

平成 12 年度 熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部) 平成 12 年 2 月 25 日

1 傾き m ($m > 0$) の直線 l が, 放物線 $C : y = x^2$ と, 異なる 2 点 $P(\sqrt{2}, 2)$ と Q で交わるとする。 l が, Q における C の接線と直交するとき, 次の問いに答えよ。

- (1) m の値を求めよ。
- (2) C と l で囲まれた図形の y 軸より右側の部分の面積を求めよ。

2 0 でない複素数 z に対して, $w = z + \frac{1}{z}$ とおくとき, 次の問いに答えよ。

- (1) w が実数となるための z の満たす条件を求め, この条件をみたす z 全体の図形を複素数平面上に図示せよ。
- (2) w が実数で $1 \leq w \leq \frac{10}{3}$ をみたすとき, z の満たす条件を求め, この条件をみたす z 全体の図形を複素数平面上に図示せよ。

3 座標平面上の原点を O とし, 点 A を $A(a, 0)$ ($a > 0$) とする。第 1 象限内の点 P を, 正の傾き m ($m \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$) をもつ直線 $y = mx$ 上にあり, $\angle OPA = 60^\circ$ となる点とすると, 次の問いに答えよ。

- (1) $\angle OAP = \theta$ とするとき, $\tan \theta$ を m を用いて表せ。
- (2) P の y 座標を a と m を用いて表せ。

4 $a > 0, b > 0$ とする。 $ax^2 + by^2 = 1$ をみたす負でない実数 x, y について, 次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{x}{a} \leq \frac{y}{b}$ となるための x の範囲を求めよ。
- (2) $\min\left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right\}$ の最大値と, そのときの x および y を求めよ。ただし, 実数 X, Y に対して

$$\begin{cases} X \leq Y \text{ のとき} & \min\{X, Y\} = X \\ X > Y \text{ のとき} & \min\{X, Y\} = Y \end{cases}$$

である。

解答例

- 1 (1) C 上の点 Q を (q, q^2) とおくと, 直線 PQ の傾き m は

$$m = \frac{q^2 - 2}{q - \sqrt{2}} = q + \sqrt{2}$$

$y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$
 C 上の点 Q における接線の傾きは $2q$
 この接線と直線 PQ は直交するから

$$2q(q + \sqrt{2}) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad (\sqrt{2}q + 1)^2 = 0$$

したがって, $q = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ を ① に代入すると

$$m = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- (2) l は, 点 $P(\sqrt{2}, 2)$ を通り, 傾き $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の直線であるから

$$y - 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2}) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$$

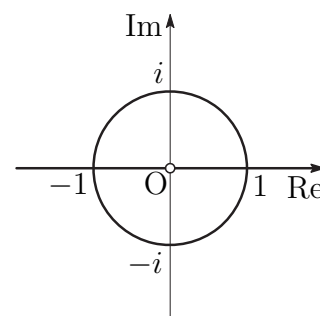
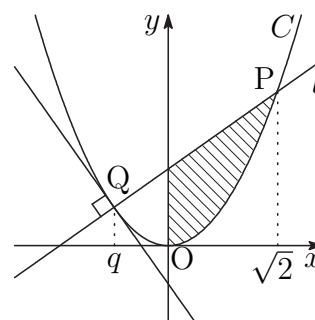
求める面積を S とすると, S は上の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{2}} \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1 \right) - x^2 \right\} dx \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

- 2 (1) $w = z + \frac{1}{z}$ が実数であるとき, $w = \bar{w}$ より

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \\ (z - \bar{z}) \left(1 - \frac{1}{z\bar{z}} \right) &= 0 \\ (z - \bar{z}) \left(1 - \frac{1}{|z|^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

よって $z = \bar{z} (z \neq 0)$ または $|z| = 1$



別解 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とすると ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$)

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \left(r + \frac{1}{r}\right) + \left(r - \frac{1}{r}\right) i \sin \theta \end{aligned}$$

z が実数のとき

$$\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta = 0 \quad \text{すなわち} \quad r = 1 \quad \text{または} \quad \theta = 0, \pi$$

よって $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) または $z = \pm r$ ($r \neq 0$)

(2) w は, 実数であるから, (1) の結果を利用する.

