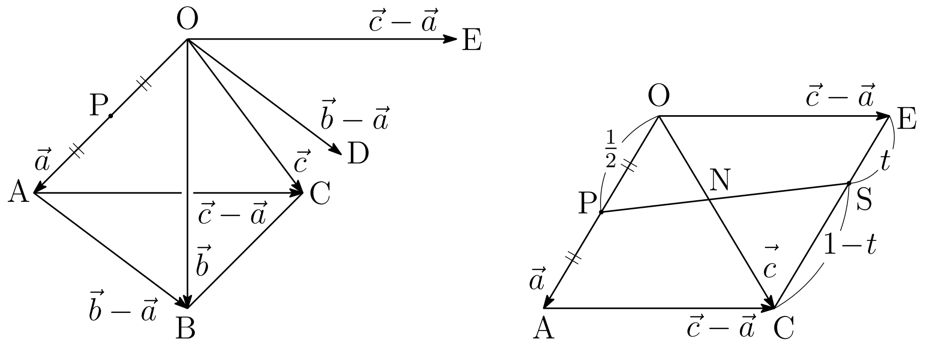
解答例

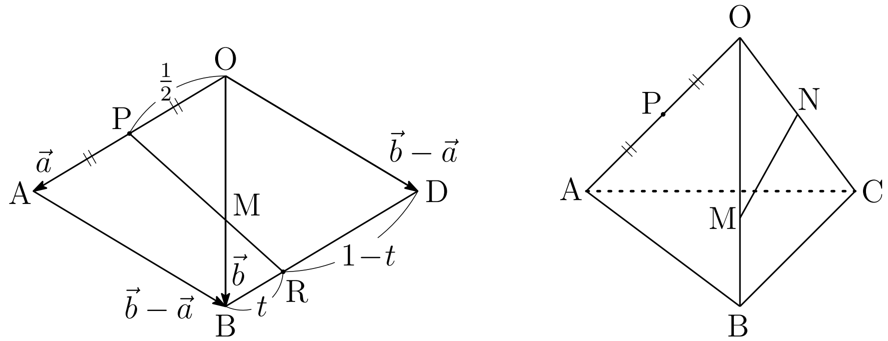
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\triangle\mathrm{OPM} \backsim \triangle\mathrm{BRM}$，$\triangle\mathrm{OPN} \backsim \triangle\mathrm{CSN}$ であるから，

これらの相似比から

$$\mathrm{OM} : \mathrm{MB} = \frac{1}{2} : t, \quad \mathrm{ON} : \mathrm{NC} = \frac{1}{2} : (1-t)$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+t}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+2}\boldsymbol{t}}\boldsymbol{\vec{b}}$, $\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3-2}\boldsymbol{t}}\boldsymbol{\vec{c}}$





(2) $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ であるから，(1) の結果から $\quad \mathrm{OM} = \dfrac{1}{1+2t}$，$\mathrm{ON} = \dfrac{1}{3-2t}$

よって $\qquad \triangle\mathrm{OMN} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OM}\cdot\mathrm{ON}\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+2t} \times \dfrac{1}{3-2t} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4(1+2t)(3-2t)}}$$

(3) $f(t) = (1+2t)(3-2t)$ とおくと $(0 < t < 1)$

$$f(t) = -4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 4 \quad \text{ゆえに} \quad 3 < f(t) \leqq 4$$

$\triangle\mathrm{OMN} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{1}{f(t)}$ であるから，$\triangle\mathrm{OMN}$ の面積の最小値は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{16}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \sin^2\theta + |\cos\theta|^2 - 2\sin\theta|\cos\theta|\cos\theta \\ &= 1 - 2\sin\theta|\cos\theta|\cos\theta\end{aligned}$$

(i) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき，$|\cos\theta| = \cos\theta$ であるから

$$\mathrm{BC}^2 = 1 - 2\sin\theta\cos^2\theta = 1 - 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) = 2\sin^3\theta - 2\sin\theta + 1$$

(ii) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき，$|\cos\theta| = -\cos\theta$ であるから

$$\mathrm{BC}^2 = 1 + 2\sin\theta\cos^2\theta = 1 + 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) = -2\sin^3\theta + 2\sin\theta + 1$$

ここで，関数 $f(t) = -2t^3 + 2t\ (0 < t < 1)$ をおくと　$f'(t) = -2(3t^2 - 1)$

$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	(0)

$t = \sin\theta$ とおくと　$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき　$\mathrm{BC}^2 = -f(t) + 1$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき　$\mathrm{BC}^2 = f(t) + 1$

よって，BC^2 の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{9} + 1}$，最小値は $\boldsymbol{-\dfrac{4\sqrt{3}}{9} + 1}$

(2) $$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\sin\theta|\cos\theta|\sin\theta = \frac{1}{2}\sin^2\theta|\cos\theta| \\ &= \frac{1}{2}(1 - |\cos\theta|^2)|\cos\theta| = \frac{1}{2}(-|\cos\theta|^3 + |\cos\theta|)\end{aligned}$$

$u = |\cos\theta|$ とおくと，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ に注意して

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}(-u^3 + u) = \frac{1}{4}(-2u^3 + 2u) = \frac{1}{4}f(u) \quad (0 < u < 1)$$

