平成10年度　熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(教育学部)平成10年2月25日

$\boxed{\mathbf{1}}$～$\boxed{\mathbf{3}}$から1題選択，$\boxed{\mathbf{4}}$～$\boxed{\mathbf{6}}$から1題選択，$\boxed{\mathbf{7}}$～$\boxed{\mathbf{9}}$必答.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ。

(1) $t = x + \dfrac{1}{x}$ とおくとき，$x^2 + x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ を t の式で表せ。

(2) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ を実数を係数とする x の2次の整式の積で表せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 3点A，B，Cがこの順に1直線上に並んでいて $\mathrm{AB} = 1$ とする。Bを通り直線ACに直交する直線 ℓ が与えられているとき，

$$\mathrm{BD}^2 = \mathrm{BC}$$

をみたす ℓ 上の点Dを作図する方法をその理由とともに述べよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a_1 = a_2 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geqq 3)$ により定まる数列 $\{a_n\}$ について次の問いに答えよ。

(1) $n = 3,\ 4,\ \cdots,\ 9$ に対して a_n の値を求めよ。

(2) n が3の倍数ならば a_n は偶数であり，n が3の倍数でなければ a_n は奇数であることを示せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\vec{a} = (2,\ 1,\ 0)$，$\vec{b} = (1,\ 0,\ 1)$，$\vec{c} = (0,\ 0,\ 1)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) t，s が $2t + s = 1$，$-1 \leqq s \leqq 3$ をみたすとき，$|\vec{a} + t\vec{b} + s\vec{c}|$ の最大値，最小値とそれらを与える t，s の値を求めよ。

(2) (1)で求めた最小値を与える t，s の値を t_0，s_0 とする。$\vec{a} + t_0\vec{b} + s_0\vec{c}$ が $\vec{b} + k\vec{c}$ に垂直であるときの k の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ x の方程式 $x^3 + (m-1)x^2 - (m-n)x - n = 0$ (m，n は正の整数) の解のうち2つの解 α，β について，

$$\alpha\beta = 5, \quad \frac{\alpha - \beta}{2i}\text{は正の整数}$$

が成立するとき，m，n，α，β の組をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 異なる3つの箱がある。これらの3つの箱にうち1つを無作為に選び，その中にボールを1個入れる試行を繰り返す。第1回目の試行を始める前の3つの箱は空であるとする。第 n 回目の試行後にボールが2個以上入っている箱の数を X_n，ボールが1個だけ入っている箱の個数を Y_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $X_3 = 0$ かつ $Y_3 = 3$ である事象を A_1，$X_3 = 1$ かつ $Y_3 = 1$ である事象を A_2，$X_3 = 1$ かつ $Y_3 = 0$ である事象を A_3 とするとき，A_1，A_2，A_3 の確率 $P(A_1)$，$P(A_2)$，$P(A_3)$ を求めよ。

(2) $P_{A_i}(X_4 = 1)$，$P_{A_i}(X_4 = 2)$ を $i = 1, 2, 3$ について求めよ。ただし，$P_A(B)$ は事象 A が起こったときに事象 B が起こる条件つき確率である。

(3) X_4 の期待値 $E(X_4)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{7}}$ 各辺の長さが2の正四面体 ABCD の辺 AD 上に点 P があり，辺 BC 上に点 Q がある。$\mathrm{AP} = t$, $\mathrm{BQ} = 2t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1) PB の長さを t の式で表せ。

(2) $\angle\mathrm{PBC} = \theta$ とおくとき，$\cos\theta$ を t の式で表せ。

(3) PQ の長さの最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{8}}$ 2つの放物線 $y = -(x+a)^2$ と $y = x^2 + b$ で囲まれる図形の面積を S とする。ただし，a，b は $b = -a^2 + 2a - 2$，$b \geqq -2$ をみたすとする。次の問いに答えよ。

(1) S を a の式で表せ。

(2) S の値の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{9}}$ 自然数 a を $a = 2^p k$ (p は0以上の整数，k は奇数) と表したとき，次の問いに答えよ。

