平成15年度　熊本大学２次試験前期日程(数学問題)120分
文系(教育学部) 平成15年2月25日

1 袋の中に1から3までの数を書いた札が2枚ずつ，計6枚入っている。この中から同時に2枚の札を取り出し，その数をm，nとするとき，次の問いに答えよ。ただし，$m \geqq n$とする。

(1) $m = n$となる確率を求めよ。

(2) 直線$y = x + c$と点$(m,\ n)$との距離の2乗をSとする。Sの期待値を求めよ。

(3) Sの期待値が最小になるcの値を求めよ。

2 関数$f(x) = \log_2 x + 2\log_2(6 - x)$の最大値を求めよ。

3 円$C : x^2 + y^2 - 4kx + 2ky - 5 = 0$について，次の問いに答えよ。

(1) Cはkの値に関係なくある2つの点A，Bを通る。A，Bの座標を求めよ。ただし，Aのx座標はBのx座標より小さいとする。

(2) $\mathrm{PA} : \mathrm{PB} = 2 : 1$となる点Pの軌跡を求めよ。

4 放物線$y = x^2$上に2点P，Qがある。P，Qのx座標がそれぞれa，$a + 2$であるとき，次の問いに答えよ。ただし，$-2 < a < 0$とする。

(1) 原点をOとするとき，$\triangle$OPQの面積S_1を求めよ。

(2) 直線PQと放物線で囲まれた部分の面積S_2を求めよ。

(3) $S_2 = 2S_1$となるaの値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 6 枚から 2 枚取り出す方法は　　${}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15$ (通り)

$m = n$ となるのは，$(m,\ n) = (1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3)$ の 3 通り

よって，求める確率は　　$\dfrac{3}{15} = \boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

(2) 点 $(m,\ n)$ から直線 $y = x + c$ $(x - y + c = 0)$ までの距離を d とすると

$$d = \frac{|m - n + c|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|m - n + c|}{\sqrt{2}}$$

よって　　$S = d^2 = \dfrac{1}{2}(m - n + c)^2$

$m - n = 1$ となるのは，$(m,\ n) = (2,\ 1),\ (3,\ 2)$ で，その確率は

$$\frac{2\times 2}{15} + \frac{2\times 2}{15} = \frac{8}{15}$$

$m - n = 2$ となるのは，$(m,\ n) = (3,\ 1)$ で，その確率は

$$\frac{2\times 2}{15} = \frac{4}{15}$$

よって，(1) および上の結果から，S の期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}c^2 \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2}(1 + c)^2 \times \frac{8}{15} + \frac{1}{2}(2 + c)^2 \times \frac{4}{15} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{30}(15c^2 + 32c + 24)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　　$E = \dfrac{1}{2}\left(c + \dfrac{16}{15}\right)^2 + \dfrac{52}{225}$

よって，期待値 E が最小となる c の値は　　$\boldsymbol{c = -\dfrac{16}{15}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 真数は正であるから　$x>0$　かつ　$6-x>0$

すなわち　　$0<x<6$

また　　　　$f(x)=\log_2 x(6-x)^2$

ここで，$g(x)=x(6-x)^2$ とおくと

$$g'(x)=3(x-6)(x-2)$$

$g(x)$ の増減表は右のようになる．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	極大 32	$\searrow$	

したがって，$g(x)$ は $x=2$ で極大かつ最大となり，$g(x)$ が最大値をとるとき，$f(x)$ も最大値をとる．

よって，$f(x)$ は，$\boldsymbol{x=2}$ **で最大値** $\log_2 32=\mathbf{5}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 円 C の方程式から

$$x^2+y^2-5-2k(2x-y)=0$$

これが k の値に関係なく成り立つための条件は

$$x^2+y^2-5=0,\quad 2x-y=0$$

上の 2 式を解いて　$(x,\ y)=(-1,-2),\ (1,\ 2)$

求める 2 定点 A，B は，x 座標に注意して　**A(−1, −2)，B(1, 2)**

(2) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．

P に関する条件は　　$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=2:1$

これより　　$\mathrm{PA}=2\mathrm{PB}$

すなわち　　$\mathrm{PA}^2=4\mathrm{PB}^2$

上式に

$$\mathrm{PA}^2=(x+1)^2+(y+2)^2,\quad \mathrm{PB}^2=(x-1)^2+(y-2)^2$$

を代入すると

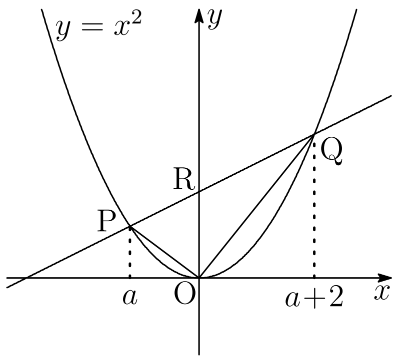
$$(x+1)^2+(y+2)^2=4\{(x-1)^2+(y-2)^2\}$$

整理すると　　$x^2+y^2-\dfrac{10}{3}x-\dfrac{20}{3}y+5=0$

すなわち　　$\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{10}{3}\right)^2=\dfrac{80}{9}$

よって，点 P の軌跡は，**点** $\boldsymbol{\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)}$ **を中心とする半径** $\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{5}}{3}}$ **の円**である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 2 点 P$(a,\ a^2)$，Q$(a+2,\ (a+2)^2)$ を通る直線の方程式は



$$y-a^2=\frac{(a+2)^2-a^2}{(a+2)-a}(x-a)$$

すなわち　$y=2(a+1)x-a(a+2)$

この直線と y 軸の交点を R とすると，$-2<a<0$ より

$$\mathrm{OR}=-a(a+2)$$

ゆえに，△OPQ の面積 S_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{OR}\times\{(a+2)-a\}=\frac{1}{2}\{-a(a+2)\}\times 2=\boldsymbol{-a(a+2)}$$

(2) 直線 PQ と放物線で囲まれた部分の面積は，上の図から

$$\begin{aligned}S_2&=\int_a^{a+2}\{2(a+1)x-a(a+2)-x^2\}\,dx\\&=-\int_a^{a+2}(x-a)\{x-(a+2)\}\,dx\\&=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{(a+2)-a\}^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

(3) $S_2=2S_1$ に (1)，(2) の結果を代入すると

$$\frac{4}{3}=-2a(a+2)\quad \text{ゆえに}\quad 3a^2+6a+2=0$$

$-2<a<0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{a=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}}$