よって，(1) の増減表により，求める最大値は

$$\frac{1}{4} \times \frac{4\sqrt{3}}{9} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ が点 $\mathrm{P}(1, -2)$，$\mathrm{Q}(5,\ 10)$ を通るから

$$-2 = a + b + c, \quad 10 = 25a + 5b + c$$

これを解いて　$\boldsymbol{b = -6a + 3}$，$\boldsymbol{c = 5a - 5}$

(2) $f(x) = ax^2 + (-6a+3)x + 5a - 5$ とおくと，$f'(x) = 2ax - 6a + 3$ より

$$f'(1) = -4a + 3, \quad f'(5) = 4a + 3$$

ゆえに，P における接線 l の方程式は

$$y - (-2) = (-4a+3)(x-1)$$

すなわち　$y = (-4a+3)x + 4a - 5$　$\cdots$①

また，Q における接線 m の方程式は

$$y - 10 = (4a+3)(x-5)$$

すなわち　$y = (4a+3)x - 20a - 5$　$\cdots$②

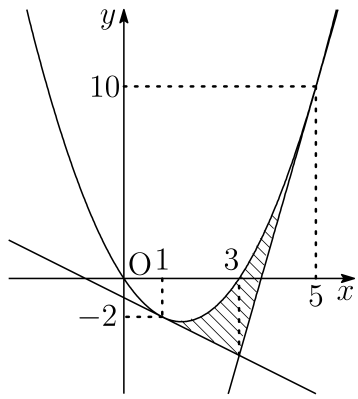
l と m の交点は，①，② を解いて　$(3, -8a+4)$

この交点の y 座標が -4 であるから

$$-8a + 4 = -4 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a = 1}$$

これを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{b = -3}$，$\boldsymbol{c = 0}$

(3) 求める面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{(x^2 - 3x) - (-x-1)\}dx \\ &\qquad + \int_3^5 \{(x^2 - 3x) - (7x - 25)\}dx \\ &= \int_1^3 (x-1)^2\,dx + \int_3^5 (x-5)^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^3 + \left[\frac{1}{3}(x-5)\right]_3^5 = \boldsymbol{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$

解説 l と m の交点の x 座標は　$x = \dfrac{1+5}{2}$

(3) で求めた面積 S に対して，C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は $2S$ である (九大 2009 年一般前期文系数学 $\boxed{\mathbf{4}}$ の補足[1] を参照).

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f_n(x) = a_n x + b_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ より

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \int_1^x 6t f_n(t)\,dt = \int_1^x 6t(a_n t + b_n)\,dt \\ &= \int_1^x (6a_n t^2 + 6b_n t)\,dt = \Big[\ 2a_n t^3 + 3b_n t^2\ \Big]_1^x \\ &= 2a_n x^3 + 3b_n x^2 - 2a_n - 3b_n \end{aligned}$$

$P_n(x)$ を $x^2 + x$ で割ることにより

$$P_n(x) = (x^2 + x)\{2a_n x + (3b_n - 2a_n)\} + (2a_n - 3b_n)x - 2a_n - 3b_n$$

$P_n(x)$ を $x^2 + x$ で割った余り $(2a_n - 3b_n)x - 2a_n - 3b_n$ が $a_{n+1}x + b_{n+1}$ に等しいので，同じ次数の項の係数を比較して

$$\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n - 3b_n, \qquad b_{n+1} = -2a_n - 3b_n}$$

(2) $f_1(x) = x$ より　$a_1 = 1$，$b_1 = 0$

これと (1) の結果により，a_n と b_n は整数である．

［1］$n = 2$ のとき　$a_2 = 2a_1 - 3b_1 = 2$，$b_2 = -2a_1 - 3b_1 = -2$

よって，a_2 と b_2 は偶数である．

［2］$n = k$ のとき，a_k と b_k が偶数であると仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k - 3b_k, & b_{k+1} &= -2a_k - 3b_k \\ &= 2(a_k - b_k) - b_k & &= -2(a_k + b_k) - b_k \end{aligned}$$

したがって，a_{k+1} と b_{k+1} も偶数である．

［1］，［2］から，$n \geqq 2$ のとき，a_n と b_n は偶数である．

ゆえに，$n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数である．

別解 $f_1(x) = x$ より　$a_1 = 1$，$b_1 = 0$

これと (1) の結果により，a_n と b_n は整数であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n - 3b_n \equiv b_n \pmod 2 \\ b_{n+1} &= -2a_n - 3b_n \equiv b_n \pmod 2 \end{aligned}$$

$b_1 = 0$，$b_{n+1} \equiv b_n \pmod 2$ より　$b_n \equiv 0 \pmod 2$

$a_{n+1} \equiv b_n \pmod 2$ より，$n \geqq 2$ のとき　$a_n \equiv 0 \pmod 2$

よって，$n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数である．

(3) ［1］$a_2=2$，$b_2=-2$ より，a_2 と b_2 は 3 の倍数でない．

［2］$n=k$ のとき，a_k と b_k が 3 の倍数でないと仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k-3b_k, & b_{k+1} &= -2a_k-3b_k \\ &= 3(a_k-b_k)-a_k & &= -3(a_k+b_k)+a_k \end{aligned}$$

したがって，a_{k+1} と b_{k+1} も 3 の倍数でない．

［1］，［2］から，$n \geqq 2$ のとき，a_n と b_n は 3 の倍数でない．

ゆえに，$n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は 3 の倍数でない．

別解 a_n と b_n は整数であるから

$$a_{n+1}=2a_n-3b_n \equiv -a_n \pmod 3$$
$$b_{n+1}=-2a_n-3b_n \equiv a_n \pmod 3$$

$a_1=1$，$a_{n+1}\equiv -a_n \pmod 3$ より　$a_n \equiv (-1)^{n-1} \pmod 3$

$b_{n+1}\equiv a_n \pmod 3$ より，$n \geqq 2$ のとき　$b_n \equiv (-1)^n \pmod 3$

よって，$n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は 3 の倍数でない．