平成１８年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成 18 年 2 月 25 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ 大小 2 つのサイコロを投げて，大きいサイコロの目の数を a，小さいサイコロの目の数を b とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ の最小値が -5 より小さくなる確率を求めよ。

(2) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと x 軸との交点で，x 座標の大きい方を選ぶ。その x 座標が 1 より大きくなる確率を求めよ。

(3) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと関数 $y = bx^2$ のグラフが異なる 2 点で交わる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} + a_n = 3n - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1) $b_n = a_n - \dfrac{6n-7}{4}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} a_n$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x) = |x(x+1)| - x + 1$ に対して，$y = f(x)$ のグラフを C とする。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の点 $(a,\ f(a))$ $(-1 < a < 0)$ における接線が 2 点 $\mathrm{P}(-1,\ 2)$, $\mathrm{Q}(0,\ 1)$ を通る直線に平行になるとき，a の値およびその接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 放物線 $y = x^2 + 1$ と曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) (1) の接線 ℓ と曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\triangle$OAB の辺 AB，OB の中点をそれぞれ C，D とする。辺 OA 上に OE : EA = 1 : 4 となる点 E をとる。線分 OC と線分 BE，AD との交点をそれぞれ P，Q とし，線分 AD と線分 BE の交点を R とする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$，$|\vec{b}| = 1$，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$ のとき，$\triangle$PQR の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=ax^2+2x-b=a\left(x+\dfrac{1}{a}\right)^2-\dfrac{1}{a}-b$

$a>0$ であるから　最小値は $-\dfrac{1}{a}-b$

条件より　$-\dfrac{1}{a}-b<-5$　すなわち　$5-b<\dfrac{1}{a}$

$0<\dfrac{1}{a}\leqq 1$ であり，$5-b$ は整数であるから

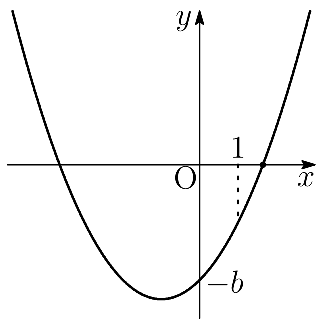
$$5-b\leqq 0 \quad ゆえに \quad b=5,\ 6$$

また，a は $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ の 6 通りある．

よって　$\dfrac{6\times 2}{6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(2) $f(x)=ax^2+2x-b$ とおくと

$$f(0)=-b<0$$



$a>0$ かつ $f(0)<0$ より $f(1)<0$ を満たせばよいから

$$f(1)=a+2-b<0 \text{ より} \quad b>a+2$$

これを満たすのは,

$(a,b)=(1,4),(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,6)$

の 6 通り．　　よって　$\dfrac{6}{6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{6}}$

(3) 2 式より　$ax^2+2x-b=bx^2$　すなわち　$(a-b)x^2+2x-b=0$

条件を満たすのは，$a-b\neq 0$ かつ 判別式 $D>0$ のときであるから

$$D/4=1+b(a-b)>0 \text{ より} \quad b(b-a)<1$$

$b(b-a)$ は整数で，$a-b\neq 0$ であるから

$$b(b-a)<0 \quad ゆえに \quad b<a$$

$b<a$ を満たす a，b の組は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{6^2}=\mathbf{\frac{5}{12}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $b_n = a_n - \dfrac{6n-7}{4}$ より　$a_n = b_n + \dfrac{6n-7}{4}$，$a_{n+1} = b_{n+1} + \dfrac{6n-1}{4}$

よって　$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_n &= \left(b_{n+1} + \frac{6n-1}{4}\right) + \left(b_n + \frac{6n-7}{4}\right) \\ &= b_{n+1} + b_n + 3n - 2 \end{aligned}$$