(i) $z = \bar{z}$, すなわち, z が実数のとき

$$1 \leq z + \frac{1}{z} \leq \frac{10}{3}$$

このとき, $z > 0$ であるから

$$z + \frac{1}{z} - 1 = \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 + 1 > 0$$

したがって, $z > 0$ のとき $z + \frac{1}{z} \leq \frac{10}{3}$ を解くと

$$(3z - 1)(z - 3) \leq 0 \quad \text{よって} \quad \frac{1}{3} \leq z \leq 3$$

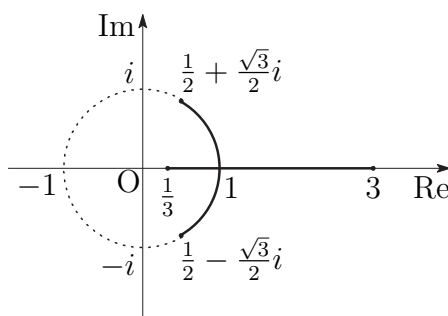
(ii) $|z| = 1$ のとき, $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($-\pi \leq \theta < \pi$) とおくと

$$w = z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$$

したがって $1 \leq 2 \cos \theta \leq \frac{10}{3}$ ゆえに $\cos \theta \geq \frac{1}{2}$

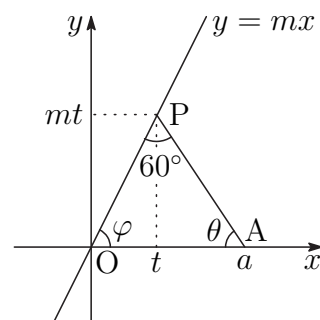
よって $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$)

(i), (ii) より, z の表す図形は, 下の図の実線部分.



- 3** (1) $\varphi = \angle AOP$ とすると, $\tan \varphi = m$.
 $\theta = 180^\circ - (60^\circ + \varphi) = 120^\circ - \varphi$ であるから

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(120^\circ - \varphi) \\ &= \frac{\tan 120^\circ - \tan \varphi}{1 + \tan 120^\circ \tan \varphi} \\ &= \frac{-\sqrt{3} - m}{1 - \sqrt{3}m} = \frac{m + \sqrt{3}}{\sqrt{3}m - 1} \end{aligned}$$



- (2) $P(t, mt)$ とおくと, 直線 PA の傾きは $\frac{-mt}{a-t}$

また, 直線 PA の傾きは, (1) の結果から

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta = -\frac{m + \sqrt{3}}{\sqrt{3}m - 1}$$

したがって $\frac{-mt}{a-t} = -\frac{m + \sqrt{3}}{\sqrt{3}m - 1}$ ゆえに $t = \frac{(m + \sqrt{3})a}{\sqrt{3}(m^2 + 1)}$

よって, P の y 座標は $mt = \frac{m(m + \sqrt{3})a}{\sqrt{3}(m^2 + 1)}$

4 (1) $ax^2 + by^2 = 1$ ($a > 0, b > 0, x > 0, y > 0$) より

$$0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad \frac{y}{b} = \sqrt{\frac{1-ax^2}{b^3}}$$

$f(x) = \frac{x}{a}, g(x) = \sqrt{\frac{1-ax^2}{b^3}}$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$) とおくと, $f(x)$ は増加関数, $g(x)$ は減少関数. $f(x) = g(x)$ とおくと

$$\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{1-ax^2}{b^3}} \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a}{\sqrt{a^3+b^3}}$$

$\frac{x}{a} \leq \frac{y}{b}$, すなわち, $f(x) \leq g(x)$ となる x の範囲は

$$0 \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{a^3+b^3}}$$

(2) $c = \frac{a}{\sqrt{a^3+b^3}}$ とおくと

$$\min\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x \leq c) \\ g(x) & (c \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{a}}) \end{cases}$$

したがって $0 \leq x \leq c$ のとき $f(x) \leq f(c)$

$c \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$ のとき $g(x) \leq g(c)$

$f(c) = g(c) = \frac{1}{\sqrt{a^3+b^3}}, \min\left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right\} = \min\{f(x), g(x)\}$ であるから

よって, $\min\left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right\}$ は最大値 $\frac{1}{\sqrt{a^3+b^3}}$ をとる.

このとき $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1}{\sqrt{a^3+b^3}}$

すなわち $x = \frac{a}{\sqrt{a^3+b^3}}, y = \frac{b}{\sqrt{a^3+b^3}}$