平成14年度　熊本大学２次試験前期日程(数学問題)120分
文系(教育学部) 平成14年2月25日

1 二等辺三角形ABCにおいて$\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$とする。辺BC上に点Dをとり，ADを一辺とする正三角形ADEをつくるとき，次の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=m:n$とするとき，正三角形ADEの面積を$m$，$n$で表せ。

(2) 二等辺三角形ABCの面積が正三角形ADEの面積の3倍になるとき，$m:n$を求めよ。

2 さいころを繰り返し投げて，n回目に出た目の数をX_nとし，$a_n=X_1X_2\cdots X_n$とする。このとき，各nについて，$a_n\leqq 9$となる確率を求めよ。

3 $a>1$，$a>p>0$とする。2直線$l_1:y=2x-1$，$l_2:y=a$の交点をS，l_1とx軸の交点をTとし，y軸上の点P$(0,\ p)$，l_1上の点A$(1,\ 1)$，l_2上の点Q$(q,\ a)$をとる。$\angle\mathrm{PQS}=135^\circ$，$\angle\mathrm{AQS}=45^\circ$であるとき，次の問いに答えよ。

(1) p，qそれぞれをaで表せ。

(2) $\angle\mathrm{PAT}=\angle\mathrm{QAS}$であるとき，$p$，$a$それぞれの値を求めよ。

4 $a<-\dfrac{1}{2}$，$b>1$とする。放物線$C:y=ax^2+b$と円$x^2+y^2=1$の共有点が，P$_1(p,\ q)$，P$_2(-p,\ q)$の2点のみとなるとき，次の問いに答えよ。ただし，$p>0$とする。

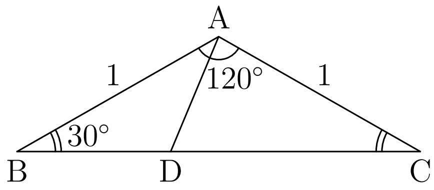
(1) bをaで表せ。

(2) p，qそれぞれをaで表せ。

(3) 座標平面の原点をOとする。$\angle\mathrm{P_1OP_2}=90^\circ$のとき，P$_1$における放物線$C$の接線と放物線$C$および$y$軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) △ABC に余弦定理を適用して



$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cos A\\ &= 1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos120^\circ\\ &= 3\end{aligned}$$

$\mathrm{BC}>0$ より　$\mathrm{BC}=\sqrt{3}$

D は，BC を $m:n$ に内分する点であるから

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BC}\times\frac{m}{m+n}=\frac{\sqrt{3}m}{m+n}$$

△ABC は，$\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$ の二等辺三角形であるから　$\angle\mathrm{ABD}=30^\circ$

△ABD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cos B\\ &= 1^2+\left(\frac{\sqrt{3}m}{m+n}\right)^2-2\times1\times\frac{\sqrt{3}m}{m+n}\cos30^\circ\\ &= \frac{m^2-mn+n^2}{(m+n)^2}\end{aligned}$$

よって，正三角形 ADE の面積は

$$\triangle\mathrm{ADE}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}^2\sin60^\circ=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}(m^2-mn+n^2)}{4(m+n)^2}}$$

(2) $$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin A=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

このとき，$\triangle\mathrm{ABC}=3\times\triangle\mathrm{ADE}$ であるから

$$\frac{\sqrt{3}}{4}=3\times\frac{\sqrt{3}(m^2-mn+n^2)}{4(m+n)^2}\quad \text{ゆえに}\quad 2m^2-5mn+2n^2=0$$

これから　$(m-2n)(2m-n)=0$　すなわち　$m=2n$，$n=2m$

よって　$\boldsymbol{m:n=2:1}$ **または** $\mathbf{1:2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a_n \leqq 9$ となる確率を p_n とする.

［1］ $n=1$ のとき　すべての X_1 に対して $a_1 = X_1 \leqq 9$ であるから　$p_1 = 1$

［2］ $n=2$ のとき

1 の目が 2 回出るのは，1 通り

1 の目が 1 回だけ出るのは，残りの目が 1 以外で　$5 \times {}_2\mathrm{C}_1$ (通り)

1 の目が出ないのは，次の 6 通り

$$(X_1,\ X_2) = (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)$$

したがって　$p_2 = \dfrac{1 + 5 \times {}_2\mathrm{C}_1 + 6}{6^2} = \dfrac{17}{36}$

［3］ $n \geqq 3$ のとき，1 以外の目が出る回数は 3 回以内であることに注意して

1 の目が n 回出るのは，1 通り

1 の目が $(n-1)$ 回だけ出るのは，残りの目が 1 以外で　$5 \times {}_n\mathrm{C}_1$ (通り)

1 の目が $(n-2)$ 回だけ出るのは，残りの目が次の組合せで　$6 \times {}_n\mathrm{C}_2$ (通り)

$$(2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)$$

1 の目が $(n-3)$ 回だけ出るのは，残りの目が $(2,\ 2,\ 2)$ で　${}_n\mathrm{C}_3$ (通り)

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{6^n}(1 + 5 \times {}_n\mathrm{C}_1 + 6 \times {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3) \\ &= \frac{1}{6^n}\left\{1 + 5n + 3n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right\} \\ &= \frac{1}{6^{n+1}}(n^3 + 15n^2 + 14n + 6) \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

