平成１９年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成 19 年 2 月 25 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ xy 平面上で，点 P は原点を出発点とし，さいころを 1 回投げるたびに以下のように進むものとする。1 または 2 の目が出たときは x 軸方向に 1 だけ進み，3 の目が出たときは x 軸方向に -1 だけ進み，4 または 5 の目が出たときは y 軸方向に 1 だけ進み，6 の目が出たときは y 軸方向に -1 だけ進む。以下の問いに答えよ。

(1) さいころを 5 回投げるとき，点 P が座標 $(2, -3)$ の位置にいる確率を求めよ。

(2) さいころを 4 回投げるとき，点 P が x 軸上のみを動いて最後に原点にいる確率を求めよ。

(3) さいころを 2 回投げるとき，点 P の x 座標の期待値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 四面体 OABC の 6 つの辺の長さを

$$\mathrm{OA} = \sqrt{10},\ \mathrm{OB} = \sqrt{5},\ \mathrm{OC} = \sqrt{6},\ \mathrm{AB} = \sqrt{5},\ \mathrm{AC} = 2\sqrt{2},\ \mathrm{BC} = \sqrt{5}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のいずれとも直交することを示せ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ a を定数とする。2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2, \qquad C_2 : y = 3(x-1)^2 + a$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) C_1，C_2 の両方に接する直線が 2 本存在するための a の条件を求めよ。

(2) C_1，C_2 の両方に接する 2 本の直線が，直交するときの a の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ は以下の条件を満たしているものとする。

$$x_1 = 8, \qquad y_1 = -5$$
$$x_{n+1} = 2x_n + y_n + 3n - 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$y_{n+1} = 2y_n + x_n - 3n + 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) $z_n = x_n + y_n$，また $w_n = x_n - y_n$ とおく。数列 $\{z_n\}$ および $\{w_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) xy 平面上の点 $(x_n,\ y_n)$ と直線 $y = x$ との距離が最小になるような n の値をすべて求めよ。

解答例

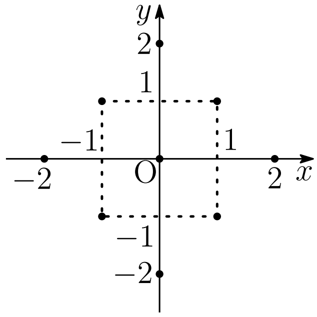
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) P が点 $(2, -3)$ の位置にいるためには，x 軸方向に 2 回以上，y 軸方向に 3 回以上移動しなければならない．したがって，さいころを 5 回投げてこの位置にいるためには x 軸方向に 1 だけ進む移動を 2 回，y 軸方向へ -1 だけ進む移動を 3 回行うことになる．すなわち，さいころを 5 回投げて，1 または 2 の目が出る回数が 2 回，6 の目が出る回数が 3 回である確率を求めればよい．

$$ {}_5\mathrm{C}_2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{972}}$$

(2) x 軸方向のみを移動して P が原点にいるためには，x 軸方向に 1 だけ進む回数と x 軸方向へ -1 だけ進む回数はともに 2 である．したがって，求める確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{54}}$$

(3) さいころを2回投げたとき，点Pの座標は



x 座標が -2 のとき　$(-2,\ 0)$
x 座標が -1 のとき　$(-1,\ 1),\ (-1, -1)$
x 座標が 0 のとき　$(0,\ 2),\ (0,\ 0),\ (0, -2)$
x 座標が 1 のとき　$(1,\ 1),\ (1, -1)$
x 座標が 2 のとき　$(2,\ 0)$

となる．ゆえにそれぞれの確率は

x 座標が -2 のとき　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{36}$

x 座標が -1 のとき　${}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{6} + {}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{6}{36}$

x 座標が 0 のとき　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^2 + {}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{6} \times 2 + \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{13}{36}$

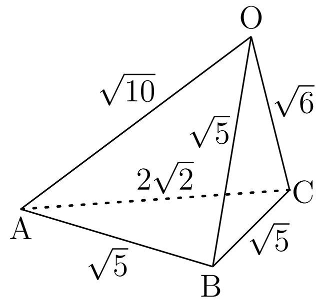
x 座標が 1 のとき　${}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{2}{6} + {}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{12}{36}$

x 座標が 2 のとき　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^2 = \dfrac{4}{36}$

したがって，点Pの x 座標の期待値は

$$(-2) \times \frac{1}{36} + (-1) \times \frac{6}{36} + 0 \times \frac{13}{36} + 1 \times \frac{12}{36} + 2 \times \frac{4}{36} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ であるから



$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

これに $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{10}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{5}$ を代入して

$$5 = 5 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 10$$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathbf{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OB}} = 5}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

これに $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \sqrt{6}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{10}$ を代入して

$$8 = 6 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 10$$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathbf{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OC}} = 4}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

これに $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \sqrt{6}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{5}$ を代入して

$$5 = 6 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 5$$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathbf{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OC}} = 3}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\ &= \frac{1}{5}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\ &= \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{2}{5}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

したがって，(1) の結果を代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{1}{5}\times 10 + \frac{2}{5}\times 5 - 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathbf{OA}}\perp\overrightarrow{\mathbf{CH}}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{1}{5}\times 5 + \frac{2}{5}\times 5 - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathbf{OB}}\perp\overrightarrow{\mathbf{CH}}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，(2) の結果より H は C から △OAB に下ろした垂線の足である．

