# 平成 12 年度　熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
# 文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻) 平成 12 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

**1** 傾き $m$ $(m > 0)$ の直線 $l$ が，放物線 $C : y = x^2$ と，異なる 2 点 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ 2)$ と Q で交わるとする。$l$ が，Q における $C$ の接線と直交するとき，次の問いに答えよ。

(1) $m$ の値を求めよ。

(2) $C$ と $l$ で囲まれた図形の $y$ 軸より右側の部分の面積を求めよ。

**2** 0 でない複素数 $z$ に対して，$w = z + \dfrac{1}{z}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $w$ が実数となるための $z$ の満たす条件を求め，この条件をみたす $z$ 全体の図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) $w$ が実数で $1 \leqq w \leqq \dfrac{10}{3}$ をみたすとき，$z$ のみたす条件を求め，この条件をみたす $z$ 全体の図形を複素数平面上に図示せよ。

**3** 座標平面上の原点を O とし，点 A を $\mathrm{A}(a,\ 0)$ $(a > 0)$ とする。第 1 象限内の点 P を，正の傾き $m$ $\left(m \neq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ をもつ直線 $y = mx$ 上にあり，$\angle\mathrm{OPA} = 60^\circ$ となる点とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{OAP} = \theta$ とするとき，$\tan\theta$ を $m$ を用いて表せ。

(2) P の $y$ 座標を $a$ と $m$ を用いて表せ。

**4** $a > 0$，$b > 0$ とする。$ax^2 + by^2 = 1$ をみたす負でない実数 $x$，$y$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{x}{a} \leqq \dfrac{y}{b}$ となるための $x$ の範囲を求めよ。

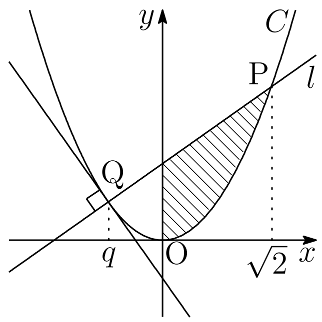
(2) $\min\left\{\dfrac{x}{a},\ \dfrac{y}{b}\right\}$ の最大値と，そのときの $x$ および $y$ を求めよ。ただし，実数 $X$，$Y$ に対して

$$\begin{cases} X \leqq Y \text{ のとき} & \min\{X,\ Y\} = X \\ X > Y \text{ のとき} & \min\{X,\ Y\} = Y \end{cases}$$

である。

解答例

**1** (1) $C$ 上の点 Q を $(q,\ q^2)$ とおくと，直線 PQ の傾き $m$ は




$$m = \frac{q^2 - 2}{q - \sqrt{2}} = q + \sqrt{2}$$

$y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$
$C$ 上の点 Q における接線の傾きは　$2q$
この接線と直線 PQ は直交するから

$$2q(q + \sqrt{2}) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad (\sqrt{2}q + 1)^2 = 0$$

したがって，$q = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を ① に代入すると

$$m = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(2) $l$ は，点 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ 2)$ を通り，傾き $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の直線であるから

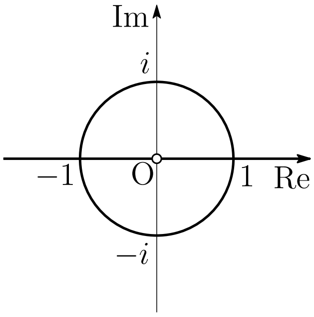
$$y - 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2}) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$$

求める面積を $S$ とすると，$S$ は上の図の斜線部分の面積であるから

$$S = \int_0^{\sqrt{2}} \left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1 \right) - x^2 \right\} dx$$
$$= \left[ \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{6}}$$

■

**2** (1) $w = z + \dfrac{1}{z}$ が実数であるとき，$w = \overline{w}$ より




$$z + \frac{1}{z} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}$$
$$(z - \overline{z})\left(1 - \frac{1}{z\overline{z}}\right) = 0$$
$$(z - \overline{z})\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0$$

よって　$\boldsymbol{z = \overline{z}\ (z \neq 0)}$　**または**　$\boldsymbol{|z| = 1}$

別解 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$

$$\begin{aligned} z+\frac{1}{z} &= r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-\sin\theta)\\ &= \left(r+\frac{1}{r}\right)+\left(r-\frac{1}{r}\right)i\sin\theta \end{aligned}$$

$z$ が実数のとき

$$\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta=0 \quad すなわち \quad r=1 \quad または \quad \theta=0,\ \pi$$

よって　$z=\cos\theta+i\sin\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$　または　$z=\pm r\ (r\neq 0)$

(2) $w$ は，実数であるから，(1) の結果を利用する．

(i) $z=\overline{z}$，すなわち，$z$ が実数のとき

$$1\leqq z+\frac{1}{z}\leqq\frac{10}{3}$$

このとき，$z>0$ であるから

$$z+\frac{1}{z}-1=\left(\sqrt{z}-\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2+1>0$$