(1) $\log_2 a$ が有理数ならば $k = 1$ であることを示せ。

(2) $\log_4 a$ は $\dfrac{1}{2}$ の整数倍かまたは無理数のいずれかであることを示せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x^2+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+x+\dfrac{1}{x}-2=\boldsymbol{t^2+t-2}$

(2) (1) の結果から

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=t^2+t-1$$

$t^2+t-1=0$ を解くと　$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

ゆえに　$t^2+t-1=\left(t-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(t-\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$

よって

$$\begin{aligned}x^4+x^3+x^2+x+1&=x^2\left(x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\&=x^2\left(t^2+t-1\right)\\&=x^2\left(t-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(t-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\\&=x^2\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\\&=\boldsymbol{\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)}\end{aligned}$$

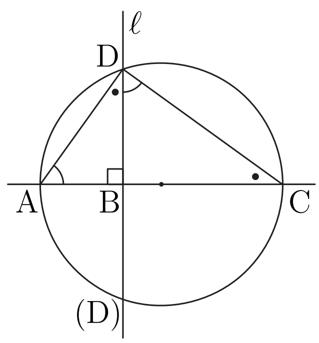
$\boxed{\mathbf{2}}$ $\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BD}^2=\mathrm{BC}$ より

$\mathrm{BD}^2=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}$　ゆえに　$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}}$

$\mathrm{AC}\perp\ell$ であるから　$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DBC}=90^\circ$

したがって　$\triangle\mathrm{ABD}\backsim\triangle\mathrm{DBC}\backsim\triangle\mathrm{ADC}$

$\angle\mathrm{ADC}=90^\circ$ であるから，D は AC を直径とする円周上にある．



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = \mathbf{2}$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = \mathbf{3}$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = \mathbf{5}$

$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = \mathbf{8}$

$a_7 = a_6 + a_5 = 8 + 5 = \mathbf{13}$

$a_8 = a_7 + a_6 = 13 + 8 = \mathbf{21}$

$a_9 = a_8 + a_7 = 21 + 13 = \mathbf{34}$

(2) 条件から，a_1，a_2 は奇数．(1) の結果から，a_3 は偶数．
$n \geqq 4$ とすると，与えられた漸化式より

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = (a_{n-2} + a_{n-3}) + a_{n-2} = 2a_{n-2} + a_{n-3}$$

a_n は整数であるから　　$a_n \equiv a_{n-3} \pmod 2$

よって，n が 3 の倍数ならば a_n は偶数であり，n が 3 の倍数でなければ a_n は奇数である．

$\boxed{4}$ (1) $2t+s=1$ より　　$s=1-2t$

$-1 \leqq s \leqq 3$ であるから　$-1 \leqq t \leqq 1$

$$\begin{aligned}\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{c} &= \vec{a}+t\vec{b}+(1-2t)\vec{c}\\ &= (2,\ 1,\ 0)+t(1,\ 0,\ 1)+(1-2t)(0,\ 0,\ 1)\\ &= (2+t,\ 1,\ 1-t) \quad \cdots ①\end{aligned}$$

したがって　$\begin{aligned}|\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{c}|^2 &= (2+t)^2+1^2+(1-t)^2\\ &= 2t^2+2t+6\\ &= 2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{2}\end{aligned}$

ゆえに　$|\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{c}|^2$ は　$t=1$ のとき最大値 10,

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{11}{2}$ をとる.

よって　$|\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{c}|$ は　$\boldsymbol{t=1,\ s=-1}$ **のとき，最大値** $\boldsymbol{10}$

$\boldsymbol{t=-\dfrac{1}{2},\ s=2}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{22}}{2}}$

(2) $t_0=-\dfrac{1}{2}$，$s_0=2$ であるから，① より　$\vec{a}+t_0\vec{b}+s_0\vec{c}=\left(\dfrac{3}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2}\right)$

また　　$\vec{b}+k\vec{c}=(1,\ 0,\ 1)+k(0,\ 0,\ 1)=(1,\ 0,\ 1+k)$

これらが $\vec{b}+k\vec{c}$ に垂直であるとき，$(\vec{a}+t_0\vec{b}+s_0\vec{c})\cdot(\vec{b}+k\vec{c})=0$ より

