平成 20 年度　熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成 20 年 2 月 25 日

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を実数とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y = a\cos\theta - 2\sin^2\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ $M(a)$，$m(a)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $M(a)$ と $m(a)$ を求めよ。

(2) a が実数全体を動くとき，$M(a)$ の最小値と $m(a)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ n を 3 以上の自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $2 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k について，$k(k-1)_n\mathrm{C}_k = n(n-1)_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ を示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 放物線 $y = 4x^2 + 3$ を C とする。x 軸上に点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ ($p \neq 0$ とする)，C 上に点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2+3)$ をとり，点 A における C の接線 l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ とする。さらに，点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2+3)$ における C の接線を m とする。以下の問いに答えよ。

(1) q を p を用いて表せ。

(2) 接線 m が点 P を通るとする。p，q の値を求めよ。

(3) (2) で求めた p，q に対して，放物線 C と 2 つの接線 l，m で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 0,\ a_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

によって定められている。以下の問いに答えよ。

(1) $b_n = n + a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，$b_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を示せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が等比数列であることを示せ。

(3) a_n を求めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $a\cos\theta - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta + a\cos\theta - 2$ であるから
$\cos\theta = x$ とおくと，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$y = 2x^2 + ax - 2 = 2\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} - 2 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

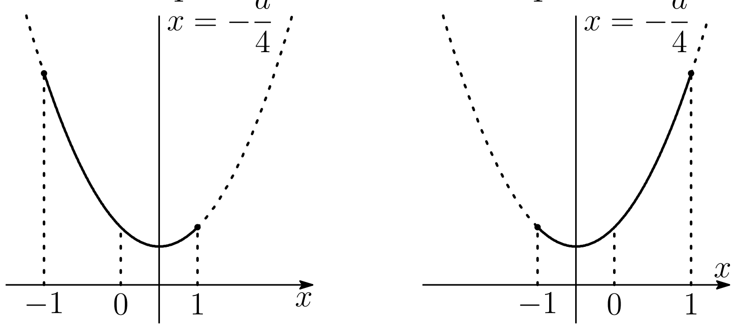
ゆえに，この関数のグラフは下に凸の放物線で，
軸は $x = -\dfrac{a}{4}$ である．$-1 \leqq x \leqq 1$ の中央は　$x = 0$
最大値 $M(a)$ は，次の 2 つの場合に分けて求める．

2 次関数 (下に凸の放物線) の閉区間における最大値

定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり，
定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる．

[1] $0 < -\dfrac{a}{4}$　すなわち　$a < 0$ のとき
$x = -1$ で最大値をとるから　$M(a) = 2(-1)^2 + a(-1) - 2 = -a$
[2] $-\dfrac{a}{4} \leqq 0$　すなわち　$a \geqq 0$ のとき
$x = 1$ で最大値をとるから　$M(a) = 2\cdot 1^2 + a\cdot 1 - 2 = a$

[1] $0 < -\dfrac{a}{4}$ のとき $(a < 0)$　　[2] $-\dfrac{a}{4} \leqq 0$ のとき $(a \geqq 0)$



したがって　　$\boldsymbol{M(a) = \begin{cases} -a & (a < 0) \\ a & (a \geqq 0) \end{cases}}$

最小値 $m(a)$ は，次の 3 つの場合に分けて求める．

［1］ $1 < -\dfrac{a}{4}$ 　すなわち　$a < -4$ のとき

　$x = 1$ で最小値をとるから　$m(a) = 2\cdot1^2 + a\cdot1 - 2 = a$

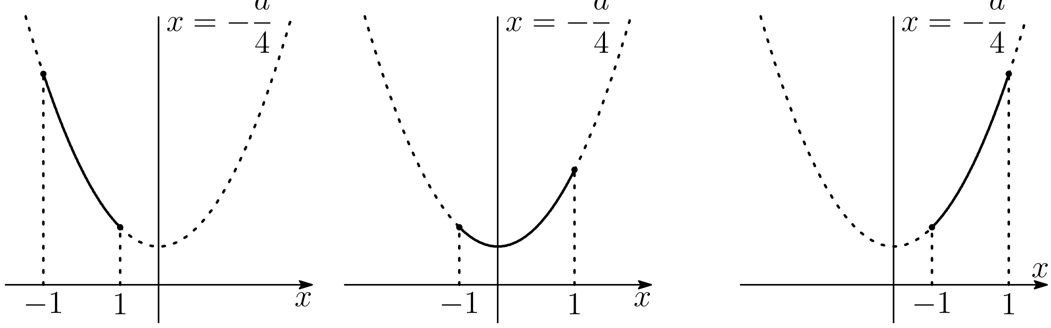
［2］ $-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$ 　すなわち　$-4 \leqq a \leqq 4$ のとき

　$x = -\dfrac{a}{4}$ で最小値をとるから　$m(a) = -\dfrac{a^2}{8} - 2$

［3］ $-\dfrac{a}{4} < -1$ 　すなわち　$4 < a$ のとき

　$x = -1$ で最小値をとるから　$m(a) = 2\cdot(-1)^2 + a\cdot(-1) - 2 = -a$

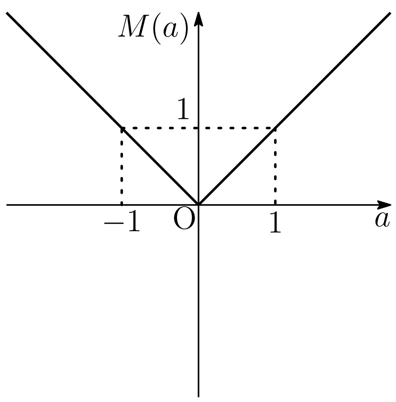
［1］ $1 < -\dfrac{a}{4}$ のとき $(a < -4)$　　［2］ $-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$ のとき $(-4 \leqq a \leqq 4)$　　［3］ $-\dfrac{a}{4} < -1$ のとき $(4 < a)$