△ABO は ∠ABO = 90° の直角二等辺三角形であるから

$$\triangle\mathrm{ABO}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\frac{5}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$ に注意して

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2&=\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}\\&=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=-\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\&=-\frac{1}{5}\cdot4-\frac{2}{5}\cdot3+6=4\end{aligned}$$

ゆえに　　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=2$

したがって，求める四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABO}\times|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}\times2=\boldsymbol{\frac{5}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=-x^2$ を微分すると　　$y'=-2x$

C_1 上の点 $(t, -t^2)$ における接線を ℓ とすると，ℓ の傾きは $-2t$ であるから，接線の方程式は

$$y-(-t^2)=-2t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=-2tx+t^2$$

ℓ と C_2 の共有点の x 座標は

$$3(x-1)^2+a=-2tx+t^2$$

すなわち　　$3x^2+2(t-3)x-t^2+a+3=0$

の解であり，ℓ と C_2 が接するとき，この方程式は重解をもつので

$$(t-3)^2-3\cdot(-t^2+a+3)=0 \quad \text{すなわち} \quad 4t^2-6t-3a=0 \quad \cdots ①$$

このとき，ℓ が2本存在するためには，① の判別式を D とすると，$D>0$ であるから

$$D/4=(-3)^2-4\cdot(-3a)>0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a>-\frac{3}{4}}$$

別解

C_1 は上に凸，C_2 は下に凸の放物線であるから，C_1 と C_2 が共有点をもたないとき，C_1，C_2 の両方に接する直線が2本存在する．
したがって，$y=-x^2$，$y=3(x-1)^2+a$ から y を消去して

$$-x^2=3(x-1)^2+a \quad \text{すなわち} \quad 4x^2-6x+a+3=0$$

この2次方程式の判別式を D とすると，$D<0$ であるから

$$D/4=(-3)^2-4\cdot(a+3)<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a>-\frac{3}{4}}$$

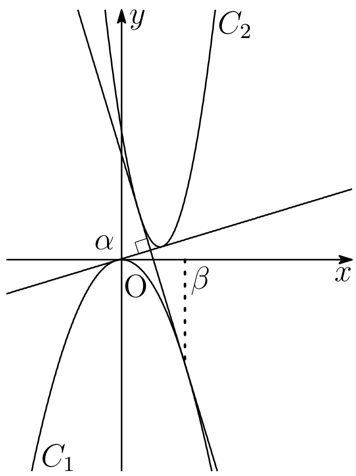
(2) ① の2解を α，β とすると，2点 $(\alpha, -\alpha^2)$，$(\beta, -\beta^2)$ における接線の傾きは，それぞれ 2α，2β であり，これらが直交するとき

$$2\alpha\cdot 2\beta=-1 \quad \text{すなわち} \quad \alpha\beta=-\frac{1}{4}$$

また，① の解と係数の関係から　$\alpha\beta=-\dfrac{3a}{4}$

したがって　　　$-\dfrac{3a}{4}=-\dfrac{1}{4}$

$a>-\dfrac{3}{4}$ に注意して　　$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x_{n+1}=2x_n+y_n+3n-8$，$y_{n+1}=2y_n+x_n-3n+8$
の辺々の和と差をとると

$$x_{n+1}+y_{n+1}=3(x_n+y_n)$$
$$x_{n+1}-y_{n+1}=x_n-y_n+6n-16$$

$z_n=x_n+y_n$，$w_n=x_n-y_n$ であるから

$$z_{n+1}=3z_n,\qquad z_1=x_1+y_1=8+(-5)=3$$
$$w_{n+1}=w_n+6n-16,\quad w_1=x_1-y_1=8-(-5)=13$$

数列 $\{z_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列であるから

$$\boldsymbol{z_n}=3\cdot3^{n-1}=\boldsymbol{3^n}$$

数列 $\{w_n\}$ は $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}w_n&=w_1+\sum_{k=1}^{n-1}(6k-16)\\&=13+6\times\frac{1}{2}(n-1)n-16(n-1)\\&=3n^2-19n+29\end{aligned}$$

$w_1=13$ なので，上の w_n は $n=1$ のときも成り立つ．
したがって　　$\boldsymbol{w_n=3n^2-19n+29}$

(2) 点 $(x_n,\ y_n)$ と直線 $y=x$ の距離を d とすると，(1) の結果に注意して

$$d=\frac{|\,x_n-y_n\,|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|\,w_n\,|}{\sqrt{2}}$$

$w_{n+1}-w_n=6n-16$ であるから　$w_{n+1}>w_n$　$(n=3,4,5,\cdots)$

$w_4=1$ であるから　$n \geqq 5$ のとき　$|w_n|>|w_4|=1$

よって，$d=\dfrac{|w_n|}{\sqrt{2}}$ を最小にする n の値は $n \leqq 4$ について調べればよい．

実際，$|w_1|=13,\ |w_2|=3,\ |w_3|=1,\ |w_4|=1$ であるから

求める n の値は　　$\boldsymbol{n=3,\ 4}$