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{2}(1+k)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=-2}$$

解説 $\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{c}=\vec{a}+\vec{c}+t(\vec{b}-2\vec{c})$

この直線の方向ベクトルが $\vec{b}-2\vec{c}$ であるから，原点からこの直線までの距離が最小となるとき，$\vec{a}+s_0\vec{b}+t_0\vec{c}$ と $\vec{b}-2\vec{c}$ は垂直である.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $x^3+(m-1)x^2-(m-n)x-n=0$ より　$(x-1)(x^2+mx+n)=0$

$\dfrac{\alpha-\beta}{2i}$ が整数であるから，α，β は共役な複素数 $(\alpha \neq \beta)$

したがって，α，β は 2 次方程式 $x^2+mx+n=0$ の解であるから

$$\alpha+\beta=-m,\quad \alpha\beta=n$$

条件から，$\alpha\beta=5$ であるから　$n=5$

$x^2+mx+5=0$ は虚数解 α，β をもち，$\dfrac{\alpha-\beta}{2i}$ が正の整数であるから

$$\alpha=\frac{-m+\sqrt{m^2-20}}{2}=\frac{-m+\sqrt{20-m^2}\,i}{2}$$
$$\beta=\frac{-m-\sqrt{m^2-20}}{2}=\frac{-m-\sqrt{20-m^2}\,i}{2}$$

ゆえに，$\dfrac{\alpha-\beta}{2i}=\dfrac{\sqrt{20-m^2}}{2}$ が整数であるとき，正の整数 m は　2，4

よって　　$\boldsymbol{n=5}$，$\boldsymbol{(m,\ \alpha,\ \beta)=(2,-1+2i,-1-2i),}$
$\boldsymbol{(4,-2+i,-2-i)}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 3 回目の試行後に 3 つの箱に 1 個ずつボールが入っている事象 A_1 の確率 $P(A_1)$ は

$$P(A_1)=\frac{3!}{3^3}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

3 回目の試行後に 3 つの箱に 2 個，1 個，0 個のボールが入っている事象 A_2 の確率 $P(A_2)$ は

$$P(A_2)=\frac{{}_3\mathrm{P}_2\times 3}{3^3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

3 回目の試行後に 3 つの箱に 3 個，0 個，0 個のボールが入っている事象 A_3 の確率 $P(A_3)$ は

$$P(A_3)=\frac{3}{3^3}=\boldsymbol{\frac{1}{9}}$$

(2) 事象 A_1 が起きたとき，4 回目の試行においてボールがどの箱に入っても，$X_4 = 1$ となるから

$$P_{A_1}(X_4 = 1) = \mathbf{1}$$

事象 A_2 が起きたとき，4 回目の試行においてボールが 2 個入っている箱か 0 個入っている箱にボールが入ったとき，$X_1 = 1$ となるから

$$P_{A_2}(X_4 = 1) = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

事象 A_3 が起きたとき，4 回目の試行においてどの箱にボールが入っても $X_4 = 1$ となるから

$$P_{A_3}(X_4 = 1) = \mathbf{1}$$

事象 A_1 が起きたとき，4 回目の試行においてボールがどの箱に入っても，$X_4 = 1$ となるから

$$P_{A_1}(X_4 = 2) = \mathbf{0}$$

事象 A_2 が起きたとき，4 回目の試行においてボールが 1 個入っている箱にボールが入ったとき，$X_4 = 2$ となるから

$$P_{A_2}(X_4 = 2) = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

事象 A_3 が起きたとき，4 回目の試行においてどの箱にボールが入っても $X_4 = 1$ となるから

$$P_{A_3}(X_4 = 1) = \mathbf{0}$$

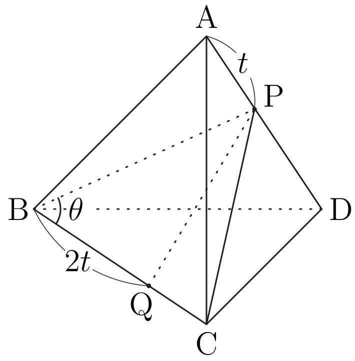
(3) (3) の結果から

$$P(X_4 = 1) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P_{A_i}(X_4 = 1) = \frac{2}{9} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \times 1 = \frac{7}{9}$$

$$P(X_4 = 1) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P_{A_i}(X_4 = 2) = \frac{2}{9} \times 0 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \times 0 = \frac{2}{9}$$

