

平成 11 年度 熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
 文系 (教育学部, 医学部保健学科看護学専攻) 平成 11 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 AB = AC である二等辺三角形 ABC の辺 BC を 1 : 2 の比に内分する点 D とする。∠BAD = 30°, AD = 1 のとき, 次の問いに答えよ。

- (1) ∠DAC を求めよ。
- (2) 辺 AB の長さを求めよ。

2 複素数 z ($z \neq i$) に対して,

$$w = \frac{z+i}{z-i}$$

とおく。ただし, i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

- (1) w が実数になるための z の条件を求めよ。
- (2) 複素数平面上で z が $-i$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, w の軌跡を求めよ。

3 点 A を中心とする円 $x^2 + (y - a)^2 = b^2$ が, 放物線 $y = x^2$ と異なる 2 点 P, Q で接している。ただし, $a > \frac{1}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) a と b の関係式を求めよ。
- (2) $\triangle APQ$ が正三角形のとき, 円と放物線で囲まれた三日月形の面積を求めよ。

4 n を自然数とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $|x| + |y| \leq n$ となる 2 つの整数の組 (x, y) の個数を求めよ。
- (2) $|x| + |y| + |z| \leq n$ となる 3 つの整数の組 (x, y, z) の個数を求めよ。

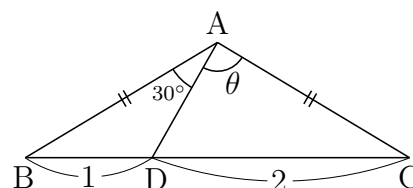
ただし, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ である。

解答例

1 (1) $BD : DC = 1 : 2$ より

$$\triangle ABD : \triangle ACD = 1 : 2$$

$\theta = \angle DAC$ とおくと, $AB = AC$ より



$$\begin{aligned} \triangle ABD : \triangle ACD &= \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin 30^\circ : \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin \theta \\ &= \sin 30^\circ : \sin \theta \end{aligned}$$

したがって $\sin 30^\circ : \sin \theta = 1 : 2$ ゆえに $\sin \theta = 2 \sin 30^\circ = 1$
 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから $\angle ACD = 90^\circ$

(2) (1) の結果から $\angle BAC = \theta + 30^\circ = 120^\circ$

$AB = AC$ であるから $\angle ABC = \angle ACB$

したがって $\angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$

$$\angle ADB = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$$

$AD = 1$ であるから, $\triangle ABD$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{AB}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\sin 30^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad AB = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3}$$



$$\boxed{2} \quad (1) \quad w = \frac{z+i}{z-i} \text{ より } \quad \bar{w} = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$$

w が実数のとき, $w = \bar{w}$ が成り立つから

$$\frac{z+i}{z-i} = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} \quad \text{ゆえに} \quad z + \bar{z} = 0$$

よって, z は純虚数 ($z \neq i$)

$$(2) \quad z \text{ は } -i \text{ を中心とする半径 } 1 \text{ の円周上の点であるから } |z+i| = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$w = \frac{z+i}{z-i} \text{ より } \quad (w-1)z = i(w+1)$$

$$\text{このとき, } w \neq 1 \text{ であるから } z = \frac{i(w+1)}{w-1} \quad \dots \textcircled{2}$$

②を①に代入すると

$$\left| \frac{i(w+1)}{w-1} + i \right| = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2|w|}{|w-1|} = 1$$

$2|w| = |w-1|$ の両辺を平方すると

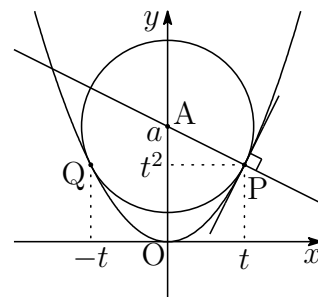
$$\begin{aligned} 4w\bar{w} &= (w-1)(\bar{w}-1) \\ w\bar{w} + \frac{1}{3}(w+\bar{w}) &= \frac{1}{3} \\ \left(w + \frac{1}{3}\right) \left(\bar{w} + \frac{1}{3}\right) &= \frac{4}{9} \\ \left|w + \frac{1}{3}\right| &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

よって, w の軌跡は, $-\frac{1}{3}$ を中心とする半径 $\frac{2}{3}$ の円.

解説 $2|w| = |w-1|$ より, $|w| : |w-1| = 1 : 2$.

