平成 25 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成 25 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 n を 3 以上の奇数として，次の集合を考える。

$$A_n = \left\{ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}} \right\}$$

以下の問いに答えよ。

(1) A_9 のすべての要素を求め，それらの和を求めよ。

(2) ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$ が A_n 内の最大の数であることを示せ。

(3) A_n 内の奇数の個数を m とする。m は奇数であることを示せ。

2 $f(x)$ を $x = -1$ で極大，$x = 2$ で極小となる 3 次関数で

$$\int_0^2 f'(x)\,dx = -5$$

を満たすものとする。以下の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

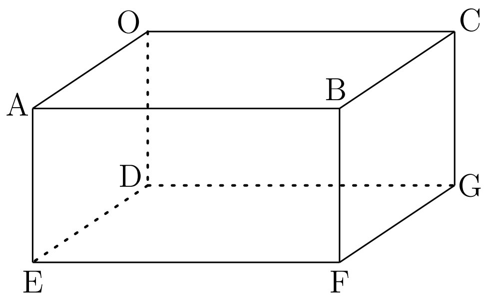
(2) $f(x)$ の極大値と極小値の差を求めよ。

3 直方体 OABC-DEFG において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OD}=1$，$\mathrm{OC}=2$ とし，辺 EF の中点を M とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とし，点 P から線分 CM におろした垂線と線分 CM との交点を H とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，t を用いて表せ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|^2$ の最小値を求めよ。



4 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n + n^2$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2) a_n を n の式で表せ。

解答例

$\boxed{1}$ (1)

$$\begin{aligned} A_9 &= \{{}_9\mathrm{C}_1,\ {}_9\mathrm{C}_2,\ {}_9\mathrm{C}_3,\ {}_9\mathrm{C}_4\} \\ &= \{9,\ 36,\ 84,\ 126\} \end{aligned}$$

求める要素の和は　$9+36+84+126=\mathbf{255}$

(2) n は3以上の奇数であるから，$n=2l+1$ (l は自然数) とおくと

$$A_n = \{{}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_l\}$$

自然数 k を $1 \leqq k < l$ とすると

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_{k+1} - {}_n\mathrm{C}_k &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} - \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!\{(n-k)-(k+1)\}}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n-2k-1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!\{(2l-1)-2k-1\}}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!\cdot 2(l-k)}{(k+1)!(n-k)!} > 0 \end{aligned}$$

ゆえに　${}_n\mathrm{C}_1 < {}_n\mathrm{C}_2 < \cdots < {}_n\mathrm{C}_l$

よって，A_n 内の最大の数は ${}_n\mathrm{C}_l$，すなわち ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$ である．

別解 $\dfrac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}}{{}_n\mathrm{C}_k} - 1 = \dfrac{n-k}{k+1} - 1 = \dfrac{2\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}{k+1} > 0$

(3) 2項定理により　${}_n\mathrm{C}_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{l} {}_n\mathrm{C}_k + \sum_{k=l+1}^{2l} {}_n\mathrm{C}_k + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$　$\cdots$①

ここで　$\displaystyle\sum_{k=l+1}^{2l} {}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=n-l}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{l} {}_n\mathrm{C}_{n-k} = \sum_{k=1}^{l} {}_n\mathrm{C}_k$　$\cdots$②

② を ① に代入して整理すると　$\displaystyle\sum_{k=1}^{l} {}_n\mathrm{C}_k = 2^{n-1} - 1$

n は3以上の奇数であるから，A_n の和が奇数である．

よって，A_n 内の奇数の個数 m は，奇数である．　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 3次関数 $f(x)$ は，$x=-1,\ 2$ で極値をとるから，定数 a を用いて

$$f'(x)=a(x+1)(x-2)=a(x^2-x-2)$$

とおける．

$$\begin{aligned}\int_0^2 f'(x)\,dx &= a\int_0^2 (x^2-x-2)\,dx\\ &= a\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^2=-\frac{10}{3}a\end{aligned}$$