よって　$E(X_4) = 1 \times P(X_4 = 1) + 2 \times P(X_4 = 2) = 1 \times \frac{7}{9} + 2 \times \frac{2}{9} = \mathbf{\frac{11}{9}}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) △ABP に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned}\mathrm{PB}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AP}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AP}\cos 60^\circ \\ &= 2^2 + t^2 - 2\cdot 2\cdot t\cdot\frac{1}{2} \\ &= t^2 - 2t + 4\end{aligned}$$

$\mathrm{PB} > 0$ より　$\mathbf{PB = \sqrt{t^2 - 2t + 4}}$

(2) △PBC は二等辺三角形であるから，BC の中点を M とすると

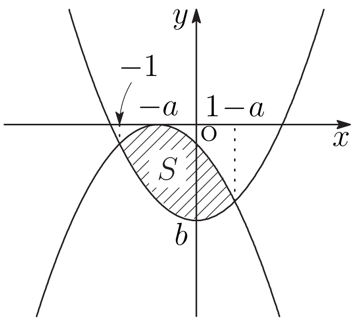
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{PB}} = \frac{1}{\mathrm{PB}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t + 4}}}$$

(3) △PBQ に余弦定理を適用すると，(1),(2) の結果より

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= \mathrm{PB}^2 + \mathrm{BQ}^2 - 2\mathrm{PB}\cdot\mathrm{BQ}\cos\theta \\ &= \mathrm{PB}^2 + \mathrm{BQ}^2 - 2\mathrm{PB}\cdot\mathrm{BQ}\cdot\frac{1}{\mathrm{PB}} \\ &= (t^2 - 2t + 4) + (2t)^2 - 2\cdot 2t \\ &= 5^2 - 6t + 4 \\ &= 5\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{11}{5}\end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq 1$ であるから，$t = \dfrac{3}{5}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{55}}{5}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $b=-a^2+2a-2$, $b \geqq -2$ より



$-a^2+2a-2 \geqq -2$　ゆえに　$0 \leqq a \leqq 2$　$\cdots$ ①

$y=-(x+a)^2$ と $y=x^2+b$ から y を消去すると

$$-(x+a)^2 = x^2-a^2+2a-2$$
$$x^2+ax+a-1=0$$
$$(x+1)(x+a-1)=0$$

これを解いて　　$x=-1,\ 1-a$

ここで，① より　$-1 \leqq 1-a \leqq 1$

したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1-a} \{-(x+a)^2-(x^2-a^2+2a-2)\}\,dx \\ &= -2\int_{-1}^{1-a}(x+1)(x+a-1)\,dx \\ &= -2\left(-\frac{1}{6}\right)\{(1-a)-(-1)\}^3 = \frac{1}{3}(2-a)^3 \end{aligned}$$

(2) ① より　$0 \leqq 2-a \leqq 2$

これと (1) の結果により　　$\boldsymbol{0 \leqq S \leqq \frac{8}{3}}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $a = 2^p k$ (p は 0 以上の整数，k は奇数) より

$$\log_2 a = p + \log_2 k$$

$\log_2 a$ が有理数のとき，$\log_2 k$ は有理数であるから

$$\log_2 k = \frac{m}{n} \quad (m,\ n \text{ は整数},\ n > 0)$$

したがって　　$k = 2^{\frac{m}{n}}$　ゆえに　$k^n = 2^m$

k は奇数，$n > 0$ であるから　　$k = 1$

(2) $\log_2 a$ が有理数ならば，(1) の結果から，$a = 2^p$ (p は 0 以上の整数)

したがって　　$\log_4 a = \dfrac{\log_2 a}{\log_2 4} = \dfrac{p}{2}$

よって，$\log_4 a$ は $\dfrac{1}{2}$ の整数倍かまたは無理数である．