# 平成 13 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
# 文系 (教育学部) 平成 13 年 2 月 25 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ 点 $(x,\ y)$ が連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 - 1 \\ y \leqq x + 1 \end{cases}$$

の表す領域を動くとき，$x^2 + y^2 - 4y$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a$ を正の定数とし，放物線 $y = x^2$ の $x \geqq 0$ の部分が表す曲線を $C$ とする。また $a < t$ をみたす $t$ に対して，曲線 $C$ と 2 つの直線 $x = a$，$y = t^2$ によって囲まれる図形の面積を $S(t)$ とおく。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}$ を $a$，$t$ で表せ。

(2) $\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)} < 8$ を示せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面上の点 $\mathrm{P}_n(n,\ 1)$，$n = 1, 2, \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_1$ から原点 O と点 $\mathrm{P}_n$ $(n \geqq 2)$ を通る直線へ下ろした垂線を $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_n$ とし，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ のなす角を $\theta_n$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ の成分を求めよ。

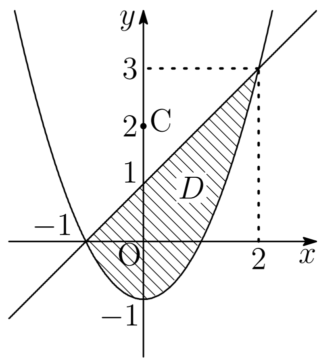
(2) $\cos\theta_n$ を求めよ。

(3) $\tan\theta_n < 1.01$ をみたす最小の $n$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 袋の中に 1 から 5 までのいずれかの数字を書いた同じ形の札が 15 枚入っていて，それらは 1 の札が 1 枚，2 の札が 2 枚，3 の札が 3 枚，4 の札が 4 枚，5 の札が 5 枚からなる。袋の中からこれらの札のうち 3 枚を同時にとり出すとき，札に書かれている数の和が偶数，奇数である確率をそれぞれ求めよ。

**解答例**

$\boxed{\mathbf{1}}$ 連立不等式の表す領域を $D$ とすると，$D$ は，右の図の斜線部分で境界を含む．




$$x^2+y^2-4y=x^2+(y-2)^2-4$$

であるから，点 $\mathrm{C}(0,\ 2)$ をとると，$D$ 内の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について

$$x^2+y^2-4y=\mathrm{CP}^2-4$$

CP は $D$ の境界で最大値・最小値をとるので，P が次の Q および R にあるとき，その最大値・最小値を調べる．

$$\mathrm{Q}(s,\ s+1)\ (-1 \leqq s \leqq 2),\qquad \mathrm{R}(t,\ t^2-1)\ (-1 \leqq t \leqq 2)$$

したがって

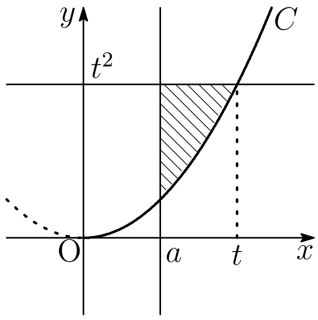
$$\begin{aligned}\mathrm{CQ}^2-4 &= s^2+\{(s+1)-2\}^2-4 \quad (-1 \leqq s \leqq 2)\\ &= 2s^2-2s-3\\ &= 2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{CR}^2-4 &= t^2+\{(t^2-1)-2\}^2-4 \quad (-1 \leqq t \leqq 2)\\ &= t^4-5t^2+5\\ &= \left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\end{aligned}$$

ゆえに　$-\dfrac{7}{2} \leqq \mathrm{CQ}^2-4 \leqq 1,\qquad -\dfrac{5}{4} \leqq \mathrm{CR}^2-4 \leqq 5$

よって，$x^2+y^2-4y$ は，$D$ において**最大値 $\mathbf{5}$，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{7}{2}}$** をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $S(t)$ は，右の図の斜線部分の面積である．




$$
\begin{aligned}
S(t) &= \int_a^t (t^2 - x^2)\,dx \\
&= \left[\ t^2x - \frac{1}{3}x^3\ \right]_a^t \\
&= \frac{1}{3}(2t^3 - 3at^2 + a^3) \\
&= \frac{1}{3}(t-a)^2(2t+a) \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

