平成 23 年度　熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成 23 年 2 月 25 日

1 四角形 ABCD において，

$$\mathrm{AB} = a,\quad \mathrm{BC} = b,\quad \mathrm{CD} = c,\quad \mathrm{DA} = d,\quad \mathrm{AC} = x,\quad \mathrm{BD} = y$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\cos A$，$\cos B$，$\cos C$，$\cos D$ を a，b，c，d，x，y を用いて表せ。

(2) 四角形 ABCD が円に内接するとき，

$$xy = ac + bd$$

が成り立つことを示せ。

2 2 つの整数の平方の和で表される整数の集合を A とする。以下の問いに答えよ。

(1) 集合 A のある要素 $a^2 + b^2$ ($a,\ b$ は整数) が 3 で割り切れるとき，a，b はともに 3 で割り切れることを示せ。

(2) x を整数とする。$9x$ が集合 A の要素であるとき，x は集合 A の要素であることを示せ。

3 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = -x^2+2x-\dfrac{1}{2}$ を考える。点 $\mathrm{A}\left(t, -t^2 + 2t - \dfrac{1}{2}\right)$ における C_2 の接線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

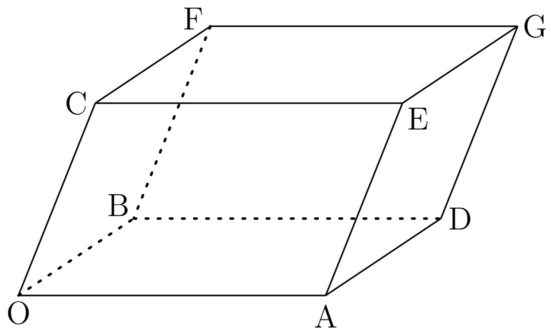
(1) ℓ と C_1 との交点の x 座標を，t を用いて表せ。

(2) 点 A の x 座標を $t = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ とするとき，第 1 象限において ℓ，C_1 および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を 2 : 3 に内分する点を N，辺 DG を 1 : 2 に内分する点を L とする。また，辺 OC を $k : 1 - k \ (0 < k < 1)$ に内分する点を K とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

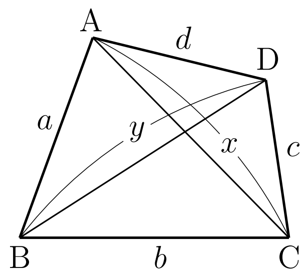
(2) 3 点 M，N，K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ。



解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 余弦定理により

$$\boldsymbol{\cos A = \frac{a^2+d^2-y^2}{2ad}}$$
$$\boldsymbol{\cos B = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}}$$
$$\boldsymbol{\cos C = \frac{b^2+c^2-y^2}{2bc}}$$
$$\boldsymbol{\cos D = \frac{c^2+d^2-x^2}{2cd}}$$



(2) 四角形ABCDが円に内接するとき，$B+D=180^\circ$ より　$\cos B+\cos D=0$

(1) の結果をこれに代入して

$$\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}+\frac{c^2+d^2-x^2}{2cd}=0$$

したがって　$(ab+cd)x^2=cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)$

$$x^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \quad \cdots ①$$

同様に，$\cos A+\cos C=0$ に (1) の結果を代入して

$$\frac{a^2+d^2-y^2}{2ad}+\frac{b^2+c^2-y^2}{2bc}=0$$

したがって　$(ad+bc)y^2=bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)$

$$y^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc} \quad \cdots ②$$

①，② より　$x^2y^2=(ac+bd)^2$　よって　$xy=ac+bd$

トレミーの定理

複素数平面上に 4 点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) をとる．このとき次式が成り立つ．

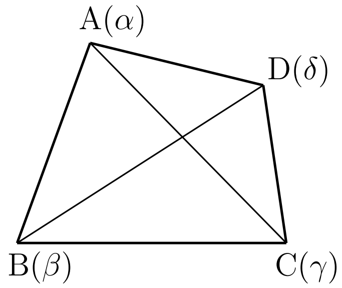
$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)=(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)$$

したがって

$$|\alpha-\beta||\gamma-\delta|+|\alpha-\delta||\beta-\gamma| \geqq |\alpha-\gamma||\beta-\delta|$$

