平成17年度　熊本大学２次試験前期日程(数学問題)120分
文系(教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成17年2月25日

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標平面上の点Pから放物線 $y=x^2$ へ2本の接線が引けて，かつ，この2本の接線が直交するような点Pの軌跡を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問いに答えよ。

(1) 三角関数の加法定理またはド・モアブルの定理を用いて，任意の角 θ に対し，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

(2) $\theta = 18^\circ$ のとき，$\cos 2\theta = \sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3) $\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標空間内に4点A(3, 0, 0)，B(0, 2, 1)，C(0, 2, 0)，D(3, 2, 0)を考え，線分CD上の点P(x, 2, 0)に対して，三角形PABの面積を S とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{APB} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ を x で表せ。

(2) S の最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ ボタンを1回押すごとに，画面に1，2，3，4のいずれかの数を表示する機械がある。この機械が数 X を表示する確率は次のとおりである。

X	1	2	3	4
確率	$2a$	b	b	a

次の問いに答えよ。

(1) b を a で表せ。

(2) ボタンを2回押したときに表示される数のうち小さくないほうの数を Z とするとき，Z の期待値 m を a で表せ。

(3) m を最大にする a の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ Pから放物線に引いた2本の接線の接点をQ，Rとし，それぞれの点における接線の傾きを m_1，m_2 とする $(m_1 \neq m_2)$.

$y' = 2x$ より，接点の座標は　　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{m_1}{2},\ \dfrac{{m_1}^2}{4}\right)$，　$\mathrm{R}\left(\dfrac{m_2}{2},\ \dfrac{{m_2}^2}{4}\right)$

Qにおける接線の方程式は

$$y - \frac{{m_1}^2}{4} = m_1\left(x - \frac{m_1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = m_1 x - \frac{{m_1}^2}{4} \quad \cdots ①$$

同様に，Rにおける接線の方程式は　　$y = m_2 x - \dfrac{{m_2}^2}{4} \quad \cdots ②$

直線①，②の交点がPであるから，$m_1 \neq m_2$ に注意して①，②を解くと

$$x = \frac{m_1 + m_2}{4},\quad y = \frac{m_1 m_2}{4}$$

①，②は直交するので，$m_1 m_2 = -1$ より，Pの座標は　$\left(\dfrac{{m_1}^2 - 1}{4m_1}, -\dfrac{1}{4}\right)$

m_1 は0でない任意の実数であるから，Pの軌跡は　**直線** $\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{4}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) (加法定理による証明)

$$\begin{aligned}
\sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta)\\
&= \sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta\\
&= 2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta\\
&= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta\\
&= 3\sin\theta-4\sin^3\theta
\end{aligned}$$

(ド・モアブルの定理による証明)

$$\begin{aligned}
(\cos\theta+i\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta+3\cos^2\theta\cdot i\sin\theta+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3\\
&= \cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)
\end{aligned}$$

ド・モアブルの定理により　$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$
上の 2 式から

$$\cos 3\theta+i\sin 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$$

上式の虚部は等しいので

$$\begin{aligned}
\sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\\
&= 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta\\
&= 3\sin\theta-4\sin^3\theta
\end{aligned}$$

ド・モアブルの定理

整数 n に対して，次の等式が成り立つ．

$$\boldsymbol{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta}$$

(2) $\theta=18^\circ$ のとき，$5\theta=90^\circ$ より　$2\theta=90^\circ-3\theta$
ゆえに　$\cos 2\theta=\cos(90^\circ-3\theta)=\sin 3\theta$

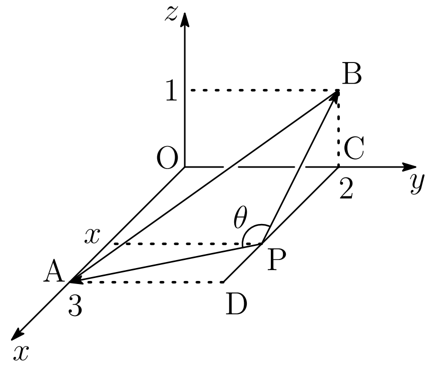
(3) (2) の結果に (1) および $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ を代入して整理すると

$$\begin{aligned}
1-2\sin^2\theta &= 3\sin\theta-4\sin^3\theta\\
4\sin^3\theta-2\sin^2\theta-3\sin\theta+1 &= 0\\
(\sin\theta-1)(4\sin^2\theta+2\sin\theta-1) &= 0
\end{aligned}$$

$0<\sin 18^\circ<1$ であるから　$\boldsymbol{\sin 18^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) P は線分 CD 上の点であるから　　$0 \leqq x \leqq 3$

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (3,\ 0,\ 0) - (x,\ 2,\ 0) = (3-x, -2,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (0,\ 2,\ 1) - (x,\ 2,\ 0) = (-x,\ 0,\ 1)$$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (3-x)\cdot(-x) + (-2)\cdot 0 + 0\cdot 1 = x^2 - 3x$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = \sqrt{(3-x)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = \sqrt{(-x)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 1}$$

よって　　$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|} = \boldsymbol{\dfrac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}\sqrt{x^2 + 1}}}$　　$\boldsymbol{(0 \leqq x \leqq 3)}$

(2) $\triangle$PAB の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x^2 - 6x + 13)(x^2 - 3x) - (x^2 - 3x)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5x^2 - 6x + 13} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{56}{5}} \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 3$ において，S は最小値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{56}{5}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{70}}{5}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $X=1$ から $X=4$ までのそれぞれの確率の和は 1 であるから

$$2a+b+b+a=1 \quad \text{これを } b \text{ について解くと} \quad b=\frac{1-3a}{2}$$

また，$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ に注意して $\quad \boldsymbol{b=\dfrac{1-3a}{2}} \quad \left(\boldsymbol{0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}}\right)$

(2) ともに 1 である確率は $\quad (2a)^2=4a^2$

ともに 2 以下である確率は $\quad (2a+b)^2=\left(2a+\dfrac{1-3a}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}$

ともに 3 以下である確率は $\quad (1-a)^2=a^2-2a+1$

ゆえに

$$\begin{aligned}
&P(Z=1)=4a^2\\
&P(Z=2)=\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)-4a^2=-\frac{15}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\\
&P(Z=3)=(a^2-2a+1)-\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}a^2-\frac{5}{2}a+\frac{3}{4}\\
&P(Z=4)=1-(a^2-2a+1)=-a^2+2a
\end{aligned}$$

よって，m は

$$\begin{aligned}
m&=\sum_{k=1}^{4}k\cdot P(Z=k)\\
&=1\cdot 4a^2+2\left(-\frac{15}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)+3\left(\frac{3}{4}a^2-\frac{5}{2}a+\frac{3}{4}\right)+4\left(-a^2+2a\right)\\
&=\boldsymbol{-\frac{21}{4}a^2+\frac{3}{2}a+\frac{11}{4}} \quad \left(\boldsymbol{0 \leqq a \leqq \frac{1}{3}}\right)
\end{aligned}$$

(3) したがって，(2) の結果から

$$m=-\frac{21}{4}\left(a-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{20}{7} \quad \left(0 \leqq a \leqq \frac{1}{3}\right)$$

よって，m は，$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{7}}$ で最大となる．