平成 21 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成 21 年 2 月 25 日

1 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_{x}^{2x} \left(\frac{1}{7}t^2 - \frac{2}{3}t - 3 \right) dt$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ をみたす x をすべて求めよ。

(2) $-3 \leqq x \leqq 6$ における $f(x)$ の最小値を求めよ。

2 大小 2 個のサイコロを投げ，大きいサイコロの目の数を p，小さいサイコロの目の数を q とする。$y = px^2$ のグラフと $y = qx + \dfrac{1}{4}$ のグラフの交点のうち，x 座標が負のものを A，正のものを B とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB の中点の x 座標が 1 より大きくなる確率を求めよ。

(2) A の x 座標が有理数となる確率を求めよ。

3 a，b を定数とし，$a > b$ をみたすものとする。

$$f(x) = a\cos^2 x + \sqrt{3}(a-b)\cos x \sin x + b\sin^2 x$$

とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の最大値が 6，最小値が 2 となるときの a，b を求めよ。

(2) (1) で求めた a，b に対して，$f(x)$ を考える。$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$f(x) > 5$ となる x の範囲を求めよ。

4 四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であり，$\triangle$OAB の面積と $\triangle$OAC の面積が等しいとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) OB = OC を示せ。

(2) $\triangle$ABC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であることを示せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{1}{7}t^2 - \frac{2}{3}t - 3\right) dt = \left[\, \frac{t^3}{21} - \frac{t^2}{3} - 3t \,\right]_x^{2x}$

$$= \frac{(2x)^3 - x^3}{21} - \frac{(2x)^2 - x^2}{3} - 3(2x - x)$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

$f(x) = 0$ より　$\dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x = 0$

ゆえに　$x(x^2 - 3x - 9) = 0$

よって　$\boldsymbol{x = 0,\ \dfrac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}}$

(2) (1) の結果から

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$
$$= (x + 1)(x - 3)$$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = -1,\ 3$

$-3 \leqq x \leqq 6$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-9	$\nearrow$	極大 $\frac{5}{3}$	$\searrow$	極小 -9	$\nearrow$	18

よって，$f(x)$ は $x = \pm 3$ で**最小値** $\boldsymbol{-9}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=px^2$, $y=qx+\dfrac{1}{4}$ から y を消去すると

$$px^2-qx-\frac{1}{4}=0 \quad \cdots ①$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-q)^2-4\cdot p\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=q^2+p$$

$p>0$ より $D>0$ となり，2 次方程式 ① は異なる 2 つの実数解をもつ．
その解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{q}{p},\quad \alpha\beta=-\frac{1}{4p}$$

$p>0$ より $\alpha\beta<0$ であるから，A，B の x 座標はそれぞれ α，β となる．
線分 AB の中点の x 座標 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ が 1 より大きいので，上の第 1 式より

$$\frac{q}{2p}>1 \quad \text{すなわち} \quad q>2p$$

これをみたす $(p,\ q)$ の組は，次の 6 組である．

$$(p,\ q)=(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6)$$

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{6}}$

(2) A の x 座標 α は 2 次方程式 ① の負の解

$$\frac{q-\sqrt{q^2+p}}{2p}$$

であり，これが有理数となるは，q^2+p が平方数のときである．
q^2+p の値は次のようなる．

q \ p	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	5	6	7	8	9	10
3	10	11	12	13	14	15
4	17	18	19	20	21	22
5	26	27	28	29	30	31
6	37	38	39	40	41	42

条件をみたす $(p,\ q)$ の組は，$(p,\ q)=(3,\ 1),\ (5,\ 2)$ の 2 組である．

よって，求める確率は　$\dfrac{2}{6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{18}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= a\cos^2 x + \sqrt{3}(a-b)\cos x\sin x + b\sin^2 x \\ &= a\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} + \sqrt{3}(a-b)\cdot\frac{\sin 2x}{2} + b\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} \\ &= \frac{a-b}{2}(\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x) + \frac{a+b}{2} \\ &= (a-b)\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) + \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

$a > b$ より $a-b > 0$，$-1 \leqq \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) \leqq 1$ であるから

$$-(a-b)+\frac{a+b}{2} \leqq (a-b)\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{a+b}{2} \leqq (a-b)+\frac{a+b}{2}$$

ゆえに $$\frac{-a+3b}{2} \leqq f(x) \leqq \frac{3a-b}{2}$$

したがって $\frac{3a-b}{2}=6$，$\frac{-a+3b}{2}=2$ これを解いて $\boldsymbol{a=5}$**，**$\boldsymbol{b=3}$

(2) (1) の結果から $f(x) = 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4$

$f(x) > 5$ より $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$ $\cdots$①

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $\frac{\pi}{6} \leqq 2x+\frac{\pi}{6} \leqq \frac{\pi}{6}+2\pi$

この範囲で ① を解くと

$$\frac{\pi}{6} < 2x+\frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{0 < x < \frac{\pi}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より　$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$

ここで，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ_1，$\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ_2 とすると

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta_1=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta_2$$

ゆえに　$|\vec{b}|\cos\theta_1=|\vec{c}|\cos\theta_2$　$\cdots$①

$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積が等しいから

$$\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta_1=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{c}|\sin\theta_2$$

ゆえに　$|\vec{b}|\sin\theta_1=|\vec{c}|\sin\theta_2$　$\cdots$②

①，② から

$$\begin{aligned}(|\vec{b}|\cos\theta_1)^2+(|\vec{b}|\sin\theta_1)^2&=(|\vec{c}|\cos\theta_2)^2+(|\vec{c}|\sin\theta_2)^2\\|\vec{b}|^2(\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1)&=|\vec{c}|^2(\sin^2\theta_2+\cos^2\theta_2)\\|\vec{b}|^2&=|\vec{c}|^2\end{aligned}$$

したがって　$|\vec{b}|=|\vec{c}|$　すなわち　$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$

別解 $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$，$\triangle\mathrm{OAC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{c})^2}$

である．したがって $\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OAC}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ により

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2\quad\text{よって}\quad|\vec{b}|=|\vec{c}|$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\frac{1}{3}\{\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\&=\frac{1}{3}\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})+\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\&=\frac{1}{3}(\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b})+\frac{1}{3}(|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2)\end{aligned}$$

これに (1) で示した $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，$|\vec{b}|=|\vec{c}|$ を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\quad\text{すなわち}\quad\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$