平成 22 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成 22 年２月 25 日

1 関数 $y = \sin^3 x - \cos^3 x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\sin x - \cos x = t$ とおいて，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) y を t の式で表せ。

(3) y の最大値および最小値を求めよ。

2 曲線 $C_1 : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線が曲線 $C_2 : y = x^2 - 4$ と交わる点を B，C とする。ただし，B の x 座標は C の x 座標より小さいとする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 BC の中点 M および C の座標を a を用いて表せ。

(2) M を通り y 軸に平行な直線，線分 MC および曲線 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

3 赤球，白球，黒球，黄球，青球が各 1 個ずつ入っている袋が 3 つある。各袋から球を 1 個ずつ取り出す。以下の問いに答えよ。

(1) 取り出した球の色が 2 種類となる確率を求めよ。

(2) 取り出した球の色の数の期待値を求めよ。

4 原点 O を中心として半径 1 の円の第 1 象限の部分 C について考える。

C 上に 3 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1)$ をとる。

$s + t = 1$ を満たす s，t $(0 < s < 1,\ 0 < t < 1)$ に対し，弧 AQ 上に点 X を 2 つのベクトル

$$s^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - s\,\overrightarrow{\mathrm{OX}},\quad t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$

が垂直になるようにとる。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を t を用いて表せ。

(2) $\cos\theta$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{OAX}$ の面積の最大値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より　$-\frac{\pi}{4} \leqq x - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{4}\pi$　　よって　$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}}$

(2) $t = \sin x - \cos x \cdots$ ① の両辺を平方すると

$$t^2 = 1 - 2\sin x\cos x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x\cos x = \frac{1-t^2}{2} \quad \cdots ②$$

$y = \sin^3 x - \cos^3 x$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned}\sin^3 x - \cos^3 x &= (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x)\\ &= (\sin x - \cos x)(1 + \sin x\cos x)\end{aligned}$$

上式に ①，② を代入すると

$$\sin^3 x - \cos^3 x = t\left(1 + \frac{1-t^2}{2}\right) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$$

よって　　$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}y' &= -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}\\ &= -\frac{3}{2}(t+1)(t-1)\end{aligned}$$

$y' = 0$ とすると　$x = -1,\ 1$

$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ における y の増減表は，次のようになる．

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	極大 1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって，y は

$t = 1$　　すなわち　$x = \frac{\pi}{2},\ \pi$ のとき　**最大値 1** をとり，

$t = -1$　すなわち　$x = 0$ のとき　　**最小値 −1** をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

C_1 上の点 A における接線の傾きは $2a$ であるから，その方程式は

$$y-a^2=2a(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y=2ax-a^2$$

この接線と $C_2 : y=x^2-4$ の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y=2ax-a^2 \\ y=x^2-4 \end{cases}$$

の解であるから，2 式から y を消去して

$$x^2-4=2ax-a^2$$

ゆえに　$(x-a)^2=4$

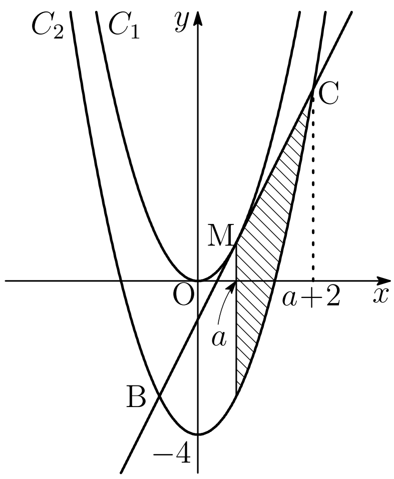
したがって　$x=a\pm 2$

B，C の x 座標は，それぞれ $a-2$，$a+2$ であるから

$$\mathrm{B}(a-2,\ a^2-4a),\quad \mathbf{C}(\boldsymbol{a+2},\ \boldsymbol{a^2+4a})$$

よって，BC の中点 M の座標は　$\boldsymbol{(a,\ a^2)}$

(2) 求める面積 S は，右の図から



$$\begin{aligned} S &= \int_a^{a+2} \{(2ax-a^2)-(x^2-4)\}\,dx \\ &= \int_a^{a+2} \{4-(x-a)^2\}\,dx \\ &= \left[\ 4x-\frac{1}{3}(x-a)^3\ \right]_a^{a+2} \\ &= \boldsymbol{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 球の取り出し方の総数は　5^3 (通り)

取り出した球の 2 色を A(2 個)，B(1 個) とすると，3 つの袋から順に取り出したとき，次の 3 つの場合がある．

「AAB」,「ABA」,「BAA」

それぞれの場合について，A，B の色の球の取り出し方は　${}_5\mathrm{P}_2$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{3\times{}_5\mathrm{P}_2}{5^3}=\dfrac{3\times5\cdot4}{5^3}=\mathbf{\dfrac{12}{25}}$

(2) 球の色が 1 色であるのは 5 通りあり，その確率は

$$\frac{5}{5^3}=\frac{1}{25}$$

球の色が 3 色であるのは ${}_5\mathrm{P}_3$ 通りあり，その確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{P}_3}{5^3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{5^3}=\frac{12}{25}$$

色	1	2	3	計
確率	$\frac{1}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{12}{25}$	1

よって，求める期待値 E は

$$E=1\times\frac{1}{25}+2\times\frac{12}{25}+3\times\frac{12}{25}=\mathbf{\frac{61}{25}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $(s^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - s\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}) \perp (t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OX}})$ より

$$(s^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - s\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}) \cdot (t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}) = 0$$

であるから

$$s^2t|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - (s^2t^2 + st)\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}} + st^2|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2 = 0 \quad \cdots ①$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}| = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ のなす角が θ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}| \cos\theta = 1 \cdot 1 \cos\theta = \cos\theta$$

これらを ① に代入すると

$$s^2t - (s^2t^2 + st)\cos\theta + st^2 = 0$$

ゆえに　$st(st+1)\cos\theta = st(s+t)$

$0 < s < 1$，$0 < t < 1$，$s + t = 1$，$s = 1 - t$ より

$$\cos\theta = \frac{s+t}{st+1} = \frac{1}{(1-t)t+1} = \boldsymbol{\frac{1}{-t^2+t+1}}$$

(2) $-t^2 + t + 1 = -\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{4}$ であるから

$0 < t < 1$ において　$1 < -t^2 + t + 1 \leqq \dfrac{5}{4}$

よって，(1) の結果から　$\boldsymbol{\dfrac{4}{5} \leqq \cos\theta < 1}$

(3) $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ であるから，(2) の結果から

$$0 < \sin\theta \leqq \frac{3}{5}$$

$\triangle\mathrm{OAX} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}| \sin\theta = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin\theta = \dfrac{1}{2}\sin\theta$ であるから

$$0 < \triangle\mathrm{OAX} \leqq \frac{3}{10}$$

よって，$\triangle$OAX の面積の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$