したがって, w は 2 点 $0, 1$ を結ぶ線分を $1 : 2$ に内分する点 $\frac{1}{3}$ と $1 : 2$ に外分する点 -1 を直径の両端とする円周上にある (アポロニウスの円). ■

- 3** (1) $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$
 円 $x^2 + (y - a)^2 = b^2$ および放物線 $y = x^2$ の
 y 軸に関する対称性に注意して、これらの2
 つの接点 P, Q の座標を $P(t, t^2), Q(-t, t^2)$
 とおく ($t > 0$)。放物線の点 P における法線
 の方程式は



$$y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t)$$

これが円の中心 $A(0, a)$ を通るから

$$a - t^2 = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a = t^2 + \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

このとき、2点 $A\left(0, t^2 + \frac{1}{2}\right), P(t, t^2)$ の距離が円の半径 b であるから

$$b^2 = AP^2 = t^2 + \left\{t^2 - \left(t^2 + \frac{1}{2}\right)\right\}^2 = t^2 + \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

また、点 $Q(-t, t^2)$ についても、①、②は成り立つ。

$t > 0$ であるから、①より $a > \frac{1}{2}$

①、②から、 t を消去すると

$$b^2 = a - \frac{1}{4} \quad \left(a > \frac{1}{2}\right)$$

別解 $x^2 + (y - a)^2 = b^2$ と $y = x^2$ から x を消去すると

$$y + (y - a)^2 = b^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 - (2a - 1)y + a^2 - b^2 = 0$$

これが正の重解をもつので、係数について

$$2a - 1 > 0, \quad (2a - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - b^2) = 0$$

$$\text{よって} \quad a = b^2 + \frac{1}{4} \quad \left(a > \frac{1}{2} \right)$$

(2) $\triangle APQ$ が正三角形のとき、 $PQ^2 = AP^2$ であるから、②より

$$(2t)^2 = t^2 + \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad t^2 = \frac{1}{12}, \quad AP^2 = \frac{1}{3}$$

扇形 APQ の面積を S_1 とすると、 $\angle PAQ = \frac{\pi}{3}$ であるから

$$S_1 = \frac{1}{2} AP^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{18}$$

放物線 $y = x^2$ と x 軸および 2 直線 $x = t$, $x = -t$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \int_{-t}^t x^2 dx = 2 \int_0^t x^2 dx = 2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^t = \frac{2}{3} t^3$$

2 点 P , Q から x 軸にそれぞれ PP' , QQ' を引く. 五角形 $APP'Q'Q$ の面積を S_3 とすると

$$S_3 = 2 \times \text{台形 } OAPP' = 2 \times \frac{1}{2} \left\{ \left(t^2 + \frac{1}{2} \right) + t^2 \right\} t = 2t^3 + \frac{1}{2}t$$

求める面積を S とすると、 $t^2 = \frac{1}{12}$ より、 $t = \frac{\sqrt{3}}{6}$ であるから

$$\begin{aligned} S &= S_3 - S_1 - S_2 = \left(2t^3 + \frac{1}{2}t \right) - \frac{\pi}{18} - \frac{2}{3}t^3 \\ &= \left(\frac{4}{3}t^2 + \frac{1}{2} \right) t - \frac{\pi}{18} \\ &= \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18} \\ &= \frac{11}{18} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18} = \frac{11\sqrt{3} - 6\pi}{108} \end{aligned}$$



- 4 (1) n を自然数とすると、 $|x| + |y| = n$ を満たす整数 $(|x|, |y|)$ の組は

$$(|x|, |y|) = (j, n - j) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n)$$

このうち、 $j = 0, n$ のとき、整数 (x, y) の組の個数はそれぞれ 2 個。
 $j = 1, 2, \dots, n - 1$ のとき、整数 (x, y) の組の個数はそれぞれ 4 個。
したがって、 $|x| + |y| = n$ を満たす (x, y) の組の個数は

$$2 + 2 + 4(n - 1) = 4n$$

$|x| + |y| = 0$ を満たす整数 (x, y) の組の個数は 1 個であることに注意すると、 $|x| + |y| \leq n$ を満たす整数 (x, y) の組の個数は

$$1 + \sum_{k=1}^n 4k = 1 + 4 \times \frac{1}{2}n(n+1) = 2n^2 + 2n + 1$$

- (2) (1) の結果を $a_n = 2n^2 + 2n + 1$ とおく。

$|x| + |y| + |z| \leq n \cdots (*)$ について、 $k = |z|$ とおくと ($k = 0, 1, 2, \dots, n$)

$$|x| + |y| \leq n - k$$

$k = 0$ のとき、 $(*)$ を満たす整数 (x, y, z) の組の個数は a_n

$k \neq 0$ のとき、 $(*)$ を満たす整数 (x, y, z) の組の個数は $2a_{n-k}$

よって、 $(*)$ を満たす整数 (x, y, z) の組の個数は

$$\begin{aligned} a_n + \sum_{k=1}^n 2a_{n-k} &= 2a_0 - a_n + 2 \sum_{k=1}^n a_k \\ &= 2 \cdot 1 - (2n^2 + 2n + 1) + 2 \sum_{k=1}^n (2k^2 + 2k + 1) \\ &= -2n^2 - 2n + 1 + \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + 2n \\ &= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) + 2n + 1 \\ &= \frac{1}{3}(2n+1)\{2n(n+1) + 3\} \\ &= \frac{1}{3}n(2n+1)(2n^2 + 2n + 3) \end{aligned}$$

