

平成 25 年度 熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部, 医学部保健学科看護学専攻) 平成 25 年 2 月 25 日

1 n を 3 以上の奇数として, 次の集合を考える。

$$A_n = \left\{ {}_n C_1, {}_n C_2, \dots, {}_n C_{\frac{n-1}{2}} \right\}$$

以下の問いに答えよ。

- (1) A_9 のすべての要素を求め, それらの和を求めよ。
- (2) ${}_n C_{\frac{n-1}{2}}$ が A_n 内の最大の数であることを示せ。
- (3) A_n 内の奇数の個数を m とする。 m は奇数であることを示せ。

2 $f(x)$ を $x = -1$ で極大, $x = 2$ で極小となる 3 次関数で

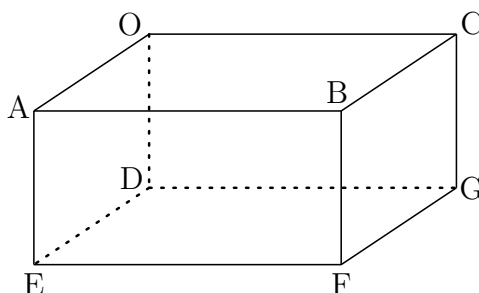
$$\int_0^2 f'(x) dx = -5$$

を満たすものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) $f'(x)$ を求めよ。
- (2) $f(x)$ の極大値と極小値の差を求めよ。

- 3 直方体 OABC-DEFG において、 $OA = OD = 1$, $OC = 2$ とし、辺 EF の中点を M とする。また、 $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OD}$ ($0 \leq t \leq 1$) とし、点 P から線分 CM におろした垂線と線分 CM との交点を H とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ とおくと、以下の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{PC} , \overrightarrow{CM} , \overrightarrow{PM} を \vec{a} , \vec{c} , \vec{d} を用いて表せ。
- (2) \overrightarrow{PH} を \vec{a} , \vec{c} , \vec{d} , t を用いて表せ。
- (3) $|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{PH}|^2$ の最小値を求めよ。



- 4 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n + n^2$$

で与えられるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。
- (2) a_n を n の式で表せ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad A_9 = \{ {}_9C_1, {}_9C_2, {}_9C_3, {}_9C_4 \} \\ = \{ 9, 36, 84, 126 \}$$

求める要素の和は $9 + 36 + 84 + 126 = 255$

(2) n は 3 以上の奇数であるから, $n = 2l + 1$ (l は自然数) とおくと

$$A_n = \{ {}_nC_1, {}_nC_2, \dots, {}_nC_l \}$$

自然数 k を $1 \leq k < l$ とすると

$$\begin{aligned} {}_nC_{k+1} - {}_nC_k &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} - \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!\{(n-k) - (k+1)\}}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n-2k-1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!\{(2l-1) - 2k-1\}}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n! \cdot 2(l-k)}{(k+1)!(n-k)!} > 0 \end{aligned}$$

ゆえに ${}_nC_1 < {}_nC_2 < \dots < {}_nC_l$

よって, A_n 内の最大の数は ${}_nC_l$, すなわち ${}_nC_{\frac{n-1}{2}}$ である.

$$\text{別解} \quad \frac{{}_nC_{k+1}}{{}_nC_k} - 1 = \frac{n-k}{k+1} - 1 = \frac{2\left(\frac{n-1}{2} - k\right)}{k+1} > 0$$

$$(3) \quad 2 \text{項定理により} \quad {}_nC_0 + \sum_{k=1}^l {}_nC_k + \sum_{k=l+1}^{2l} {}_nC_k + {}_nC_n = 2^n \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{ここで} \quad \sum_{k=l+1}^{2l} {}_nC_k = \sum_{k=n-l}^{n-1} {}_nC_k = \sum_{k=1}^l {}_nC_{n-k} = \sum_{k=1}^l {}_nC_k \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{を} \textcircled{1} \text{に代入して整理すると} \quad \sum_{k=1}^l {}_nC_k = 2^{n-1} - 1$$

n は 3 以上の奇数であるから, A_n の和が奇数である.

よって, A_n 内の奇数の個数 m は, 奇数である.