したがって，$z>0$ のとき $z+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{10}{3}$ を解くと

$$(3z-1)(z-3)\leqq 0 \quad よって \quad \boldsymbol{\frac{1}{3}\leqq z\leqq 3}$$

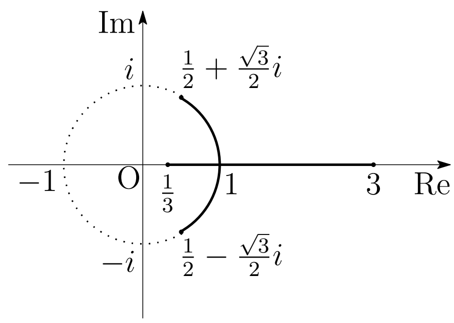
(ii) $|z|=1$ のとき，$z=\cos\theta+i\sin\theta\ (-\pi\leqq\theta<\pi)$ とおくと

$$w=z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$$

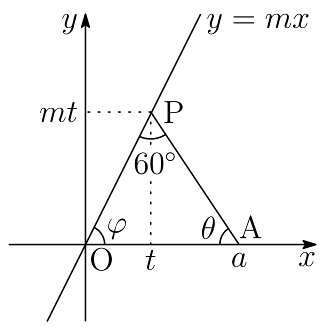
したがって　$1\leqq 2\cos\theta\leqq\dfrac{10}{3}$　ゆえに　$\cos\theta\geqq\dfrac{1}{2}$

よって　$\boldsymbol{z=\cos\theta+i\sin\theta\ \left(-\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}\right)}$

(i)，(ii) より，$z$ の表す図形は，下の図の実線部分．



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\varphi = \angle\mathrm{AOP}$ とすると，$\tan\varphi = m$.
$\theta = 180^\circ - (60^\circ + \varphi) = 120^\circ - \varphi$ であるから




$$\begin{aligned}\tan\theta &= \tan(120^\circ - \varphi)\\ &= \frac{\tan 120^\circ - \tan\varphi}{1 + \tan 120^\circ \tan\varphi}\\ &= \frac{-\sqrt{3} - m}{1 - \sqrt{3}m} = \boldsymbol{\frac{m + \sqrt{3}}{\sqrt{3}m - 1}}\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{P}(t,\ mt)$ とおくと，直線 PA の傾きは $\dfrac{-mt}{a-t}$

また，直線 PA の傾きは，(1) の結果から

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta = -\frac{m + \sqrt{3}}{\sqrt{3}m - 1}$$

したがって $\dfrac{-mt}{a-t} = -\dfrac{m+\sqrt{3}}{\sqrt{3}m-1}$ ゆえに $t = \dfrac{(m+\sqrt{3})a}{\sqrt{3}(m^2+1)}$

よって，P の $y$ 座標は $mt = \boldsymbol{\dfrac{m(m+\sqrt{3})a}{\sqrt{3}(m^2+1)}}$ ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $ax^2+by^2=1$ $(a>0,\ b>0,\ x>0,\ y>0)$ より

$$0 \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad \frac{y}{b}=\sqrt{\frac{1-ax^2}{b^3}}$$

$f(x)=\dfrac{x}{a},\ g(x)=\sqrt{\dfrac{1-ax^2}{b^3}}$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$ とおくと，$f(x)$ は増加関数，$g(x)$ は減少関数．$f(x)=g(x)$ とおくと

$$\frac{x}{a}=\sqrt{\frac{1-ax^2}{b^3}} \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{a}{\sqrt{a^3+b^3}}$$

$\dfrac{x}{a} \leqq \dfrac{y}{b}$，すなわち，$f(x) \leqq g(x)$ となる $x$ の範囲は

$$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \frac{a}{\sqrt{a^3+b^3}}}$$

(2) $c=\dfrac{a}{\sqrt{a^3+b^3}}$ とおくと

$$\min\{f(x),\ g(x)\}=\begin{cases} f(x) & (0 \leqq x \leqq c) \\ g(x) & \left(c \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \end{cases}$$

したがって　$0 \leqq x \leqq c$ のとき　$f(x) \leqq f(c)$

$c \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ のとき　$g(x) \leqq g(c)$

$f(c)=g(c)=\dfrac{1}{\sqrt{a^3+b^3}}$，$\min\left\{\dfrac{x}{a},\ \dfrac{y}{b}\right\}=\min\{f(x),\ g(x)\}$ であるから

よって，$\min\left\{\dfrac{x}{a},\ \dfrac{y}{b}\right\}$ は**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{a^3+b^3}}}$ **をとる．**

このとき　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{a^3+b^3}}$

すなわち　$\boldsymbol{x=\dfrac{a}{\sqrt{a^3+b^3}},\ y=\dfrac{b}{\sqrt{a^3+b^3}}}$ ■