

平成14年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(教育学部, 医学部保健学科看護学専攻)平成14年2月25日

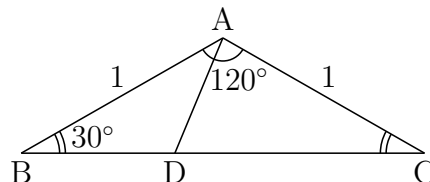
問題 1 2 3 4

- 1 二等辺三角形ABCにおいて $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = AC = 1$ とする。辺BC上に点Dをとり, ADを一辺とする正三角形ADEをつくるとき, 次の問いに答えよ。
- (1) $BD : DC = m : n$ とするとき, 正三角形ADEの面積を m, n で表せ。
 - (2) 二等辺三角形ABCの面積が正三角形ADEの面積の3倍になるとき, $m : n$ を求めよ。
- 2 さいころを繰り返し投げて, n 回目に出た目の数を X_n とし, $a_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ とする。このとき, 各 n について, $a_n \leq 9$ となる確率を求めよ。
- 3 $a > 1, a > p > 0$ とする。2直線 $l_1 : y = 2x - 1, l_2 : y = a$ の交点をS, l_1 と x 軸の交点をTとし, y 軸上の点 $P(0, p)$, l_1 上の点 $A(1, 1)$, l_2 上の点 $Q(q, a)$ をとる。 $\angle PQS = 135^\circ, \angle AQS = 45^\circ$ であるとき, 次の問いに答えよ。
- (1) p, q それぞれを a で表せ。
 - (2) $\angle PAT = \angle QAS$ であるとき, p, a それぞれの値を求めよ。
- 4 $a < -\frac{1}{2}, b > 1$ とする。放物線 $C : y = ax^2 + b$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の共有点が, $P_1(p, q), P_2(-p, q)$ の2点のみとなるとき, 次の問いに答えよ。ただし, $p > 0$ とする。
- (1) b を a で表せ。
 - (2) p, q それぞれを a で表せ。
 - (3) 座標平面の原点をOとする。 $\angle P_1OP_2 = 90^\circ$ のとき, P_1 における放物線Cの接線と放物線Cおよび y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

解答例

- 1 (1) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} BC^2 &= CA^2 + AB^2 - 2CA \cdot AB \cos A \\ &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos 120^\circ \\ &= 3 \end{aligned}$$



$$BC > 0 \text{ より } BC = \sqrt{3}$$

D は、BC を $m : n$ に内分する点であるから

$$BD = BC \times \frac{m}{m+n} = \frac{\sqrt{3}m}{m+n}$$

$\triangle ABC$ は、 $\angle BAC = 120^\circ$ の二等辺三角形であるから $\angle ABD = 30^\circ$
 $\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos B \\ &= 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}m}{m+n} \right)^2 - 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}m}{m+n} \cos 30^\circ \\ &= \frac{m^2 - mn + n^2}{(m+n)^2} \end{aligned}$$

よって、正三角形 ADE の面積は

$$\triangle ADE = \frac{1}{2} AD^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}(m^2 - mn + n^2)}{4(m+n)^2}$$

$$(2) \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} CA \cdot AB \sin A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

このとき、 $\triangle ABC = 3 \times \triangle ADE$ であるから

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = 3 \times \frac{\sqrt{3}(m^2 - mn + n^2)}{4(m+n)^2} \quad \text{ゆえに} \quad 2m^2 - 5mn + 2n^2 = 0$$

$$\text{これから} \quad (m-2n)(2m-n) = 0 \quad \text{すなわち} \quad m = 2n, \quad n = 2m$$

$$\text{よって} \quad m : n = 2 : 1 \quad \text{または} \quad 1 : 2 \quad \blacksquare$$

2 $a_n \leq 9$ となる確率を p_n とする.

[1] $n = 1$ のとき すべての X_1 に対して $a_1 = X_1 \leq 9$ であるから $p_1 = 1$

[2] $n = 2$ のとき

1 の目が 2 回出るのは, 1 通り

1 の目が 1 回だけ出るのは, 残りの目が 1 以外で $5 \times {}_2C_1$ (通り)

1 の目が出ないのは, 次の 6 通り

$$(X_1, X_2) = (2, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (3, 3)$$

$$\text{したがって } p_2 = \frac{1 + 5 \times {}_2C_1 + 6}{6^2} = \frac{17}{36}$$

[3] $n \geq 3$ のとき, 1 以外の目が出る回数は 3 回以内であることに注意して

1 の目が n 回出るのは, 1 通り

1 の目が $(n-1)$ 回だけ出るのは, 残りの目が 1 以外で $5 \times {}_nC_1$ (通り)

1 の目が $(n-2)$ 回だけ出るのは, 残りの目が次の組合せで $6 \times {}_nC_2$ (通り)

$$(2, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (3, 3)$$

1 の目が $(n-3)$ 回だけ出るのは, 残りの目が $(2, 2, 2)$ で ${}_nC_3$ (通り)

$$\begin{aligned} \text{したがって } p_n &= \frac{1}{6^n} (1 + 5 \times {}_nC_1 + 6 \times {}_nC_2 + {}_nC_3) \\ &= \frac{1}{6^n} \left\{ 1 + 5n + 3n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \right\} \\ &= \frac{1}{6^{n+1}} (n^3 + 15n^2 + 14n + 6) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

