

平成 21 年度 熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部, 医学部保健学科看護学専攻) 平成 21 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{7}t^2 - \frac{2}{3}t - 3 \right) dt$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ をみたす x をすべて求めよ。
- (2) $-3 \leq x \leq 6$ における $f(x)$ の最小値を求めよ。

2 大小 2 個のサイコロを投げ、大きいサイコロの目の数を p , 小さいサイコロの目の数を q とする。 $y = px^2$ のグラフと $y = qx + \frac{1}{4}$ のグラフの交点のうち、 x 座標が負のものを A, 正のものを B とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB の中点の x 座標が 1 より大きくなる確率を求めよ。
- (2) A の x 座標が有理数となる確率を求めよ。

3 a, b を定数とし、 $a > b$ をみたすものとする。

$$f(x) = a \cos^2 x + \sqrt{3}(a - b) \cos x \sin x + b \sin^2 x$$

とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の最大値が 6, 最小値が 2 となるときの a, b を求めよ。
- (2) (1) で求めた a, b に対して、 $f(x)$ を考える。 $0 \leq x \leq \pi$ のとき、 $f(x) > 5$ となる x の範囲を求めよ。

4 四面体 OABC において、 \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{BC} は垂直であり、 $\triangle OAB$ の面積と $\triangle OAC$ の面積が等しいとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $OB = OC$ を示せ。
- (2) $\triangle ABC$ の重心を G とするとき、 \overrightarrow{OG} と \overrightarrow{BC} は垂直であることを示せ。

解答例

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} \quad (1) \quad f(x) &= \int_x^{2x} \left(\frac{1}{7}t^2 - \frac{2}{3}t - 3 \right) dt = \left[\frac{t^3}{21} - \frac{t^2}{3} - 3t \right]_x^{2x} \\
 &= \frac{(2x)^3 - x^3}{21} - \frac{(2x)^2 - x^2}{3} - 3(2x - x) \\
 &= \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x
 \end{aligned}$$

$$f(x) = 0 \text{ より } \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x = 0$$

$$\text{ゆえに } x(x^2 - 3x - 9) = 0$$

$$\text{よって } x = 0, \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

(2) (1)の結果から

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= x^2 - 2x - 3 \\
 &= (x+1)(x-3)
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -1, 3$$

$-3 \leq x \leq 6$ における $f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	-3	...	-1	...	3	...	6
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-9	↗	極大 $\frac{5}{3}$	↘	極小 -9	↗	18

よって、 $f(x)$ は $x = \pm 3$ で最小値 -9 をとる。 ■

- 2 (1) $y = px^2$, $y = qx + \frac{1}{4}$ から y を消去すると

$$px^2 - qx - \frac{1}{4} = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-q)^2 - 4 \cdot p \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = q^2 + p$$

$p > 0$ より $D > 0$ となり、2次方程式 $\textcircled{1}$ は異なる2つの実数解をもつ。
その解を α , β とすると ($\alpha < \beta$)、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{q}{p}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{4p}$$

$p > 0$ より $\alpha\beta < 0$ であるから、A, B の x 座標はそれぞれ α , β となる。
線分 AB の中点の x 座標 $\frac{\alpha + \beta}{2}$ が 1 より大きいので、上の第1式より

$$\frac{q}{2p} > 1 \quad \text{すなわち} \quad q > 2p$$

これをみたす (p, q) の組は、次の6組である。

$$(p, q) = (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)$$

よって、求める確率は $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$

- (2) A の x 座標 α は2次方程式 $\textcircled{1}$ の負の解

$$\frac{q - \sqrt{q^2 + p}}{2p}$$

であり、これが有理数となるは、 $q^2 + p$ が平方数のときである。
 $q^2 + p$ の値は次のようなる。

$q \backslash p$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	5	6	7	8	9	10
3	10	11	12	13	14	15
4	17	18	19	20	21	22
5	26	27	28	29	30	31
6	37	38	39	40	41	42

条件をみたす (p, q) の組は、 $(p, q) = (3, 1), (5, 2)$ の2組である。

よって、求める確率は $\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$ ■

$$\begin{aligned}
 \boxed{3} \quad (1) \quad f(x) &= a \cos^2 x + \sqrt{3}(a-b) \cos x \sin x + b \sin^2 x \\
 &= a \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + \sqrt{3}(a-b) \cdot \frac{\sin 2x}{2} + b \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} \\
 &= \frac{a-b}{2} (\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x) + \frac{a+b}{2} \\
 &= (a-b) \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{a+b}{2}
 \end{aligned}$$

$a > b$ より $a-b > 0$, $-1 \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$ であるから

$$-(a-b) + \frac{a+b}{2} \leq (a-b) \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{a+b}{2} \leq (a-b) + \frac{a+b}{2}$$

ゆえに
$$\frac{-a+3b}{2} \leq f(x) \leq \frac{3a-b}{2}$$

したがって $\frac{3a-b}{2} = 6$, $\frac{-a+3b}{2} = 2$ これを解いて $a = 5$, $b = 3$

(2) (1) の結果から $f(x) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 4$

$f(x) > 5$ より $\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) > \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$

$0 \leq x \leq \pi$ のとき $\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi$

この範囲で $\textcircled{1}$ を解くと

$$\frac{\pi}{6} < 2x + \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi \quad \text{すなわち} \quad 0 < x < \frac{\pi}{3} \quad \blacksquare$$

4 (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく.

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC} \text{ より } \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$$

$$\text{したがって } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$$

ここで、 \vec{a} と \vec{b} のなす角を θ_1 , \vec{a} と \vec{c} のなす角を θ_2 とすると

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta_1 = |\vec{a}| |\vec{c}| \cos \theta_2$$

$$\text{ゆえに } |\vec{b}| \cos \theta_1 = |\vec{c}| \cos \theta_2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積が等しいから

$$\frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta_1 = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{c}| \sin \theta_2$$

$$\text{ゆえに } |\vec{b}| \sin \theta_1 = |\vec{c}| \sin \theta_2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② から

$$(|\vec{b}| \cos \theta_1)^2 + (|\vec{b}| \sin \theta_1)^2 = (|\vec{c}| \cos \theta_2)^2 + (|\vec{c}| \sin \theta_2)^2$$

$$|\vec{b}|^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) = |\vec{c}|^2 (\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2)$$

$$|\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$\text{したがって } |\vec{b}| = |\vec{c}| \quad \text{すなわち } OB = OC$$

$$\text{別解 } \triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}, \quad \triangle OAC = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{c})^2}$$

である. したがって $\triangle OAB = \triangle OAC$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ により

$$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{c}|^2 \quad \text{よって } |\vec{b}| = |\vec{c}|$$

(2) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{3} \{ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \frac{1}{3} \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) + \frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \frac{1}{3} (\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}) + \frac{1}{3} (|\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2) \end{aligned}$$

これに (1) で示した $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, $|\vec{b}| = |\vec{c}|$ を代入すると

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad \text{すなわち } \overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{BC}$$