$a_{n+1} + a_n = 3n - 2$ であるから　$\boldsymbol{b_{n+1} + b_n = 0}$

(2) (1) の結果より　$b_{n+1} = -b_n$ $(n \geqq 1)$

よって　$b_n = b_1 \cdot (-1)^{n-1}$

また　$b_1 = a_1 - \dfrac{6-7}{4} = -2 + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{7}{4}$

ゆえに　$b_n = -\dfrac{7}{4} \cdot (-1)^{n-1}$

したがって　$a_n = b_n + \dfrac{6n-7}{4} = \boldsymbol{-\dfrac{7}{4} \cdot (-1)^{n-1} + \dfrac{6n-7}{4}}$

(3) (2) の結果より

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{50} a_n &= \sum_{n=1}^{50} \left\{ -\frac{7}{4} \cdot (-1)^{n-1} + \frac{6n-7}{4} \right\} \\ &= -\frac{7}{4} \sum_{n=1}^{50} (-1)^{n-1} + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{50} n - \sum_{n=1}^{50} \frac{7}{4} \\ &= -\frac{7}{4} \cdot \frac{1-(-1)^{50}}{1-(-1)} + \frac{3}{2} \cdot \frac{50(50+1)}{2} - \frac{7}{4} \cdot 50 \\ &= 0 + \frac{3825}{2} - \frac{175}{2} = \mathbf{1825} \end{aligned}$$

(注) $-\dfrac{7}{4} \displaystyle\sum_{n=1}^{50} (-1)^{n-1} = -\dfrac{7}{4} \{1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + 1 + (-1)\} = 0$

$$\sum_{n=1}^{50} \frac{6n-7}{4} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{50} (6n-7) = \frac{1}{4} \cdot \frac{50(-1+293)}{2} = 1825$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) (i) $x(x+1) \geqq 0$　すなわち

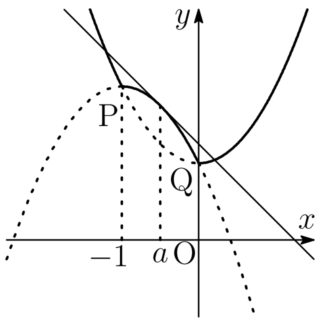
$x \leqq -1$，$0 \leqq x$ のとき

$f(x) = x(x+1) - x + 1 = x^2 + 1$

(ii) $x(x+1) < 0$　すなわち

$-1 < x < 0$ のとき

$f(x) = -x(x+1) - x - 1 = -x^2 - 2x + 1$



(i)，(ii) より，曲線 C は右の図のようになる．

直線 PQ の傾きは　$\dfrac{1-2}{0-(-1)} = -1$

$f'(x) = -2x - 2$ より点 $(a, f(a))$ における接線 ℓ の傾きは　$-2a - 2$

この点における接線が直線 PQ に平行であるから

$$-2a - 2 = -1$$

$-1 < a < 0$ に注意して　　$\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2}}$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{4}$ より，接線 ℓ の方程式は

$$y - \frac{7}{4} = -\left\{x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -x + \frac{5}{4}}$$

(2) 求める面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^{0} \{(-x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 1)\}\,dx \\ &= -2\int_{-1}^{0} (x+1)x\,dx = -2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\{0-(-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(3) 曲線 C と接線 ℓ の接点以外の交点の x 座標は

$$x^2 + 1 = -x + \frac{5}{4} \quad \text{すなわち} \quad x^2 + x - \frac{1}{4} = 0 \quad \cdots ①$$

の解である．この解を α，β $(\alpha < \beta)$ とおき，求める面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{\left(-x + \frac{5}{4}\right) - (x^2 + 1)\right\} dx - S_1 \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} \left(x^2 + x - \frac{1}{4}\right) dx - \frac{1}{3} \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

① の解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{4}$

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-1)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=2$$