よって，次の定理 (トレミーの定理) が成り立つ．

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC} \geqq \mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD} \quad \cdots(*)$$



とくに，(∗) で等号が成立するとき，正の実数 k を用いて

$$k(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)$$

ゆえに $$\frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\delta-\gamma}=-k$$

したがって $$\arg\frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}+\arg\frac{\beta-\gamma}{\delta-\gamma}=\pi$$

$$\angle\delta\alpha\beta+\angle\beta\gamma\delta=\pi$$

すなわち $$\angle\mathrm{DAB}+\angle\mathrm{BCD}=\pi$$

よって，4 点 A，B，C，D が同一円周上にあるときに限る．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) k を整数とすると

$$(3k)^2 = 3{\cdot}3k^2, \quad (3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$$

したがって，$a^2 + b^2$ が 3 で割り切れるのは，a，b がともに 3 で割り切れるときに限る．

(2) $9x \in A$ のとき

$$a^2 + b^2 = 9x = 3{\cdot}3x$$

をみたす整数 a，b が存在する．このとき，$a^2 + b^2$ は 3 で割り切れるから，(1) の結論により，$a = 3p$，$b = 3q$ をみたす整数 p，q が存在し

$$(3p)^2 + (3q)^2 = 9x \quad \text{ゆえに} \quad p^2 + q^2 = x$$

よって　$x \in A$

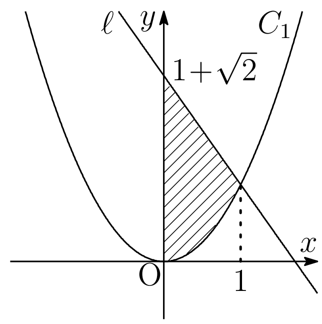
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ を微分すると　$y' = -2x + 2$
点 $\mathrm{A}\left(t, -t^2 + 2t - \frac{1}{2}\right)$ における接線 l の方程式は

$$y - \left(-t^2 + 2t - \frac{1}{2}\right) = (-2t + 2)(x - t)$$

すなわち　$y = (-2t + 2)x + t^2 - \dfrac{1}{2}$
l と C_1 の交点の x 座標は

$$x^2 = (-2t + 2)x + t^2 - \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = -t + 1 \pm \frac{2t - 1}{\sqrt{2}}}$$

(2) $t = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，ℓ の方程式は，(1) の結果から　$y = -\sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2}$
また，ℓ と C_1 の交点の x 座標は　$x = 1, -1 - \sqrt{2}$
右の図から，求める面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(-\sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2}) - x^2\}dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + (1 + \sqrt{2})x\right]_0^1 \\ &= \mathbf{\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AN}}$

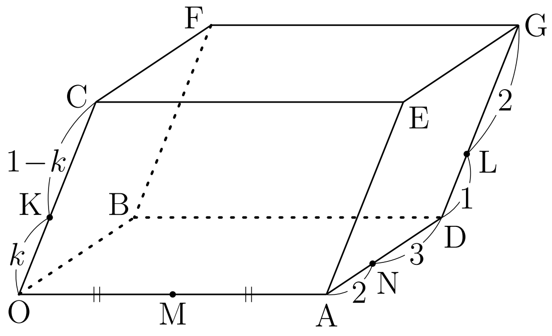
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{ML}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DL}}$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{MK}} = \overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{OK}}$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}}$$



(2) 3 点 M，N，K を通る平面を α とする．α 上の点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は，(1) の結果から，実数 s，t を用いて

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} + s\overrightarrow{\mathrm{MN}} + t\overrightarrow{\mathrm{MK}} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) + t\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1+s-t)\vec{a} + \frac{2}{5}s\vec{b} + tk\vec{c} \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

点 L の位置ベクトルは，$\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ であるから，L が α 上の点であるとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$\frac{1}{2}(1+s-t) = 1, \quad \frac{2}{5}s = 1, \quad tk = \frac{1}{3}$$

これを解いて　　$s = \frac{5}{2}$，$t = \frac{3}{2}$，$\boldsymbol{k = \frac{2}{9}}$