① は，$n=1$，$n=2$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{6^{n+1}}(n^3 + 15n^2 + 14n + 6)}$$

3 (1) $a>1$, $a>p$, $\angle\mathrm{PQS}=135^\circ$, $\angle\mathrm{AQS}=45^\circ$ であるから，直線AQの傾きは-1，直線PQの傾きは1である．

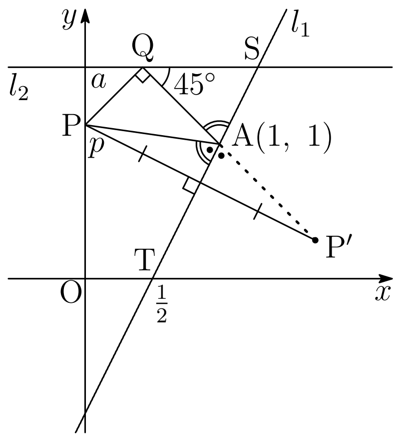
したがって，直線AQの方程式は

$$y-1=-1(x-1)$$

すなわち　$y=-x+2 \quad \cdots ①$

直線 ① と直線 l_2 : $y=a\cdots$ ② の交点が Q であるから，①，② を解いて

$$\mathrm{Q}(2-a,\ a)$$



直線 PQ は，Q を通り傾き 1 の直線であるから，その方程式は

$$y-a=1\{x-(2-a)\} \quad \text{すなわち} \quad y=x+2a-2$$

ゆえに，P の座標は　$(0,\ 2a-2)$

よって　　$\boldsymbol{p=2a-2,\ q=2-a}$

(2) l_1 に関して，P と対称な点を $\mathrm{P}'(s,\ t)$ とする．

l_1 の傾きは2，直線 PP′ の傾きは $\dfrac{t-2a+2}{s}$ である．$l_1\perp\mathrm{PP}'$ であるから

$$2\times\frac{t-2a+2}{s}=-1 \quad \text{すなわち} \quad s+2t=4a-4 \quad \cdots ③$$

線分 PP′ の中点 $\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{2a-2+t}{2}\right)$ が l_1 上にあるから

$$\frac{2a-2+t}{2}=2\times\frac{s}{2}-1 \quad \text{すなわち} \quad 2s-t=2a \quad \cdots ④$$

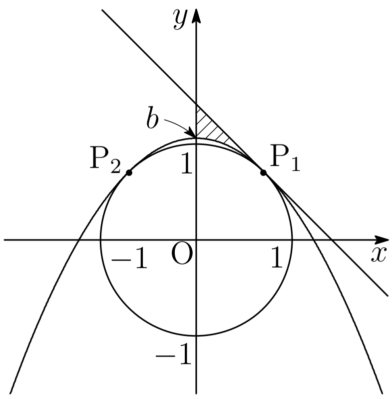
③，④ を解いて $s=\dfrac{8a-4}{5}$，$t=\dfrac{6a-8}{5}$　ゆえに　$\mathrm{P}'\left(\dfrac{8a-4}{5},\ \dfrac{6a-8}{5}\right)$

$\angle\mathrm{PAT}=\angle\mathrm{QAS}$ であるとき，P′ は直線 ① 上にあるので

$$\frac{6a-8}{5}=-\frac{8a-4}{5}+2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=\frac{11}{7}}$$

これを (1) の結果に代入して　　$\boldsymbol{p=\dfrac{8}{7}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) (2) $\mathrm{P}_1(p,\ q)$ は，C および円周上の点であるから



$$q = ap^2 + b \quad \cdots ①$$
$$p^2 + q^2 = 1 \quad \cdots ②$$

$y = ax^2 + b$ を微分すると　$y' = 2ax$

P_1 における C の接線の傾きは　$2ap$

直線 OP_1 の傾きは　$\dfrac{q}{p}$

P_1 における C の接線と直線 OP_1 は，垂直であるから

$$2ap \times \frac{q}{p} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q = -\frac{1}{2a}} \quad \cdots ③$$

③ を ② に代入すると

$$p^2 + \frac{1}{4a^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p^2 = 1 - \frac{1}{4a^2}$$

$a < -\dfrac{1}{2}$，$p > 0$ に注意して　$\boldsymbol{p = \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}}} \quad \cdots ④$

③，④ を ① に代入すると

$$-\frac{1}{2a} = a\left(1 - \frac{1}{4a^2}\right) + b \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b = -\left(a + \frac{1}{4a}\right)}$$

(3) $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2 = 90^\circ$ のとき，直線 OP_1 の傾きは 1 であるから

$$\frac{q}{p} = 1 \quad \text{すなわち} \quad q = p$$

③，④ をこれに代入すると　$-\dfrac{1}{2a} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4a^2}}$

$a < -\dfrac{1}{2}$ に注意して解くと　$a = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$\mathrm{P}_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

P_1 における C の接線は，傾き -1 の直線であるから，その方程式は

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = -x + \sqrt{2}$$

このとき，b の値は，(1) の結果から　$b = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

よって，求める部分の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ (-x+\sqrt{2}) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \right) \right\} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \mathbf{\frac{1}{12}}
\end{aligned}
$$