

平成22年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(教育学部, 医学部保健学科看護学専攻)平成22年2月25日

問題 1 2 3 4

1 関数 $y = \sin^3 x - \cos^3 x$ ($0 \leq x \leq \pi$) について, 以下の問いに答えよ。

- (1) $\sin x - \cos x = t$ とおいて, t のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) y を t の式で表せ。
- (3) y の最大値および最小値を求めよ。

2 曲線 $C_1: y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線が曲線 $C_2: y = x^2 - 4$ と交わる点を B, C とする。ただし, B の x 座標は C の x 座標より小さいとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 線分 BC の中点 M および C の座標を a を用いて表せ。
- (2) M を通り y 軸に平行な直線, 線分 MC および曲線 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

3 赤球, 白球, 黒球, 黄球, 青球が各1個ずつ入っている袋が3つある。各袋から球を1個ずつ取り出す。以下の問いに答えよ。

- (1) 取り出した球の色が2種類となる確率を求めよ。
- (2) 取り出した球の色の数の期待値を求めよ。

4 原点 O を中心として半径1の円の第1象限の部分 C について考える。

C 上に3点 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P(1, 0)$, $Q(0, 1)$ をとる。

$s + t = 1$ を満たす s, t ($0 < s < 1, 0 < t < 1$) に対し, 弧 AQ 上に点 X を2つのベクトル

$$s^2 \overrightarrow{OA} - s \overrightarrow{OX}, \quad t \overrightarrow{OA} - t^2 \overrightarrow{OX}$$

が垂直になるようにとる。以下の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OX} のなす角を θ とするとき, $\cos \theta$ を t を用いて表せ。
- (2) $\cos \theta$ のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) $\triangle OAX$ の面積の最大値を求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ より } -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi \quad \text{よって } -1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

(2) $t = \sin x - \cos x \cdots \textcircled{1}$ の両辺を平方すると

$$t^2 = 1 - 2 \sin x \cos x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$y = \sin^3 x - \cos^3 x$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} \sin^3 x - \cos^3 x &= (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) \\ &= (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) \end{aligned}$$

上式に $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を代入すると

$$\sin^3 x - \cos^3 x = t \left(1 + \frac{1 - t^2}{2}\right) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$$

$$\text{よって} \quad y = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{3}{2}(t+1)(t-1) \end{aligned}$$

$y' = 0$ とすると $t = -1, 1$

$-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ における y の増減表は、次のようになる。

t	-1	...	1	...	$\sqrt{2}$
y'		+	0	-	
y	-1	↗	極大 1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって, y は

$t = 1$ すなわち $x = \frac{\pi}{2}$, π のとき 最大値 1 をとり,

$t = -1$ すなわち $x = 0$ のとき 最小値 -1 をとる.



- 2 (1) $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$
 C_1 上の点 A における接線の傾きは $2a$ であるから、その方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2$$

この接線と $C_2 : y = x^2 - 4$ の共有点の座標は、連立方程式

$$\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

の解であるから、2式から y を消去して

$$x^2 - 4 = 2ax - a^2$$

ゆえに $(x - a)^2 = 4$

したがって $x = a \pm 2$

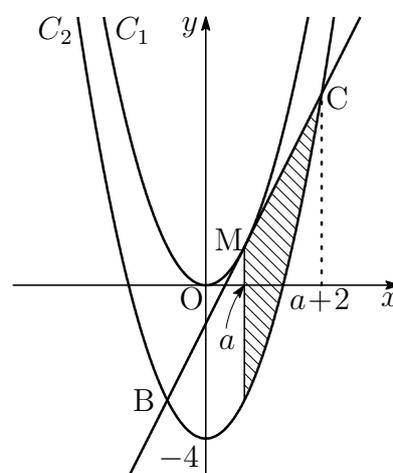
B, C の x 座標は、それぞれ $a - 2$, $a + 2$ であるから

$$B(a - 2, a^2 - 4a), \quad C(a + 2, a^2 + 4a)$$

よって、BC の中点 M の座標は (a, a^2)

- (2) 求める面積 S は、右の図から

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{a+2} \{(2ax - a^2) - (x^2 - 4)\} dx \\ &= \int_a^{a+2} \{4 - (x - a)^2\} dx \\ &= \left[4x - \frac{1}{3}(x - a)^3 \right]_a^{a+2} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$



3 (1) 球の取り出し方の総数は 5^3 (通り)

取り出した球の2色を A(2個), B(1個) とすると, 3つの袋から順に取り出したとき, 次の3つの場合がある.

「AAB」, 「ABA」, 「BAA」

それぞれの場合について, A, B の色の球の取り出し方は ${}_5P_2$ (通り)

よって, 求める確率は $\frac{3 \times {}_5P_2}{5^3} = \frac{3 \times 5 \cdot 4}{5^3} = \frac{12}{25}$

(2) 球の色が1色であるのは5通りあり, その確率は

$$\frac{5}{5^3} = \frac{1}{25}$$

球の色が3色であるのは ${}_5P_3$ 通りあり, その確率は

$$\frac{{}_5P_3}{5^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{5^3} = \frac{12}{25}$$

よって, 求める期待値 E は

$$E = 1 \times \frac{1}{25} + 2 \times \frac{12}{25} + 3 \times \frac{12}{25} = \frac{61}{25}$$

色	1	2	3	計
確率	$\frac{1}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{12}{25}$	1



4 (1) $(s^2 \vec{OA} - s \vec{OX}) \perp (t \vec{OA} - t^2 \vec{OX})$ より

$$(s^2 \vec{OA} - s \vec{OX}) \cdot (t \vec{OA} - t^2 \vec{OX}) = 0$$

であるから

$$s^2 t |\vec{OA}|^2 - (s^2 t^2 + st) \vec{OA} \cdot \vec{OX} + st^2 |\vec{OX}|^2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$|\vec{OA}| = 1$, $|\vec{OX}| = 1$, \vec{OA} , \vec{OX} のなす角が θ であるから

$$\vec{OA} \cdot \vec{OX} = |\vec{OA}| |\vec{OX}| \cos \theta = 1 \cdot 1 \cos \theta = \cos \theta$$

これらを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$s^2 t - (s^2 t^2 + st) \cos \theta + st^2 = 0$$

ゆえに $st(st + 1) \cos \theta = st(s + t)$

$0 < s < 1$, $0 < t < 1$, $s + t = 1$, $s = 1 - t$ より

$$\cos \theta = \frac{s + t}{st + 1} = \frac{1}{(1 - t)t + 1} = \frac{1}{-t^2 + t + 1}$$

(2) $-t^2 + t + 1 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$ であるから

$0 < t < 1$ において $1 < -t^2 + t + 1 \leq \frac{5}{4}$

よって, (1) の結果から $\frac{4}{5} \leq \cos \theta < 1$

(3) $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ であるから, (2) の結果から

$$0 < \sin \theta \leq \frac{3}{5}$$

$\Delta OAX = \frac{1}{2} |\vec{OA}| |\vec{OX}| \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta$ であるから

$$0 < \Delta OAX \leq \frac{3}{10}$$

よって, ΔOAX の面積の最大値は $\frac{3}{10}$

