平成 24 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成 24 年 2 月 25 日

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ。

(1) k を整数とするとき，x の方程式 $x^2-k^2=12$ が整数解をもつような k の値をすべて求めよ。

(2) x の方程式 $(2a-1)x^2+(3a+2)x+a+2=0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつような整数 a の値とそのときの整数解をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ に対して次の漸化式が成り立つとする。

$$a_1=1,\quad a_2=3,\quad a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=1 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 定数 c に対して $b_n=a_n+c$ で定められた数列 $\{b_n\}$ を考える。

$$b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n=0 \quad (n=1,2,3\cdots)$$

を満たす c の値を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(\theta)=4\left(\sin^3\dfrac{\theta}{2}+\cos^3\dfrac{\theta}{2}\right)+6\left(\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)(\sin\theta-2)-\sqrt{6}(\sin\theta+1)$ とおく。ただし，θ の範囲は $0\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x=\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}$ とおくとき，$f(\theta)$ を x のみの式で表せ。

(2) $f(\theta)$ の最小値そのときの θ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 定数 a は $0<a<1$ をみたすとする。曲線 $C:y=(x-1)^2$ と C 上の点 $(a,\ (a-1)^2)$ における接線 ℓ について，以下の問いに答えよ。

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と接線 ℓ および 2 直線 $x=0$，$x=1$ とで囲まれた 2 つの部分の面積の和 $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

(3) 曲線 C と 2 直線 $x=0$，$y=0$ とで囲まれ，接線 ℓ の上側にある 2 つの部分の面積の和 $T(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 整数解を m とすると $m^2-k^2=12$

$$|m|^2-|k|^2=12$$

ゆえに $(|m|+|k|)(|m|-|k|)=12$

ここで，$|m|+|k|=(|m|-|k|)+2|k|$ および上式の偶奇性により，$|m|+|k|$，$|m|-|k|$ はともに偶数であるから

$$\begin{cases} |m|+|k|=6 \\ |m|-|k|=2 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad |m|=4,\ \ |k|=2$$

よって $\boldsymbol{k=\pm 2}$

(2) a は整数であるから $2a-1\neq 0$

したがって，x の方程式 $(2a-1)x^2+(3a+2)x+a+2=0$ の解は

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(3a+2)\pm\sqrt{(3a+2)^2-4(2a-1)(a+2)}}{2(2a-1)} \\ &= \frac{-(3a+2)\pm\sqrt{a^2+12}}{2(2a-1)} \end{aligned}$$

この方程式が整数解をもつとき

$$l^2=a^2+12 \quad \text{すなわち} \quad l^2-a^2=12$$

を満たす整数 l が存在するから，(1) の結果から，$a=\pm 2$

ゆえに，$a=2$ のとき $x=-2,-\dfrac{2}{3}$

$a=-2$ のとき $x=0,-\dfrac{4}{5}$

よって **$\boldsymbol{a=2}$ のとき $\boldsymbol{x=-2}$**

$\boldsymbol{a=-2}$ のとき $\boldsymbol{x=0}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n=0\cdots$① と $a_{n+2}-5a_{n+1}+6_n=1$ の辺々の差をとると

$$(b_{n+2}-a_{n+2})-5(a_{n+1}-b_{n+1})+6(b_n-a_n)=-1$$

$b_n-a_n=c$ であるから

$$c-5c+6c=-1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{c=-\frac{1}{2}}$$

(2) (1) の結果より，$b_n=a_n-\dfrac{1}{2}$ であるから

$$b_1=a_1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \quad b_2=a_2-\frac{1}{2}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

① より

$$\begin{aligned} b_{n+2}-2b_{n+1}&=3(b_{n+1}-2b_n) \\ b_{n+2}-3b_{n+1}&=2(b_{n+1}-3b_n) \end{aligned}$$

数列 $\{b_{n+1}-2b_n\}$ は初項 b_2-2b_1，公比 3 の等比数列であり，同様に，
数列 $\{b_{n+1}-3b_n\}$ は初項 b_2-3b_1，公比 2 の等比数列であるから

$$\begin{aligned} b_{n+1}-2b_n&=3^{n-1}(b_2-2b_1)=\frac{1}{2}\cdot 3^n \\ b_{n+1}-3b_n&=2^{n-1}(b_2-3b_1)=2^{n-1} \end{aligned}$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$b_n=\frac{1}{2}\cdot 3^n-2^{n-1}$$