① は, $n = 1, n = 2$ のときも成り立つので

$$p_n = \frac{1}{6^{n+1}} (n^3 + 15n^2 + 14n + 6)$$



- 3 (1) $a > 1, a > p, \angle PQS = 135^\circ, \angle AQS = 45^\circ$ であるから、直線AQの傾きは -1 、直線PQの傾きは 1 である。

したがって、直線AQの方程式は

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

すなわち $y = -x + 2 \dots \textcircled{1}$

直線 $\textcircled{1}$ と直線 $l_2: y = a \dots \textcircled{2}$ の交点がQ

であるから、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を解いて

$$Q(2 - a, a)$$

直線PQは、Qを通り傾き 1 の直線であるから、その方程式は

$$y - a = 1\{x - (2 - a)\} \quad \text{すなわち} \quad y = x + 2a - 2$$

ゆえに、Pの座標は $(0, 2a - 2)$

よって $p = 2a - 2, q = 2 - a$

- (2) l_1 に関して、Pと対称な点を $P'(s, t)$ とする。

l_1 の傾きは 2 、直線 PP' の傾きは $\frac{t - 2a + 2}{s}$ である。 $l_1 \perp PP'$ であるから

$$2 \times \frac{t - 2a + 2}{s} = -1 \quad \text{すなわち} \quad s + 2t = 4a - 4 \dots \textcircled{3}$$

線分 PP' の中点 $\left(\frac{s}{2}, \frac{2a - 2 + t}{2}\right)$ が l_1 上にあるから

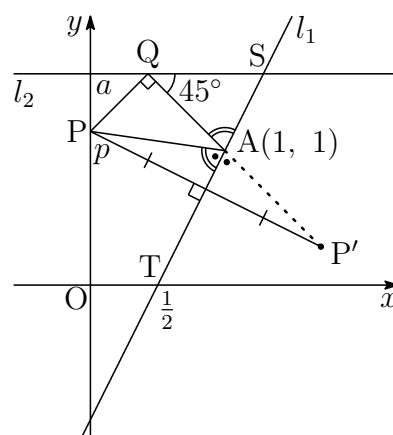
$$\frac{2a - 2 + t}{2} = 2 \times \frac{s}{2} - 1 \quad \text{すなわち} \quad 2s - t = 2a \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ を解いて $s = \frac{8a - 4}{5}, t = \frac{6a - 8}{5}$ ゆえに $P'\left(\frac{8a - 4}{5}, \frac{6a - 8}{5}\right)$

$\angle PAT = \angle QAS$ であるとき、 P' は直線 $\textcircled{1}$ 上にあるので

$$\frac{6a - 8}{5} = -\frac{8a - 4}{5} + 2 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{11}{7}$$

これを(1)の結果に代入して $p = \frac{8}{7}$ ■



- 4 (1) (2) $P_1(p, q)$ は、 C および円周上の点であるから

$$q = ap^2 + b \quad \dots \textcircled{1}$$

$$p^2 + q^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$y = ax^2 + b$ を微分すると $y' = 2ax$

P_1 における C の接線の傾きは $2ap$

直線 OP_1 の傾きは $\frac{q}{p}$

P_1 における C の接線と直線 OP_1 は、垂直であるから

$$2ap \times \frac{q}{p} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad q = -\frac{1}{2a} \quad \dots \textcircled{3}$$

③ を ② に代入すると

$$p^2 + \frac{1}{4a^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p^2 = 1 - \frac{1}{4a^2}$$

$a < -\frac{1}{2}$, $p > 0$ に注意して $p = \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}} \quad \dots \textcircled{4}$

③, ④ を ① に代入すると

$$-\frac{1}{2a} = a \left(1 - \frac{1}{4a^2}\right) + b \quad \text{ゆえに} \quad b = -\left(a + \frac{1}{4a}\right)$$

- (3) $\angle P_1OP_2 = 90^\circ$ のとき、直線 OP_1 の傾きは 1 であるから

$$\frac{q}{p} = 1 \quad \text{すなわち} \quad q = p$$

③, ④ をこれに代入すると $-\frac{1}{2a} = \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}}$

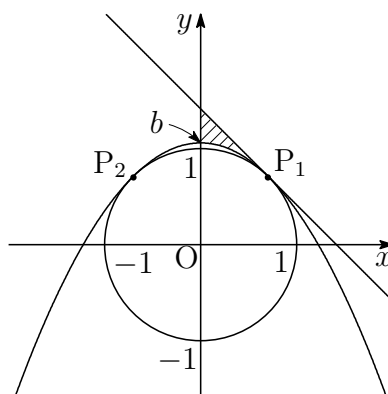
$a < -\frac{1}{2}$ に注意して解くと $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

P_1 における C の接線は、傾き -1 の直線であるから、その方程式は

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -1 \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = -x + \sqrt{2}$$

このとき、 b の値は、(1) の結果から $b = \frac{3\sqrt{2}}{4}$



よって、求める部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ (-x + \sqrt{2}) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

