平成 11 年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (教育学部) 平成 11 年 2 月 25 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ AB = AC である二等辺三角形 ABC の辺 BC を 1 : 2 の比に内分する点 D とする。$\angle\mathrm{BAD} = 30^\circ$，AD = 1 のとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{DAC}$ を求めよ。

(2) 辺 AB の長さを求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 複素数 z $(z \neq i)$ に対して，

$$w = \frac{z+i}{z-i}$$

とおく。ただし，i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) w が実数になるための z の条件を求めよ。

(2) 複素数平面上で z が $-i$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，w の軌跡を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 点 A を中心とする円 $x^2 + (y-a)^2 = b^2$ が，放物線 $y = x^2$ と異なる 2 点 P，Q で接している。ただし，$a > \dfrac{1}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) a と b の関係式を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{APQ}$ が正三角形のとき，円と放物線で囲まれた三日月形の面積を求めよ。

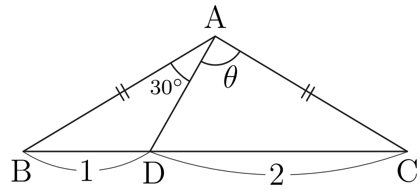
$\boxed{\mathbf{4}}$ n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $|x| + |y| \leqq n$ となる 2 つの整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2) $|x| + |y| + |z| \leqq n$ となる 3 つの整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ。
ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ である。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) BD : DC $= 1 : 2$ より



$$\triangle\mathrm{ABD} : \triangle\mathrm{ACD} = 1 : 2$$

$\theta = \angle\mathrm{DAC}$ とおくと，AB $=$ AC より

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABD} : \triangle\mathrm{ACD} &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin 30^\circ : \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\sin\theta \\ &= \sin 30^\circ : \sin\theta\end{aligned}$$

したがって　$\sin 30^\circ : \sin\theta = 1 : 2$　ゆえに　$\sin\theta = 2\sin 30^\circ = 1$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから　　$\angle\mathrm{ACD} = \mathbf{90^\circ}$

(2) (1) の結果から　　$\angle\mathrm{BAC} = \theta + 30^\circ = 120^\circ$

AB $=$ AC であるから　　$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACB}$

したがって　　$\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$

$\angle\mathrm{ADB} = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$

AD $= 1$ であるから，$\triangle$ABD に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\sin 30^\circ}\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{AB} = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ より $\qquad \overline{w}=\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

w が実数のとき，$w=\overline{w}$ が成り立つから

$$\frac{z+i}{z-i}=\frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i} \quad \text{ゆえに} \quad z+\overline{z}=0$$

よって，z は**純虚数** $(\boldsymbol{z \neq i})$

(2) z は $-i$ を中心とする半径 1 の円周上の点であるから　$|z+i|=1 \quad \cdots①$

$w=\dfrac{z+i}{z-i}$ より $\qquad (w-1)z=i(w+1)$

このとき，$w \neq 1$ であるから　$z=\dfrac{i(w+1)}{w-1} \quad \cdots②$

② を ① に代入すると

$$\left|\frac{i(w+1)}{w-1}+i\right|=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2|w|}{|w-1|}=1$$

$2|w|=|w-1|$ の両辺を平方すると

$$\begin{aligned} 4w\overline{w}&=(w-1)(\overline{w}-1) \\ w\overline{w}+\frac{1}{3}(w+\overline{w})&=\frac{1}{3} \\ \left(w+\frac{1}{3}\right)\left(\overline{w}+\frac{1}{3}\right)&=\frac{4}{9} \\ \left|w+\frac{1}{3}\right|&=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

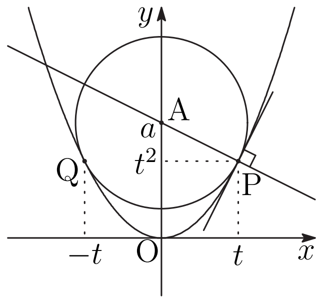
よって，w の軌跡は，$\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$ **を中心とする半径** $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$ **の円.**

解説 $2|w|=|w-1|$ より，$|w|:|w-1|=1:2$.

したがって，w は 2 点 0, 1 を結ぶ線分を 1 : 2 に内分する点 $\dfrac{1}{3}$ と 1 : 2 に外分する点 -1 を直径の両端とする円周上にある (アポロニウスの円).