① より

$$
\begin{aligned}
S\left(\frac{t+a}{2}\right) &= \frac{1}{3}\left(\frac{t+a}{2} - a\right)^2\left(2\cdot\frac{t+a}{2} + a\right) \\
&= \frac{1}{12}(t-a)^2(t+2a) \quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

①，② より

$$
\frac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)} = \frac{1}{3}(t-a)^2(2t+a) \times \frac{12}{(t-a)^2(t+2a)} = \boldsymbol{\frac{4(2t+a)}{t+2a}}
$$

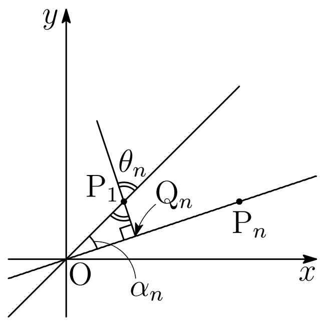
(2) (1) の結果から

$$
8 - \frac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)} = 8 - \frac{4(2t+a)}{t+2a} = \frac{12a}{t+2a}
$$

$0 < a < t$ であるから　$\dfrac{12a}{t+2a} > 0$

ゆえに　$8 - \dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)} > 0$　よって　$\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)} < 8$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=(n,\ 1)$ であるから




$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=n+1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|^2=n^2+1$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n})}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\\&=(1,\ 1)-\frac{n+1}{n^2+1}(n,\ 1)\\&=\boldsymbol{\left(\frac{1-n}{n^2+1},\ \frac{n^2-n}{n^2+1}\right)}\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}_1$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}_n$ のなす角を $\alpha_n$ とすると

$$\cos\alpha_n=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}||\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|}=\frac{n+1}{\sqrt{2}\sqrt{n^2+1}}$$

また　$\sin^2\alpha_n=1-\cos^2\alpha_n=1-\dfrac{(n+1)^2}{2(n^2+1)}=\dfrac{(n-1)^2}{2(n^2+1)}$

$\sin\alpha_n>0$ であるから　$\sin\alpha_n=\dfrac{n-1}{\sqrt{2(n^2+1)}}$

$\theta_n=90^\circ-\alpha_n$ であるから

$$\cos\theta_n=\cos(90^\circ-\alpha_n)=\sin\alpha_n=\boldsymbol{\frac{n-1}{\sqrt{2(n^2+1)}}}$$

(3)
$$\tan^2\alpha_n=\frac{1}{\cos^2\alpha_n}-1=\frac{2(n^2+1)}{(n+1)^2}-1=\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$$

$0<\alpha_n<90^\circ$ であるから $\tan\alpha_n>0$ より　$\tan\alpha_n=\dfrac{n-1}{n+1}$

$\theta_n=90^\circ-\alpha_n$ であるから

$$\tan\theta_n=\tan(90^\circ-\alpha_n)=\frac{1}{\tan\alpha_n}=\frac{n+1}{n-1}$$

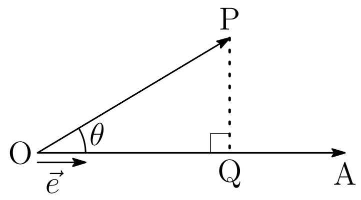
$\tan\theta_n<1.01$ をみたす最小の $n$ は

$$\frac{n+1}{n-1}<1.01\quad ゆえに\quad n>201$$

したがって，これをみたす最小の $n$ は　**202**

**解説**

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を $\theta$ とし，単位ベクトル $\vec{e}$ を




$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|} \quad \cdots ①$$

とすると，P から OA に下ろした垂線の足 Q について

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta)\vec{e} \quad \cdots ②$$

また，$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$

これと ① を ② に代入すると　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

**4** 和が偶数になるのは，3 枚が偶数または 1 枚が偶数で 2 枚が奇数の場合である．したがって，和が偶数になる確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3 + {}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_9\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_3} = \frac{20 + 6\times 36}{455} = \boldsymbol{\frac{236}{455}}$$

また，和が奇数になる確率は，この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{236}{455} = \boldsymbol{\frac{219}{455}}$$