このとき　$-\dfrac{10}{3}a=-5$　ゆえに　$a=\dfrac{3}{2}$

よって　　$\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{3}{2}(x^2-x-2)}$

(2) 極大値 $f(-1)$ と極小値 $f(2)$ の差は

$$\begin{aligned}f(-1)-f(2) &= \int_2^{-1} f'(x)\,dx\\ &= \frac{3}{2}\int_2^{-1}(x+1)(x-2)\,dx\\ &= \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(-1-2)^3=\boldsymbol{\frac{27}{4}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\vec{c}-t\vec{d}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FM}}=\vec{a}+\vec{d}+\left(-\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\left(\vec{c}-t\,\vec{d}\right)+\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)=\boldsymbol{\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+(1-t)\vec{d}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}})}{|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ により，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=0$ に注意して

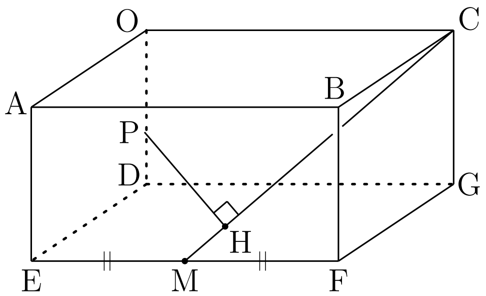
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=-\overrightarrow{\mathrm{PC}}=-\left(\vec{c}-t\vec{d}\right)=-\vec{c}+t\vec{d}$$

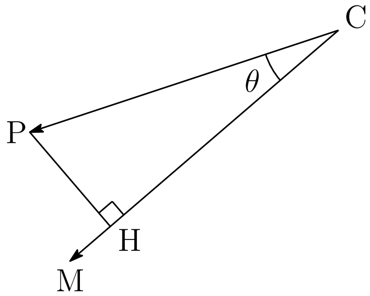
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}&=\left(-\vec{c}+t\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)\\&=\frac{1}{2}|\vec{c}|^2+t|\vec{d}|^2=\frac{1}{2}\cdot2^2+t\cdot1^2=2+t\\|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}&=\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)\\&=|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2=1^2+\frac{1}{4}\cdot2^2+1^2=3\end{aligned}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{t+2}{3}\left(\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}&=\overrightarrow{\mathrm{CH}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}\\&=\frac{2+t}{3}\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)-\left(-\vec{c}+t\vec{d}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{2+t}{3}\vec{a}+\frac{4-t}{6}\vec{c}+\frac{2-2t}{3}\vec{d}}\end{aligned}$$





補足

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ のなす角を θ とすると　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}||\overrightarrow{\mathrm{CM}}|}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|\cos\theta\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}})}{|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CM}}$

(3) (2) の結果を利用すると

$$
\begin{aligned}
&|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|^2\\
=&t^2|\vec{d}|^2+\left(\frac{2+t}{2}\right)^2|\vec{a}|^2+\left(\frac{4-t}{6}\right)^2|\vec{c}|^2+\left(\frac{2-2t}{3}\right)^2|\vec{d}|^2\\
=&t^2\cdot1^2+\left(\frac{2+t}{3}\right)^2\cdot1^2+\left(\frac{4-t}{6}\right)^2\cdot2^2+\left(\frac{2-2t}{3}\right)^2\cdot1^2\\
=&\frac{5}{3}t^2-\frac{4}{3}t+\frac{8}{3}\\
=&\frac{5}{3}\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{12}{5}\qquad(0\leqq t\leqq1)
\end{aligned}
$$

よって，求める最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{12}{5}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ より

$$a_{n+1}=\{2a_{n+1}+(n+1)^2\}-(2a_n+n^2)$$

ゆえに　$\boldsymbol{a_{n+1}=2a_n-2n-1}\quad\cdots①$

(2) 初項 a_1 は　$S_1=2a_1+1^2$

$S_1=a_1$ より　$a_1=-1$

① に対して，次の等式をみたす n の 1 次式 $f(n)$ を考える．

$$f(n+1)=2f(n)-2n-1\quad\cdots②$$

$f(n)=pn+q$ とおくと　$p(n+1)+q=2(pn+q)-2n-1$

n に関する恒等式であるから　$p=2$，$q=3$

ゆえに　$f(n)=2n+3\quad\cdots③$

① − ② から　$a_{n+1}-f(n+1)=2\{a_n-f(n)\}$

したがって　$a_n-f(n)=2^{n-1}\{a_1-f(1)\}$

$a_1=-1$，③ より　$a_n-(2n+3)=2^{n-1}(-1-5)$

よって　$\boldsymbol{a_n=2n+3-3\cdot2^n}$ ■