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

円 $x^2+(y-a)^2=b^2$ および放物線 $y=x^2$ の y 軸に関する対称性に注意して，これらの 2 つの接点 P，Q の座標を $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(-t,\ t^2)$ とおく $(t>0)$．放物線の点 P における法線の方程式は



$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)$$

これが円の中心 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通るから

$$a-t^2=\frac{1}{2}\quad \text{ゆえに}\quad a=t^2+\frac{1}{2}\qquad \cdots①$$

このとき，2 点 $\mathrm{A}\left(0,\ t^2+\dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ の距離が円の半径 b であるから

$$b^2=\mathrm{AP}^2=t^2+\left\{t^2-\left(t^2+\frac{1}{2}\right)\right\}^2=t^2+\frac{1}{4}\qquad \cdots②$$

また，点 $\mathrm{Q}(-t,\ t^2)$ についても，①，② は成り立つ．

$t>0$ であるから，① より　　$a>\dfrac{1}{2}$

①，② から，t を消去すると

$$\boldsymbol{b^2=a-\frac{1}{4}\quad \left(a>\frac{1}{2}\right)}$$

別解 $x^2+(y-a)^2=b^2$ と $y=x^2$ から x を消去すると

$$y+(y-a)^2=b^2 \quad ゆえに \quad y^2-(2a-1)y+a^2-b^2=0$$

これが正の重解をもつので，係数について

$$2a-1>0, \quad (2a-1)^2-4\cdot 1(a^2-b^2)=0$$

よって $$a=b^2+\frac{1}{4} \quad \left(a>\frac{1}{2}\right)$$

(2) $\triangle$APQ が正三角形のとき，$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{AP}^2$ であるから，② より

$$(2t)^2=t^2+\frac{1}{4} \quad ゆえに \quad t^2=\frac{1}{12}, \quad \mathrm{AP}^2=\frac{1}{3}$$

扇形 APQ の面積を S_1 とすると，$\angle\mathrm{PAQ}=\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{AP}^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{18}$$

放物線 $y=x^2$ と x 軸および 2 直線 $x=t$，$x=-t$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_2=\int_{-t}^{t}x^2\,dx=2\int_0^t x^2\,dx=2\left[\,\frac{1}{3}x^3\,\right]_0^t=\frac{2}{3}t^3$$

2 点 P，Q から x 軸にそれぞれ PP′，QQ′ を引く．五角形 APP′Q′Q の面積を S_3 とすると

$$S_3=2\times 台形\,\mathrm{OAPP'}=2\times\frac{1}{2}\left\{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)+t^2\right\}t=2t^3+\frac{1}{2}t$$

求める面積を S とすると，$t^2=\dfrac{1}{12}$ より，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ であるから

$$\begin{aligned}S=S_3-S_1-S_2&=\left(2t^3+\frac{1}{2}t\right)-\frac{\pi}{18}-\frac{2}{3}t^3\\&=\left(\frac{4}{3}t^2+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{18}\\&=\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\pi}{18}\\&=\frac{11}{18}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\pi}{18}=\boldsymbol{\frac{11\sqrt{3}-6\pi}{108}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) n を自然数とするとき，$|x|+|y|=n$ を満たす整数 $(|x|,\ |y|)$ の組は

$$(|x|,\ |y|)=(j,\ n-j)\quad(j=0,1,2,\cdots,n)$$

このうち，$j=0,\ n$ のとき，整数 $(x,\ y)$ の組の個数はそれぞれ 2 個.
$j=1,2,\cdots,n-1$ のとき，整数 $(x,\ y)$ の組の個数はそれぞれ 4 個.
したがって，$|x|+|y|=n$ を満たす $(x,\ y)$ の組の個数は

$$2+2+4(n-1)=4n$$

$|x|+|y|=0$ を満たす整数 $(x,\ y)$ の組の個数は 1 個であることに注意すると，$|x|+|y|\leqq n$ を満たす整数 $(x,\ y)$ の組の個数は

$$1+\sum_{k=1}^{n}4k=1+4\times\frac{1}{2}n(n+1)=\boldsymbol{2n^2+2n+1}$$

(2) (1) の結果を $a_n=2n^2+2n+1$ とおく.
$|x|+|y|+|z|\leqq n\cdots(*)$ について，$k=|z|$ とおくと $(k=0,1,2,\cdots,n)$

$$|x|+|y|\leqq n-k$$

$k=0$ のとき，$(*)$ を満たす整数 $(x,\ y,\ z)$ の組の個数は　a_n
$k\neq 0$ のとき，$(*)$ を満たす整数 $(x,\ y,\ z)$ の組の個数は　$2a_{n-k}$

よって，$(*)$ を満たす整数 $(x,\ y,\ z)$ の組の個数は

$$\begin{aligned}
a_n+\sum_{k=1}^{n}2a_{n-k}&=2a_0-a_n+2\sum_{k=1}^{n}a_k\\
&=2\cdot 1-(2n^2+2n+1)+2\sum_{k=1}^{n}(2k^2+2k+1)\\
&=-2n^2-2n+1+\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+2n\\
&=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)+2n+1\\
&=\frac{1}{3}(2n+1)\{2n(n+1)+3\}\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(2n+1)(2n^2+2n+3)}
\end{aligned}$$