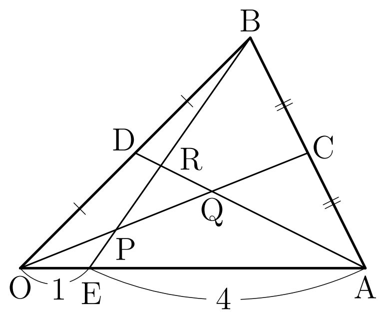
$\alpha<\beta$ より $\beta-\alpha=\sqrt{2}$ であるから

$$S_2=\frac{1}{6}(\sqrt{2})^3-\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-1}{3}}$$

4 (1) 点 P は線分 OC 上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad(0\leqq k\leqq 1)$$

とおける．



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\frac{k}{2}\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}\\&=\frac{5k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

点 P は線分 BE 上にあるから

$$\frac{5k}{2}+\frac{k}{2}=1$$

これを解くと　$k=\dfrac{1}{3}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}\quad\cdots①$

点 Q は △OAB の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\quad\cdots②$$

①，② より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)-\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}}\end{aligned}$$

(2) 点 R は線分 AD 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}\qquad(0\leqq s\leqq 1)$$

とおける．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=(1-s)\vec{a}+\frac{s}{2}\vec{b}\\&=5(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{s}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

点 R は線分 BE 上にあるから

$$5(1-s)+\frac{s}{2}=1$$

これを解くと　$s=\dfrac{8}{9}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}\quad\cdots③$

①，③ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\left(\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}\right)-\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}\right)\\&=\boldsymbol{-\frac{1}{18}\vec{a}+\frac{5}{18}\vec{b}}\end{aligned}$$

(3) △PQR の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}$$

であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2&=\left|\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2\\&=\frac{1}{36}(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)\\&=\frac{1}{36}(5+2+1)=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2&=\left|-\frac{1}{18}(\vec{a}-5\vec{b})\right|^2\\&=\frac{1}{324}(|\vec{a}|^2-10\vec{a}\cdot\vec{b}+25|\vec{b}|^2)\\&=\frac{1}{324}(5-10+25)=\frac{5}{81}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \left\{\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b})\right\}\cdot\left\{-\frac{1}{18}(\vec{a}-5\vec{b})\right\} \\ &= -\frac{1}{108}(|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2) \\ &= -\frac{1}{108}(5-4-5)=\frac{1}{27}\end{aligned}$$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{5}{81}-\left(\dfrac{1}{27}\right)^2}=\mathbf{\dfrac{1}{18}}$

発展的解答例 (理系的)

$\boxed{4}$ (3) **【別解 1】**$\vec{a}$, $\vec{b}$ を平面上のベクトルとし，$\triangle$PQR の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} & \overrightarrow{\mathrm{PR}}\end{pmatrix}\right|$$

であるから

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} & \overrightarrow{\mathrm{PR}}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\tfrac{1}{6}\vec{a}+\tfrac{1}{6}\vec{b} & -\tfrac{1}{18}\vec{a}+\tfrac{5}{18}\vec{b}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tfrac{1}{6} & -\tfrac{1}{18}\\ \tfrac{1}{6} & \tfrac{5}{18}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix}\right|\left|\det\begin{pmatrix}\tfrac{1}{6} & -\tfrac{1}{18}\\ \tfrac{1}{6} & \tfrac{5}{18}\end{pmatrix}\right|\\&=\frac{1}{36}\left|\det\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix}\right|\\&=\frac{1}{36}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\\&=\frac{1}{36}\sqrt{(\sqrt{5})^2\cdot1^2-1^2}=\frac{1}{18}\end{aligned}$$

【別解 2】$\vec{a}$, $\vec{b}$ を空間のベクトルとし，$\triangle$PQR の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}&=\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}\right)\times\left(-\frac{1}{18}\vec{a}+\frac{5}{18}\vec{b}\right)\\&=\frac{1}{18}\vec{a}\times\vec{b}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{18}\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{36}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\\&=\frac{1}{36}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\\&=\frac{1}{36}\sqrt{(\sqrt{5})^2\cdot1^2-1^2}=\frac{1}{18}\end{aligned}$$