$a_n=b_n+\dfrac{1}{2}$ であるから

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot 3^n-2^{n-1}+\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3^n-2^n+1}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x=\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}$ の両辺を平方すると

$$x^2=1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=1+\sin\theta$$

ゆえに

$$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(x^2-1),\quad \sin\theta=x^2-1$$

$$\begin{aligned}\sin^3\frac{\theta}{2}+\cos^3\frac{\theta}{2}&=\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^3-3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)\\&=x^3-3\cdot\frac{1}{2}(x^2-1)x=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x\end{aligned}$$

したがって，上の諸式より

$$\begin{aligned}f(\theta)&=4\left(\sin^3\frac{\theta}{2}+\cos^3\frac{\theta}{2}\right)+6\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)(\sin\theta-2)-\sqrt{6}(\sin\theta+1)\\&=4\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x\right)+6x\{(x^2-1)-2\}-\sqrt{6}\{(x^2-1)+1\}\\&=\boldsymbol{4x^3-\sqrt{6}x^2-12x}\end{aligned}$$

(2)
$$x=\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi\right)\quad\cdots①$$

このとき　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\leqq\pi$　ゆえに　$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$

(1) の結果より

$$g(x)=4x^3-\sqrt{6}x^2-12x\quad(0\leqq x\leqq\sqrt{2})$$

とおくと

$$g'(x)=12x^2-2\sqrt{6}x-12=2(2x-\sqrt{6})(3x+\sqrt{6})$$

したがって，$g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	極小 $-\frac{9}{2}\sqrt{6}$	$\nearrow$	

また，① により $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　すなわち　$\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

$$\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\quad ゆえに\quad \theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

よって，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{9}{2}\sqrt{6}}$ をとる．

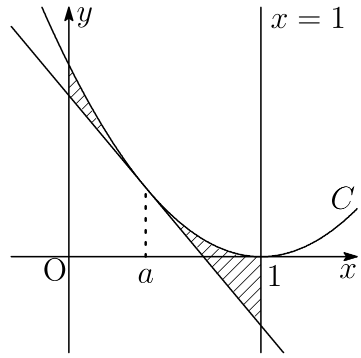
$\boxed{\textbf{4}}$ (1) $y=(x-1)^2$ を微分すると　$y'=2(x-1)$

ゆえに，ℓ の方程式は

$$y-(a-1)^2=2(a-1)(x-a)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=2(a-1)x-a^2+1}$$

(2) (1) の結果から

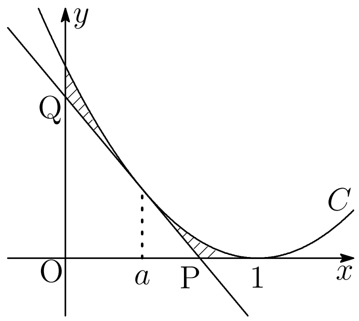
$$\begin{aligned}S(a)&=\int_0^1\left[(x-1)^2-\{2(a-1)x-a^2+1\}\right]dx\\&=\int_0^1(x^2-2ax+a^2)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+a^2x\right]_0^1\\&=a^2-a+\frac{1}{3}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\end{aligned}$$



$0<a<1$ より，

$S(a)$ は $\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$ で**最小値** $\boldsymbol{\frac{1}{12}}$ をとる．

(3) ℓ の x 軸および y 軸との交点を，それぞれ $\mathrm{P}\left(\dfrac{a+1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}(0,-a^2+1)$ とすると



$$\begin{aligned}T(a)&=\int_0^1(x-1)^2dx-\triangle\mathrm{OPQ}\\&=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1-\frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{2}\cdot(-a^2+1)\\&=\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a+\frac{1}{12}\end{aligned}$$

これを微分すると

$$T'(a)=\frac{1}{4}(3a^2+2a-1)=\frac{1}{4}(a+1)(3a-1)$$

したがって，$T(a)$ の増減表は，次のようになる．

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$T'(a)$		$-$	0	$+$	
$T(a)$		$\searrow$	極小 $\frac{1}{27}$	$\nearrow$	

よって，$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\frac{1}{27}}$ をとる．