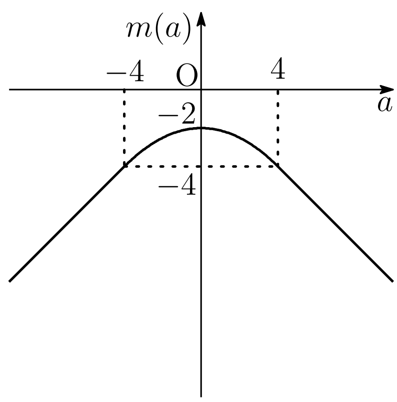


したがって　　$\boldsymbol{m(a) = \begin{cases} a & (a < -4) \\ -\dfrac{a^2}{8} - 2 & (-4 \leqq a \leqq 4) \\ -a & (4 < a) \end{cases}}$

(2) (1) の結果から

　　$\boldsymbol{M(a)}$ **の最小値は** $\boldsymbol{0}$，　$\boldsymbol{m(a)}$ **の最大値は** $\boldsymbol{-2}$





$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $2 \leqq k \leqq n$ のとき

$$\begin{aligned}k(k-1)_n\mathrm{C}_k &= k(k-1)\times\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}\\ &= n(n-1)\times\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}\\ &= n(n-1)\,{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k\\ &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\,{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}\\ &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} = \boldsymbol{n(n-1)\cdot 2^{n-2}}\end{aligned}$$

(3) $1 \leqq k \leqq n$ のとき

$$\begin{aligned}k\,{}_n\mathrm{C}_k &= k\times\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)}\\ &= n\times\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\end{aligned}$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\cdot 2^{n-1}$

したがって，上式および (2) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2\,{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k + \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k\\ &= n(n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1}\\ &= \boldsymbol{n(n+1)\cdot 2^{n-2}}\end{aligned}$$

■

3 (1) $y = 4x^2 + 3$ を微分すると　$y' = 8x$

点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2+3)$ における接線 l の傾きは $8p$ であるから，その方程式は

$$y - (4p^2+3) = 8p(x-p)$$

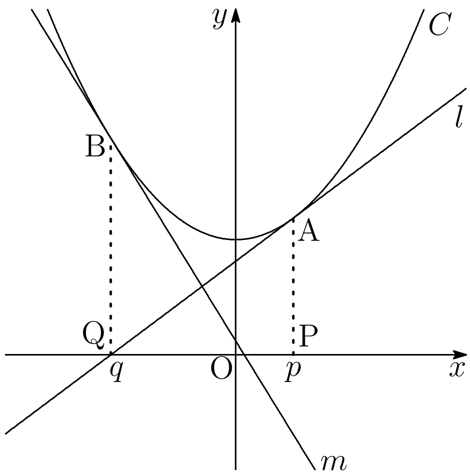
すなわち　$y = 8px - 4p^2 + 3$

l は $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ を通るから

$$0 = 8pq - 4p^2 + 3 \quad \cdots ①$$

$p \neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{q = \frac{4p^2-3}{8p}}$$



(2) 点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2+3)$ における接線 m の方程式は，(1) と同様にして

$$y = 8qx - 4q^2 + 3$$

を得る．これが点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ を通るから

$$0 = 8pq - 4q^2 + 3 \quad \cdots ②$$

①，② より　$q = \pm p$

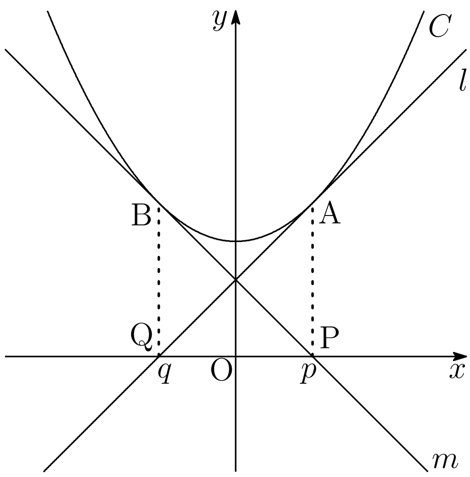
$q = p$ のとき，① より

$4p^2 + 3 = 0$ となり，不適

$q = -p$ のとき，① より

$0 = -12p^2 + 3$

となり，これを解いて　　$\boldsymbol{(p,\ q) = \left(\pm\frac{1}{2},\ \mp\frac{1}{2}\right)}$ **(複号同順)**



(3) (2) の結果から，2 本の接線の方程式は　$y = 4x + 2$，$y = -4x + 2$

これらの接線と放物線で囲まれた部分は，y 軸に関して対称であるから，求める面積 S は

$$S = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \{(4x^2+3) - (4x+2)\}\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $a_n = b_n - n$ であるから，これを数列 $\{a_n\}$ の漸化式に代入すると

$$b_n - n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - k)$$

$$\begin{aligned} b_n &= n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

したがって　$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \cdots ①$

(2) ① により　$b_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \cdots ②$

② − ① から　$b_{n+1} - b_n = b_n$　ゆえに　$b_{n+1} = 2b_n$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は

$$b_1 = 1 + a_1 = 1 + 0 = 1$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

(3) $a_n = b_n - n$ により，(2) の結果から　$\boldsymbol{a_n = 2^{n-1} - n}$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} (2^{k-1} - k) \\ &= \frac{1(2^n - 1)}{2-1} - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \boldsymbol{2^n - 1 - \frac{1}{2}n(n+1)} \end{aligned}$$

■