- 2** (1) 3次関数 $f(x)$ は, $x = -1, 2$ で極値をとるから, 定数 a を用いて

$$f'(x) = a(x+1)(x-2) = a(x^2 - x - 2)$$

とおける.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f'(x) dx &= a \int_0^2 (x^2 - x - 2) dx \\ &= a \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^2 = -\frac{10}{3}a \end{aligned}$$

$$\text{このとき } -\frac{10}{3}a = -5 \quad \text{ゆえに } a = \frac{3}{2}$$

$$\text{よって } f'(x) = \frac{3}{2}(x^2 - x - 2)$$

- (2) 極大値 $f(-1)$ と極小値 $f(2)$ の差は

$$\begin{aligned} f(-1) - f(2) &= \int_2^{-1} f'(x) dx \\ &= \frac{3}{2} \int_2^{-1} (x+1)(x-2) dx \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) (-1-2)^3 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} = \vec{c} - t\vec{d}$$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FM} = \vec{a} + \vec{d} + \left(-\frac{1}{2}\vec{c}\right) = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}$$

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CM} = (\vec{c} - t\vec{d}) + \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}\right) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + (1-t)\vec{d}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{CH} = \frac{(\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CM})}{|\overrightarrow{CM}|^2} \overrightarrow{CM} \text{ により, } \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{a} = 0 \text{ に注意して}$$

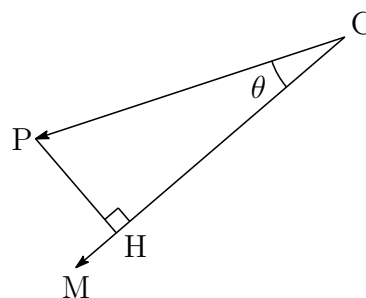
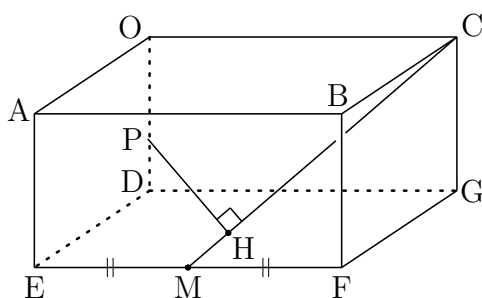
$$\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{PC} = -(\vec{c} - t\vec{d}) = -\vec{c} + t\vec{d}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CM} &= (-\vec{c} + t\vec{d}) \cdot \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}\right) \\ &= \frac{1}{2}|\vec{c}|^2 + t|\vec{d}|^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + t \cdot 1^2 = 2 + t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CM}|^2 &= \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CM} = \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}\right) \cdot \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}\right) \\ &= |\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 = 1^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 + 1^2 = 3 \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{CH} = \frac{2+t}{3} \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \overrightarrow{PH} &= \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CP} \\ &= \frac{2+t}{3} \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}\right) - (-\vec{c} + t\vec{d}) \\ &= \frac{2+t}{3}\vec{a} + \frac{4-t}{6}\vec{c} + \frac{2-2t}{3}\vec{d} \end{aligned}$$



補足

$$2 \text{ つのベクトル } \overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CM} \text{ のなす角を } \theta \text{ とすると } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CM}}{|\overrightarrow{CP}| |\overrightarrow{CM}|}$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{CH} = |\overrightarrow{CP}| \cos \theta \frac{\overrightarrow{CM}}{|\overrightarrow{CM}|} = \frac{(\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CM})}{|\overrightarrow{CM}|^2} \overrightarrow{CM}$$

(3) (2) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}
 & |\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{PH}|^2 \\
 &= t^2 |\vec{d}|^2 + \left(\frac{2+t}{2}\right)^2 |\vec{a}|^2 + \left(\frac{4-t}{6}\right)^2 |\vec{c}|^2 + \left(\frac{2-2t}{3}\right)^2 |\vec{d}|^2 \\
 &= t^2 \cdot 1^2 + \left(\frac{2+t}{3}\right)^2 \cdot 1^2 + \left(\frac{4-t}{6}\right)^2 \cdot 2^2 + \left(\frac{2-2t}{3}\right)^2 \cdot 1^2 \\
 &= \frac{5}{3}t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{8}{3} \\
 &= \frac{5}{3} \left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{12}{5} \quad (0 \leq t \leq 1)
 \end{aligned}$$

よって、求める最小値は $\frac{12}{5}$

4 (1) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ より

$$a_{n+1} = \{2a_{n+1} + (n+1)^2\} - (2a_n + n^2)$$

$$\text{ゆえに} \quad \mathbf{a_{n+1} = 2a_n - 2n - 1} \quad \dots \textcircled{1}$$

(2) 初項 a_1 は $S_1 = 2a_1 + 1^2$

$$S_1 = a_1 \text{ より} \quad a_1 = -1$$

① に対して、次の等式をみたす n の 1 次式 $f(n)$ を考える.

$$f(n+1) = 2f(n) - 2n - 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$f(n) = pn + q \text{ とおくと} \quad p(n+1) + q = 2(pn + q) - 2n - 1$$

$$n \text{ に関する恒等式であるから} \quad p = 2, \quad q = 3$$

$$\text{ゆえに} \quad f(n) = 2n + 3 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から} \quad a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$$

$$\text{したがって} \quad a_n - f(n) = 2^{n-1}\{a_1 - f(1)\}$$

$$a_1 = -1, \textcircled{3} \text{ より} \quad a_n - (2n + 3) = 2^{n-1}(-1 - 5)$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{a_n = 2n + 3 - 3 \cdot 2^n}$$